原著論文

周辺性に基づくネットワーク形成とその安定性†

藤本 勝成*

ネットワークにおける、各ポジションの中心性(中心度)に関する概念は、これまでに、社会ネットワークの分野で議論されてきている。しかしながら、その双対概念としても考えられる周辺性(周辺度)に関する研究はほとんどされていない。しかしながら、インターネットや交通網の伸展における費用負担の問題を考えた場合、中心性の高い節点よりも、周辺に位置する節点(新たに、ネットワークに接続するノード)の方が多くの費用負担を強いられる。これは、周辺に位置する節点の方が、ネットワークに接続するに際して、相対的に、より大きな便益を得るためであると考えられる。それゆえ、周辺性そのものに注目することは重要である。本稿では、ネットワークにおける周辺性に関して議論すると共に、この周辺性を基にどのようなネットワークが形成されていくのかについて考察する。

キーワード：周辺性，グラフと両立する順序，社会ネットワーク，対安定性

1. はじめに

ネットワーク(社会，通信，交通等)分析において、中心性は1つの主要な概念である。中心性の概念は様々なフィールドにおいて用いられてきている(Laumann[1], Burt[2], Cook[3], Blau[4], Granovetter[5], Coleman[6], Mariolis[7], Sade[8], Pitts[9])。そして、過去60年間にわたり、種々の中心性尺度(centrality measures)が提案されてきている。

Freeman[10]は、これらの中心性尺度を3つの標準的なカテゴリー(degree, closeness, betweenness centrality)に分類した。また、最大の中心性は、星状のネットワーク(star-network)における中心節点(hub)において実現されると述べている。一方で、Bonacich[11]によって提案された、固有ベクトルを通じた各節点(ポジション)のパワー尺度(power measure)もまた、代表的な中心性尺度の1つである。また、Borgattiら[12]は、これらをグラフ理論の枠組みで再整理している。

一方で、インターネットや交通網の伸展における費用負担の問題を考えた場合、中心性の高い節点よりも、周辺に位置する節点(新たに、ネットワークに接続するノード)の方が多くの費用負担を強いられる。

これは、周辺に位置する節点の方が、ネットワークに接続するに際して、相対的に、より大きな便益を得るためであると考えられる。また、ネットワーク全体の維持・管理において、耐故障性、耐攻撃性という2つの観点から見ると、中心性の高い節点がごく少数で、周辺性の高い節点が多数ある方が好ましく、実際のインターネットや航空路線ではこのようになっている。いわゆる「スケールフリー性」「スモールワールド性」である。この意味でも、中心性同様、周辺性もまた重要な概念であると考えられる。

本稿では、特に周辺性(peripherality)に注目して、1つの周辺度(peripherarity degree)、相対周辺度(周辺性尺度)(relative peripherality degree)の概念を提案し、これを公理的に導く。また、これを各節点を受ける便益の大きさと考えた場合に、どのようなネットワークが形成されるのかについて、その安定性について議論する。

2. 準備と表記

本稿では、無向グラフ(undirected graph)によって表現されるネットワークについて議論する。

定義2.1 (N 上の無向グラフ) N を空でない有限集合とし、 $L^N := \{i, j \mid i \in N, j \in N, i \neq j\}$ とする。このとき、 N とある $L \subseteq L^N$ からなる $G = (N, L)$ を N 上の無向グラフとよぶ。また、 $i \in N$ は (N, L) の節点(node, vertex)と呼ばれ、 $l \in L$ は (N, L) のリンク(link, edge, line)と呼ばれる。

† Network-formation and its stability based on peripherality of nodes in social networks
Katsushige FUJIMOTO

* 福島大学 共生システム理工学類
College of Symbiotic Systems Science, Fukushima University

無向グラフ $G=(N, L)$ を現実のネットワーク (e.g., 社会ネットワーク, 交通網, 電力・通信網等) に対応させるとき, 例えば, ネットワークの各節点 $i \in N$ は, ネットワークへの参加者, 駅, 空港, 中継器等に対応し, 各リンク $l \in L$ は, バイラテラルなコミュニケーションチャンネル, 道路, 航空路線, 送電線, 通信路等に対応する.

また, 2 節点 $j, k \in N$ が G において到達可能 (reachable) であるとは, $j, k \in N$ が以下の 2 条件のいずれかを満たすことをいう.

