解説

ファジィ数Ⅱ†

稲井田 次郎*

最初に、前回「ファジィ数Ⅰ」の要約を述べる。

ファジィ集合の定義はザデーによって次のようになされた。

ファジィ集合

全体集合 X 上のファジィ集合 A は

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

なるメンバーシップ関数 $\mu_A(x)$ によって特徴付けられる。

今後、簡単のため $\mu_A(x)$ を $A(x)$ と書くことにする。 X 上のファジィ集合全体を $\mathcal{F}(X)$ と書く。

ファジィ集合の演算は多数定義されているが、ここでは本稿で使用するものにとどめる。

ファジィ集合の演算

$A, B, A_i (1, 2, \dots, n) \in \mathcal{F}(X)$ とおく。

1) 相等

$$A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x), x \in X$$

2) 包含関係

$$A \subset B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x), x \in X$$

3) 和集合

$$\begin{aligned} A \cup B &\Leftrightarrow (A \cup B)(x) \\ &= \max\{A(x), B(x)\} \\ &= A(x) \vee B(x), x \in X \end{aligned}$$

4) 積集合(共通集合)

$$\begin{aligned} A \cap B &\Leftrightarrow (A \cap B)(x) \\ &= \min\{A(x), B(x)\} \\ &= A(x) \wedge B(x), x \in X \end{aligned}$$

5) 補集合

$$A^C \Leftrightarrow (A^C)(x) = 1 - A(x), x \in X$$

6) 有限個のファジィ集合の和集合

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)(x) = \max_{i=1 \sim n} A_i(x) = \bigvee_{i=1}^n A_i(x)$$

7) 有限個のファジィ集合の積集合(共通集合)

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)(x) = \min_{i=1 \sim n} A_i(x) = \bigwedge_{i=1}^n A_i(x)$$

添数集合 Λ によって添数付けられたファジィ集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合と積集合を次のように定義する：

8) ファジィ集合族の和集合

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda(x), x \in X$$

9) ファジィ集合族の積集合(共通集合)

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \Leftrightarrow \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)(x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda(x), x \in X$$

今後、全体集合 X として、ユークリッド空間 R を考える。このとき、 α -レベル集合の定義を次のようにする。

α -レベル集合(α -カット)

A を R 上のファジィ集合とすると、 A の α -レベル集合(α -カット)を次式で定義する：

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{x \in R \mid A(x) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \{x \in R \mid A(x) > 0\}, & \alpha = 0 \end{cases}$$

ファジィ数

R 上のファジィ集合 u が、次の条件を満たすとき、ファジィ数という：

1) 正規

ある $x_0 \in R$ が存在して、 $u(x_0) = 1$

2) ファジィ凸

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq u(x) \wedge u(y), x, y \in R, 0 \leq \lambda \leq 1$$

3) $u(x)$ が上に半連続

4) $[u]^0$ が有界

今後、ファジィ数を $u, v, w, \dots$ で表し、ファジィ数全体を E^1 とおく。この E^1 をファジィ数空間という。

このファジィ数の定義は、次のように置き換えることができる：

R 上のファジィ集合 u は、各 α -レベル集合 $[u]^\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ が空でない有界閉区間であるとき、ファジィ数

† Fuzzy Numbers II

Jiro INAIDA

* 日本大学理工学部

College of Science and Technology, Nihon University

という.

ファジィ数 u に対し, 分解定理を適用すれば

$$u = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap [u]^\alpha)$$

と表すことができる.

ここで, $[u]^\alpha$ はすべて空でない有界閉区間であり,

Lemma 5-1 より

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1 \Rightarrow [u]^{\alpha_1} \supset [u]^{\alpha_2}$$

が成立する. さらに, 単調増加な正数列 $\{\alpha_n\}$ が $\alpha \in (0, 1]$ に収束すれば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} = [u]^\alpha$$

も成立する.

注14 閉区間 $F_n = [a_n, b_n]$ が各 n に対し

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

を満たすとき, $\alpha = \sup a_n$, $\beta = \inf b_n$ とおくと

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\alpha, \beta]$$

が成立する.

実は, この逆も成立することが知られている. これをファジィ数における基本定理という.