- (a) $j = k$,
- (b) $\exists (i_1, \dots, i_m) \text{ s.t.}$
 $j = i_1, k = i_m, \{i_t, i_{t+1}\} \in L$
 $\forall t \in \{1, \dots, m-1\}$

この $(i_1, \dots, i_m)$ を j から k への経路 (path) と呼び, 経路 $(i_1, \dots, i_m)$ において, $\{i_t, i_{t+1}\} \in L$ のとき, $(i_1, \dots, i_m)$ は閉路 (cycle) と呼ばれる. また, 閉路を持たないグラフを無閉路グラフ (cycle-free graph) と呼ぶ.

以下, 本稿では便宜上, 節点の集合を N とし, $N: = \{1, 2, \dots, n\}$ のように自然数によって番号づけられた集合として扱うことにする. また, 表記上の複雑さを避けるため, 特に混乱の恐れがない場合には, リンク $\{i, j\}$ を ij と簡略化して表記する場合がある. 同様に $\{i\}$ を i と簡略化して, $N \setminus \{i\}$ を $N \setminus i$ のように記す場合もある. 無向グラフ $G=(N, L)$ において, 任意の $ij \in L$ に対して, $G-ij:=(N, L \setminus \{ij\})$ として表し, 任意の $ij \in L^N \setminus L$ に対して, $G+ij:=(N, L \cup \{ij\})$ と表す. また, 任意の $S \subseteq N$ に対して, $G(S):=(S, L(S))$ と表す. ここで, $L(S):=\{ij \in L \mid i \in S, j \in S\}$ とする.

定義2.2(連結) $S \subseteq N$ が, 無向グラフ G において連結 (connected) であるとは, 任意の $i, j \in S$ が, $G(S)$ において到達可能であることをいう. また, N が連結であるとき, G は連結であるという. $G(N)$ が連結でかつ $G(N \setminus i)$ が連結でないとき, $i \in N$ は切断点 (cut point) と呼ばれる. また, 連結な無閉路グラフを木 (tree) と呼ぶ. $G=(N, L)$ が木であるとき, 任意の $ij \in L$ に対して, $G-ij$ は非連結となる.

3. 周辺性 (Peripherality)

ここでは, (コミュニケーション) ネットワークにおける各ポジションが, ネットワーク構成において, どの程度周辺的な役割を持っているのかについて考え

る. また, 議論の簡単化のため, 以下, 特に断らない限りネットワークとして, 連結な無向グラフのみを扱うことにする.

定義3.1(両立する順序) 連結な無向グラフ $G=(N, L)$ に対して, 順列 $\pi: N \rightarrow N$ が, 以下の条件を満たすとき, π は G に両立する順序 (compatible order) であるという:

「任意の $j \in N$ に対して, $\bigcup_{i=1}^j \{\pi(i)\}$ が G において連結である.」

また, G と両立する順序全体の集合を Π_G とする.

例えば, 図 1 のような $G=(N, L)$, $N=\{1, 2, 3\}$, $L=\{12, 23\}$ に対して, $\pi_1(1)=1, \pi_1(2)=2, \pi_1(3)=3$ と $\pi_2(1)=1, \pi_2(2)=3, \pi_2(3)=2$ なる 2 つの順列 π_1, π_2 を考える.

図 1 $N=\{1, 2, 3\}, L=\{12, 23\}$

まず, π_1 の順序にしたがって, 各節点がネットワークに参加するとき ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$), はじめに 1 が参加し, 次に 2 が参加してリンク $12 \in L$ を築く, 最後に 3 が参加してリンク $23 \in L$ を築いて, ネットワーク $\{12, 23\}$ が完成する. このような順序 (順列) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ を, グラフと両立する順序と呼ぶ. 一方で, π_2 の順序にしたがった場合 ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$), はじめに 1 が参加し, 次に 3 が参加しても, $13 \notin L$ なので, リンクを築くことができない. このような順序 (順列) $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ はグラフと両立しない順序と呼ばれる.

例3.1 花子さん, 太郎君, 次郎君の 3 人は, 高校のクラスメイトである. 花さんは, 陽気で社交的である. また, 太郎君と次郎君は, 共にシャイである. 花さんと太郎君の間では話がはずむ. 花さんと次郎君の間でも話がはずむ. 太郎君と次郎君の 2 人だけでは話がはずまない. しかし, 3 人揃うと, 花さんが中心となって話がはずむ.