ファジィ数における基本定理

u がファジィ数ならば

- 1) $[u]^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$ はすべて空でない有界閉区間である.
- 2) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ならば, $[u]^{\alpha_1} \supset [u]^{\alpha_2}$
- 3) 単調増加な正数列 $\{\alpha_n\}$ が $\alpha \in (0, 1]$ に収束すれば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} = [u]^\alpha$$

が成立する.

いま, $(P_\alpha)_{\alpha \in [0, 1]}$ を添数集合 $[0, 1]$ によって添数付けられた R 上の (クリスプ) 集合族とする.

ある集合族 $(P_\alpha)_{\alpha \in [0, 1]}$ に対し, 上の1)~3)に相当する

- 1) P_α , $0 \leq \alpha \leq 1$ はすべて空でない有界閉区間である.
- 2) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ならば, $P_{\alpha_1} \supset P_{\alpha_2}$
- 3) $\alpha \in (0, 1]$ に収束する単調増加な正数列 $\{\alpha_n\}$ に対し

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_{\alpha_n} = P_\alpha$$

が成立するならば, ただ1つのファジィ数 u が存在し $[u]^\alpha = P_\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, $[u]^0 \subset P_0$

を満たす.

この定理より R 上のファジィ数が区間により特徴付けられることが分かる. したがって, 実数における様々な概念が区間数を通して, ファジィ数に対して定義できる.

そこで, 区間数について概略を述べる.

5. 区間数

区間数 $[a, b]$, $a \leq b$ は R 上のファジィ数であることは, 前回示した. そのメンバーシップ関数は

$$[a, b](x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる.

定義6 区間数の相等

2つの区間数 $I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2]$ において

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

ならば, I と J は相等しいといい

$$I = J$$

と書く.

区間数間の順序

区間数 $I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2]$ において

$$a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$$

ならば

$$I \leq J$$

とおく. この関係“ $\leq$ ”はいわゆる順序の公理

- 1) $I \leq I$ (反射律)
- 2) $I \leq J$, $J \leq K$ ならば $I \leq K$ (推移律)
- 3) $I \leq J$, $J \leq I$ ならば $I = J$ (反対称律)

を満たしている.

(証明)

$$I = [a_1, b_1], J = [a_2, b_2], K = [a_3, b_3] \text{ とおく.}$$

- 1) $a_1 \leq a_1$, $b_1 \leq b_1$ より

$$I \leq I$$

- 2) $I \leq J$ より, $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ であり, $J \leq K$ より,

$$a_2 \leq a_3, b_2 \leq b_3 \text{ である. よって}$$

$$a_1 \leq a_3, b_1 \leq b_3$$

すなわち

$$I \leq K$$

3) $I \leq J$ より, $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$ であり, $J \leq I$ より,
 $a_2 \leq a_1, b_2 \leq b_1$ である. よって
 $a_1 = a_2, b_1 = b_2$
 すなわち, 区間数の相等により
 $I = J$

定義 7 区間数 $I = [a_1, b_1], J = [a_2, b_2]$ において

$$I \leq J \Leftrightarrow a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$$

と定義すれば, “ $\leq$ ” は区間数における順序となる.

注15 任意の実数 r を $r = [r, r]$ と考えれば, 区間数間の順序は実数間の順序の拡張になっている.

注16 2つの区間数に対し, 常に順序があるとは限らない.

例 9 2つの区間数

$$[-1, 2], [0, 1]$$

には順序がない.

区間数間の距離

2つの区間数を $I = [a_1, b_1], J = [a_2, b_2]$ とするとき, 実数値関数

$$\rho_H(I, J) = |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2|$$

を考える. この $\rho_H(I, J)$ は距離の公理

1) $\rho_H(I, J) \geq 0$ (正定値性)

特に, $\rho_H(I, J) = 0$ となる必要十分条件は $I = J$ である.

2) $\rho_H(I, J) = \rho_H(J, I)$ (対称性)

3) $\rho_H(I, K) \leq \rho_H(I, J) + \rho_H(J, K)$ (三角不等式)

を満たしている.

(証明)

1) $|a_1 - a_2| \geq 0, |b_1 - b_2| \geq 0$ より

$$\rho_H(I, J) = |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2| \geq 0$$

つぎに

$$\rho_H(I, J) = |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2| = 0$$

ならば

$$|a_1 - a_2| = |b_1 - b_2| = 0$$

すなわち

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

したがって

$$I = J$$

逆に, $I = J$ ならば, $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ であるから

$$\rho_H(I, J) = |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2| = 0$$

2) $\rho_H(I, J) = |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2|$

$$= |a_2 - a_1| \vee |b_2 - b_1|$$

$$= \rho_H(J, I)$$

3) $|a_1 - a_3| \leq |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|,$

$$|b_1 - b_3| \leq |b_1 - b_2| + |b_2 - b_3|$$

より

$$\rho_H(I, K)$$

$$= |a_1 - a_3| \vee |b_1 - b_3|$$

$$\leq (|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3|) \vee (|b_1 - b_2| + |b_2 - b_3|)$$

$$\leq (|a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2|) + (|a_2 - a_3| \vee |b_2 - b_3|)$$

$$= \rho_H(I, J) + \rho_H(J, K)$$

□

定義 8 区間数 $I = [a_1, b_1], J = [a_2, b_2]$ とするとき, I と J の距離は

$$\rho_H(I, J) = |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2| \quad (6)$$

で与えられる.

注17 n 次元ユークリッド空間 R^n 上の空でないコンパクト凸集合 K_1, K_2 に対し, ハウスドルフの距離は

$$d_H(K_1, K_2) = \sup_{x \in K_1} \inf_{y \in K_2} d(x, y) \vee \sup_{y \in K_2} \inf_{x \in K_1} d(x, y)$$

によって定義される. ここで, $d(x, y)$ は R^n 上のユークリッドの距離である.

区間数の距離 (6) は, 1次元ユークリッド空間 R 上のハウスドルフの距離に相当する. すなわち

$$I = [a_1, b_1], J = [a_2, b_2] \text{ として}$$

$$\begin{aligned} d_H(I, J) &= \sup_{x \in I} \inf_{y \in J} d(x, y) \vee \sup_{y \in J} \inf_{x \in I} d(x, y) \\ &= |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2| \\ &= \rho_H(I, J) \end{aligned}$$

R 上の空でない集合において, 次の演算を定義する:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$kA = \{ka \mid a \in A\}, k \text{ は定数}$$

R 上の有界閉区間について, これらの演算を施すと:

$$\begin{aligned} &[a_1, b_1] + [a_2, b_2] \\ &= \{x \mid a_1 \leq x \leq b_1\} + \{y \mid a_2 \leq y \leq b_2\} \\ &= \{x + y \mid a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\} \\ &= \{z \mid a_1 + a_2 \leq z \leq b_1 + b_2\} \\ &= [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &k[a_1, b_1] \\ &= \{kx \mid a_1 \leq x \leq b_1\} \\ &= \begin{cases} \{z \mid ka_1 \leq z \leq kb_1\}, k \geq 0 \\ \{z \mid kb_1 \leq z \leq ka_1\}, k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} [ka_1, kb_1], k \geq 0 \\ [kb_1, ka_1], k < 0 \end{cases}$$

したがって, R 上の有界閉区間と区間数を同一視することにより, 区間数の演算を次のように定義する:

定義9 区間数の演算

区間数 $I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2]$ に対し, 和およびスカラー倍を次のように定義する:

$$I + J = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \quad (7)$$

$$kI = k[a_1, b_1] = \begin{cases} [ka_1, kb_1], & k \geq 0 \\ [kb_1, ka_1], & k < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Lemma 7 I, J, K を区間数とする. このとき

- 1) $I + J = J + I$
- 2) $(I + J) + K = I + (J + K)$
- 3) $k(I + J) = kI + kJ$, k は定数
- 4) $(k_1 k_2)I = k_1(k_2 I)$, k_1, k_2 は定数
- 5) $(k_1 + k_2)I = k_1 I + k_2 I$, $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$

(証明)

$I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2]$, $K = [a_3, b_3]$ とおく.

- 1) $I + J$

$$\begin{aligned} &= [a_1, b_1] + [a_2, b_2] \\ &= [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \\ &= [a_2 + a_1, b_2 + b_1] \\ &= [a_2, b_2] + [a_1, b_1] \\ &= J + I \end{aligned}$$

- 2) $(I + J) + K$

$$\begin{aligned} &= ([a_1, b_1] + [a_2, b_2]) + [a_3, b_3] \\ &= [a_1 + a_2, b_1 + b_2] + [a_3, b_3] \\ &= [(a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + a_3] \\ &= [a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + a_3)] \\ &= [a_1, b_1] + [a_2 + a_3, b_2 + a_3] \\ &= [a_1, b_1] + ([a_2, b_2] + [a_3, b_3]) \\ &= I + (J + K) \end{aligned}$$

- 3) $k \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned} &k(I + J) \\ &= k([a_1, b_1] + [a_2, b_2]) \\ &= k[a_1 + a_2, b_1 + b_2] \\ &= [k(a_1 + a_2), k(b_1 + b_2)] \\ &= [ka_1 + ka_2, kb_1 + kb_2] \\ &= [ka_1, kb_1] + [ka_2, kb_2] \\ &= k[a_1, b_1] + k[a_2, b_2] \\ &= kI + kJ \end{aligned}$$

$k < 0$ の場合

$$\begin{aligned} &k(I + J) \\ &= k([a_1, b_1] + [a_2, b_2]) \\ &= k[a_1 + a_2, b_1 + b_2] \\ &= [k(b_1 + b_2), k(a_1 + a_2)] \\ &= [kb_1 + kb_2, ka_1 + ka_2] \\ &= [kb_1, ka_1] + [kb_2, ka_2] \\ &= k[a_1, b_1] + k[a_2, b_2] \\ &= kI + kJ \end{aligned}$$

- 4) $k_1 \geq 0, k_2 < 0$ の場合を示す.

$$\begin{aligned} &(k_1 k_2)I \\ &= (k_1 k_2)[a_1, b_1] \\ &= [(k_1 k_2)b_1, (k_1 k_2)a_1] \\ &= [k_1(k_2 b_1), k_1(k_2 a_1)] \\ &= k_1(k_2[a_1, b_1]) \\ &= k_1(k_2 I) \end{aligned}$$

他の場合も同様である.

- 5) $k_1 + k_2 \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} &(k_1 + k_2)I \\ &= (k_1 + k_2)[a_1, b_1] \\ &= [(k_1 + k_2)a_1, (k_1 + k_2)b_1] \\ &= [k_1 a_1 + k_2 a_1, k_1 b_1 + k_2 b_1] \\ &= [k_1 a_1, k_1 b_1] + [k_2 a_2, k_2 b_2] \\ &= k_1[a_1, b_1] + k_2[a_1, b_1] \\ &= k_1 I + k_2 I \quad \square \end{aligned}$$

注18 式5)は $k_1 \leq 0, k_2 \leq 0$ の場合も成立する. k_1, k_2 が異符号のときは一般に成立しない.

例10 $k_1 = 1, k_2 = -1, I = [-1, 1]$ とおく. このとき $(k_1 + k_2)I = 0 \cdot I = [0, 0] = 0$

一方

$$k_1 I + k_2 I = [-1, 1] + [-1, 1] = [-2, 2]$$

したがって

$$(k_1 + k_2)I \neq k_1 I + k_2 I$$

Lemma 8 I, J, K を区間数とする. このとき

- 1) $\rho_H(I + K, J + K) = \rho_H(I, J)$
- 2) $\rho_H(kI, kJ) = |k| \rho_H(I, J)$, $k \in R$

(証明)

$I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2]$, $K = [a_3, b_3]$ とおく.

- 1) $\rho_H(I + K, J + K)$

$$\begin{aligned} &= \rho_H([a_1, b_1] + [a_3, b_3], [a_2, b_2] + [a_3, b_3]) \\ &= \rho_H([a_1 + a_3, b_1 + b_3], [a_2 + a_3, b_2 + b_3]) \\ &= |(a_1 + a_3) - (a_2 + a_3)| \vee |(b_1 + b_3) - (b_2 + b_3)| \end{aligned}$$

$$= |a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2|$$

$$= \rho_H(I, J)$$

2) $k \geq 0$ の場合

$$\rho_H(kI, kJ)$$

$$= \rho_H(k[a_1, b_1], k[a_2, b_2])$$

$$= \rho_H([ka_1, kb_1], [ka_2, kb_2])$$

$$= |ka_1 - ka_2| \vee |kb_1 - kb_2|$$

$$= |k|(|a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2|)$$

$$= |k|\rho_H(I, J)$$

$k < 0$ の場合

$$\rho_H(kI, kJ)$$

$$= \rho_H(k[a_1, b_1], k[a_2, b_2])$$

$$= \rho_H([kb_1, ka_1], [kb_2, ka_2])$$

$$= |kb_1 - kb_2| \vee |ka_1 - ka_2|$$

$$= |k|(|b_1 - b_2| \vee |a_1 - a_2|)$$

$$= |k|(|a_1 - a_2| \vee |b_1 - b_2|)$$

$$= |k|\rho_H(I, J) \quad \square$$

定義10 区間数の差

I, J を区間数とする. ある区間数 K が存在して, $I = J + K$ が成立すれば, K を I と J の差といい

$$I - J$$

で表す.

注19 区間数の差は, 必ずしも存在しない. 例えば, $[0, 1] - [1, 3]$ は存在しない. 何故なら, このような区間数 $[a, b]$ ($a \leq b$) が存在すれば

$$[0, 1] = [1, 3] + [a, b] = [1 + a, 3 + b]$$

より, $a = -1, b = -2$ となって, $a \leq b$ に反する.

注20 区間数の差

$$[a, b] - [c, d]$$

が存在するための必要十分条件は

$$a - c \leq b - d$$

であることが分かる.

6. ファジィ数間の順序および距離

ファジィ数間の順序

ファジィ数 u, v の α -レベル集合は, すべて有界閉区間であるから

$$[u]^\alpha = [u_-(\alpha), u_+(\alpha)], [v]^\alpha = [v_-(\alpha), v_+(\alpha)]$$

とおく. ここで, $0 \leq \alpha \leq 1$ である. このとき

$$[u]^\alpha \leq [v]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$$

すなわち

$$u_-(\alpha) \leq v_-(\alpha), u_+(\alpha) \leq v_+(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1$$

ならば

$$u \leq v$$

とする. この関係“ $\leq$ ”はいわゆる順序の公理

1) $u \leq u$ (反射律)

2) $u \leq v, v \leq w$ ならば $u \leq w$ (推移律)

3) $u \leq v, v \leq u$ ならば $u = v$ (反対称律)

を満たしている.

(証明)

1) $[u]^\alpha \leq [u]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ より $u \leq u$

2) $u \leq v, v \leq w$ より

$$[u]^\alpha \leq [v]^\alpha, [v]^\alpha \leq [w]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$$

したがって

$$[u]^\alpha \leq [w]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$$

すなわち

$$u \leq w$$

3) $u \leq v, v \leq u$ より

$$[u]^\alpha \leq [v]^\alpha, [v]^\alpha \leq [u]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$$

よって

$$[u]^\alpha = [v]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$$

すなわち

$$u = v$$

定義11 ファジィ数 $u, v \in E^1$ に対し

$$u \leq v \Leftrightarrow [u]^\alpha \leq [v]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$$

と定義すれば, “ $\leq$ ” は E^1 上の順序となる.

直観的には, 図13において, $v(x)$ の青線が $u(x)$ の青

図13 順序のある2つのファジィ数

図14 三角型ファジィ数 $\ll 0, 0, 2 \gg$, $\ll 0, 1, 1 \gg$ のメンバーシップ関数

線の右側にあり, $v(x)$ の赤線が $u(x)$ の赤線の右側にあるときに, $u \leq v$ とする.

注21 ファジィ数間の順序は, 区間数間の順序の拡張になっている.

注22 2つのファジィ数に対し, 常に順序があるとは限らない.

例11 三角型ファジィ数 $\ll 0, 0, 2 \gg, \ll 0, 1, 1 \gg$ は, 図14で示すように, 両者の赤線が交わり順序がない.

ファジィ数間の距離

$u, v \in E^1$ とするとき, 実数値関数

$$\rho(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha)$$

を考える. この $\rho(u, v)$ は距離の公理

1) $\rho(u, v) \geq 0$ (正定性)

特に, $\rho(u, v) = 0$ となる必要十分条件は $u = v$ である.

2) $\rho(u, v) = \rho(v, u)$ (対称性)

3) $\rho(u, w) \leq \rho(u, v) + \rho(v, w)$ (三角不等式)

を満たしている.

(証明)

1) $\rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1$ より

$$\rho(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \geq 0$$

つぎに

$$\rho(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = 0$$

ならば

$$\rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = 0, 0 \leq \alpha \leq 1$$

すなわち

$$[u]^\alpha = [v]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$$

したがって

$$u = v$$

逆に, $u = v$ ならば, $[u]^\alpha = [v]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ より

$$\rho(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} 2) \rho(u, v) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \\ &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([v]^\alpha, [u]^\alpha) \\ &= \rho(v, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \rho_H([u]^\alpha, [w]^\alpha) \\ \leq \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) + \rho_H([v]^\alpha, [w]^\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \text{より} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(u, w) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [w]^\alpha) \\ &\leq \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) + \rho_H([v]^\alpha, [w]^\alpha)) \\ &\leq \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) + \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([v]^\alpha, [w]^\alpha) \\ &= \rho(u, v) + \rho(v, w) \quad \square \end{aligned}$$

注23 f, g を集合 $P(P \subset R$ でなくてもよい) 上の実数値関数とする. f, g が $Q (C P)$ で上に有界ならば

$$\sup_{x \in Q} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in Q} f(x) + \sup_{x \in Q} g(x)$$

定義12 ファジィ数 $u, v \in E^1$ に対し, u, v 間の距離を次式で定義する:

$$\rho(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \quad (9)$$

$\rho(u, v)$ は直感的には, 図15における青線と赤線の中で一番長い部分を表している.

図15 ファジィ数間の距離

注24 $[u]^\alpha, [v]^\alpha$ もファジィ数であるから, それらの距離は

$$\begin{aligned} \rho([u]^\alpha, [v]^\alpha) &= \sup_{0 \leq \beta \leq 1} \rho_H([u]^\alpha]^\beta, [v]^\alpha]^\beta) \\ &= \sup_{0 \leq \beta \leq 1} \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \\ &= \rho_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) \end{aligned}$$

となる. したがって, ファジィ数間の距離は, 区間数間の距離の拡張となっている.

7. ファジィ数の演算

2つのファジィ数 $u, v \in E^1$ の和 $u + v$, およびスカラー倍 $ku (k \in R)$ は拡張原理および定理2により, 次式で定義できる:

$$(u + v)(x) = \sup_{s+t=x} (u(s) \wedge v(t)), x \in R \quad (10)$$

$$(ku)(x) = \begin{cases} u(x/k), & k \neq 0 \\ 0(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, & k = 0 \end{cases} \quad (11)$$

このとき、式(10)、式(11)の右辺がファジィ数であるための条件を満たしていることを示す必要があるが、ここではそれらの証明は省略する。

式(10)、式(11)でファジィ数の和およびスカラー倍を定義すれば、次の式(12)、式(13)が成立する。本稿では、逆にファジィ数の和およびスカラー倍を式(12)、式(13)の右辺で定義することを試みる。

$$u + v = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([u]^\alpha + [v]^\alpha)) \quad (12)$$

$$ku = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap k[u]^\alpha) \quad (13)$$

式(12)の右辺がファジィ数である証明

1) $[u]^\alpha, [v]^\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) は、それぞれ空でない有界閉区間であるから、 $[u]^\alpha + [v]^\alpha$ も空でない有界閉区間である。

2) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ならば

$$[u]^{\alpha_1} \supset [u]^{\alpha_2}, [v]^{\alpha_1} \supset [v]^{\alpha_2}$$

であるから

$$[u]^{\alpha_1} + [v]^{\alpha_1} \supset [u]^{\alpha_2} + [v]^{\alpha_2}$$

3) 単調増加な正数列 $\{\alpha_n\}$ が $\alpha \in (0, 1]$ に収束すれば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} = [u]^\alpha, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} [v]^{\alpha_n} = [v]^\alpha$$

したがって

$$\begin{aligned} & \bigcap_{n=1}^{\infty} ([u]^{\alpha_n} + [v]^{\alpha_n}) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} ([u_-(\alpha_n), u_+(\alpha_n)] + [v_-(\alpha_n), v_+(\alpha_n)]) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} ([u_-(\alpha_n) + v_-(\alpha_n), u_+(\alpha_n) + v_+(\alpha_n)]) \\ &= [u_-(\alpha) + v_-(\alpha), u_+(\alpha) + v_+(\alpha)] \quad (\because \text{注 14}) \\ &= [u_-(\alpha), u_+(\alpha)] + [v_-(\alpha), v_+(\alpha)] \\ &= [u]^\alpha + [v]^\alpha \end{aligned}$$

したがって、ファジィ数における基本定理により、

ただ 1 つのファジィ数 w_1 が存在し

$$[w_1]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$[w_1]^0 \subset [u]^0 + [v]^0$$

が言える。最後に

$$[w_1]^0 \supset [u]^0 + [v]^0$$

を示す。 $z \in [u]^0 + [v]^0$ に対し

$$x \in [u]^0, y \in [v]^0, x + y = z$$

とおくことができる。ここで、 x, y はそれぞれ

$$\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [u]^\alpha, \quad \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [v]^\alpha$$

の集積点であるから

$$x_n \in \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [u]^\alpha, \quad y_n \in \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [v]^\alpha, \quad n = 1, 2, \dots$$

なる点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を選び、それぞれ x, y に収束させることができる。このとき

$$x_n \in [u]^{\alpha_n}, \quad y_n \in [v]^{\alpha_n}$$

とすれば

$$x_n \in [u]^{\alpha_n} \subset [u]^{\alpha_n' \wedge \alpha_n''}, \quad y_n \in [v]^{\alpha_n} \subset [v]^{\alpha_n' \wedge \alpha_n''}$$

であるから、改めて $\alpha_n = \alpha_n' \wedge \alpha_n''$ とおけば

$$x_n \in [u]^{\alpha_n}, \quad y_n \in [v]^{\alpha_n}$$

すなわち

$$x_n + y_n \in [u]^{\alpha_n} + [v]^{\alpha_n}$$

よって

$$x_n + y_n \in \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} ([u]^\alpha + [v]^\alpha), \quad n = 1, 2, \dots$$

したがって、点列 $\{x_n + y_n\}$ は $x + y$ に収束するから

$$z = x + y \in \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} ([u]^\alpha + [v]^\alpha)} = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [w_1]^\alpha} = [w_1]^0$$

□

注25 集合 S の閉包 $\bar{S}$ に属する任意の x に対し、 x に収束する点列 $\{x_n\}$ が S の中に存在する。

注26 R 上の空でない集合 A, B, C, D に対し

$$A \subset B, C \subset D \implies A + B \subset C + D$$

式(13)の右辺がファジィ数である証明

1) $[u]^\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) は、空でない有界閉区間であるから、 $k[u]^\alpha$ も空でない有界閉区間である。

2) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ならば

$$[u]^{\alpha_1} \supset [u]^{\alpha_2}$$

であるから

$$u_-(\alpha_1) \leq u_-(\alpha_2), \quad u_+(\alpha_1) \geq u_+(\alpha_2)$$

$k \geq 0$ のとき

$$ku_-(\alpha_1) \leq ku_-(\alpha_2), \quad ku_+(\alpha_1) \geq ku_+(\alpha_2)$$

よって

$$[ku_-(\alpha_1), ku_+(\alpha_1)] \supset [ku_-(\alpha_2), ku_+(\alpha_2)]$$

したがって

$$k[u]^{\alpha_1} \supset k[u]^{\alpha_2}$$

$k < 0$ のとき

$$ku_-(\alpha_1) \geq ku_-(\alpha_2), \quad ku_+(\alpha_1) \leq ku_+(\alpha_2)$$

よって

$$[ku_+(\alpha_1), ku_-(\alpha_1)] \supset [ku_+(\alpha_2), ku_-(\alpha_2)]$$

したがって

$$k[u]^{\alpha_1} \supset k[u]^{\alpha_2}$$

3) $k \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} k[u]^{\alpha_n} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} [ku_-(\alpha_n), ku_+(\alpha_n)] \\ &= [ku_-(\alpha), ku_+(\alpha)] \\ &= k[u]^{\alpha}\end{aligned}$$

$k < 0$ のとき

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} k[u]^{\alpha_n} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} [ku_+(\alpha_n), ku_-(\alpha_n)] \\ &= [ku_+(\alpha), ku_-(\alpha)] \\ &= k[u]^{\alpha}\end{aligned}$$

したがって、ファジィ数における基本定理により、
ただ 1 つのファジィ数 w_2 が存在し

$$[w_2]^{\alpha} = k[u]^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$[w_2]^0 \subset k[u]^0$$

が言える.

$$[w_2]^0 \supset k[u]^0$$

は上記と同様に示される. $\square$

上で得られたファジィ数 w_1, w_2 を, 改めてそれぞれ $u+v, ku$ とおく. すなわち

定義13 ファジィ数 $u, v \in E^1$ に対し, 和およびスカラー倍を次式で定義する:

$$u+v = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([u]^{\alpha} + [v]^{\alpha})) \quad (14)$$

$$ku = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap k[u]^{\alpha}) \quad (15)$$

このとき

$$[u+v]^{\alpha} = [u]^{\alpha} + [v]^{\alpha}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$[ku]^{\alpha} = k[u]^{\alpha}, \quad k \in R, \quad \alpha \in [0, 1]$$

が成立する.

Lemma 9 $u, v, w \in E^1$ とする. このとき

$$1) \quad u+v = v+u$$

$$2) \quad (u+v)+w = u+(v+w)$$

$$3) \quad k(u+v) = ku + kv, \quad k \text{ は定数}$$

$$4) \quad (k_1 k_2)u = k_1(k_2 u), \quad k_1, k_2 \text{ は定数}$$

$$5) \quad (k_1 + k_2)u = k_1 u + k_2 u, \quad k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0$$

(証明)

$$\begin{aligned}1) \quad u+v &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([u]^{\alpha} + [v]^{\alpha})) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([v]^{\alpha} + [u]^{\alpha})) \\ &= v+u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad (u+v)+w &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([u+v]^{\alpha} + [w]^{\alpha})) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap (([u]^{\alpha} + [v]^{\alpha}) + [w]^{\alpha})) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([u]^{\alpha} + ([v]^{\alpha} + [w]^{\alpha}))) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([u]^{\alpha} + [v+w]^{\alpha})) \\ &= u+(v+w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \quad k(u+v) &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap k[u+v]^{\alpha}) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap (k([u]^{\alpha} + [v]^{\alpha}))) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap (k[u]^{\alpha} + k[v]^{\alpha})) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap ([ku]^{\alpha} + [kv]^{\alpha})) \\ &= ku + kv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \quad (k_1 k_2)u &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap (k_1 k_2)[u]^{\alpha}) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap k_1[k_2 u]^{\alpha}) \\ &= k_1(k_2 u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5) \quad (k_1 + k_2)u &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap (k_1 + k_2)[u]^{\alpha}) \\ &= \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap (k_1[u]^{\alpha} + k_2[u]^{\alpha})) \\ &= k_1 u + k_2 u \quad \square\end{aligned}$$

注27 式5)は $k_1 \leq 0, k_2 \leq 0$ の場合も成立する. k_1, k_2 が異符号のとき, 一般に成立しない.

次回は, 引き続きファジィ数の演算について説明し, さらにファジィ写像について述べる.

(2012年6月23日 受付)

[問い合わせ先]

〒274-8501 船橋市習志野台7-24-1

日本大学理工学部船橋校舎 一般教育教室数学系列

稲井田 次郎

TEL : 047-469-8713

FAX : 047-469-5234

E-mail : daojingtian@penta.ge.cst.nihon-u.ac.jp