“ $1 \Leftrightarrow$ 太郎, $2 \Leftrightarrow$ 花子, $3 \Leftrightarrow$ 次郎” とすると, この関係は図 1 によって表すことができる. ここで, 朝に, この 3 人の登校してくる順序と話のはずみ具合について考える. ここで, 太郎君が最初に登校してくる場合, 次に, 花さんが教室に入ってくれば, 2 人の間で話がはずむ. そこに, 次郎君が入ってきても, 3 人

の間で話ははずむ。一方で、2番目に次郎君が教室に入ってきた場合、2人ともシャイなので話ははずまない。最後に花子さんがやってきてはじめて話がはずむ。

この時、最初の“太郎→花子→次郎”の登校順(i.e., π_1)が、図1のグラフと両立する順序であり、“太郎→次郎→花子”の登校順(i.e., π_2)が、図1のグラフと両立しない順序となる。

図1のグラフと他の N 上の順列との間の両立性の関係を表1に列挙する。

表1 図1のグラフと両立する順序

order π	compatibility
1 → 2 → 3	compatible
1 → 3 → 2	non compatible
2 → 1 → 3	compatible
2 → 3 → 1	compatible
3 → 1 → 2	non compatible
3 → 2 → 1	compatible

3.1 周辺性の公準

社会ネットワーク等の研究においては、各ポジション(節点)の中心度に関する議論は盛んに行われているが、周辺性に関してはほとんど議論されていない。しかしながら、第1節でも述べた通り、通信・交通などのネットワークの伸展時における(便益の大きさに応じて負担する)費用負担問題を考えた場合、中心性よりも、むしろ周辺性の概念が重要であると考えられる。一方で、ネットワークの耐故障性・耐攻撃性を考えた場合、節点の周辺性は、その節点を失うことに対する、他の節点間のネットワーク維持に関するロバスト性を表していると解釈することも可能である。

まず、ネットワーク上の、あるポジション(節点) $i \in N$ が、どのような特徴を有している際に周辺的であると考えられるのかについて考察する。ここでは、Freeman[10]の中心性に倣い、以下の3つの周辺性をあげる。

(Dp : degree peripherality) 直接コミュニケーションをとれる節点が少ない。

(Cp : closeness peripherality) 近い距離にある節点が少ない。

(Bp : betweenness peripherality) 多くの節点の対が i の助けなしに、互いにコミュニケーション可能。

ここでは、特に**(Bp)**の特徴に注目し(つまり、ある節点が周辺的であるとは、他の節点間でのコミュニケーションにおいて、その点が影響を及ぼさない程度合いとして考える)、ポジション(節点) $i \in N$ の $G=(N, L)$ における周辺度(peripherality degree) $P_i(G)$ を考える。つまり、周辺性の高い節点は、ネットワーク維持の観点から見て、耐故障性・耐攻撃性の高い節点であり、ネットワーク維持への貢献度が極めて低く、主にネットワークからの便益のみを享受する節点であると捉えることができる。

ここで、 $G=(N, L)$ に対する周辺度について、以下の公準を考える。

公準P-1(正規性) 任意の $i \in N$ に対して、

$$P_i(G(\{i\})) = 1$$

公準P-2(切断点0性) $i \in N$ が G における切断点ならば、

$$P_i(G) = 0$$

公準P-3(冗長性) 任意の $ij \in L$ に対して、 $G-ij$ が連結ならば、

$$P_k(G) = P_k(G-ij) \quad \forall k \in \{i, j\}$$

公準P-4(継承性) $G(N \setminus i)$ が連結ならば、任意の $j \in N \setminus i$ に対して、

$$P_i(G(N \setminus i) + ij) = \sum_{k \in N \setminus i} P_k(G(N \setminus i))$$

公準P-1は、1点集合 $N=\{i\}$ のときの周辺度を1と基準化するための条件である。公準P-2は、切断点の仲介無しには、コミュニケーションが成り立たない節点对(ついで)が存在するので**(Bp)**の意味で周辺性は0であることを要請している。公準P-3は、 $G-ij$ が連結ならば、コミュニケーションパス ij の存在は、 i 以外の節点間のコミュニケーションに全く影響を与えないということを要請している。公準P-4は、節点 $i \in N$ が、連結である $G(N \setminus i)$ (つまり、 i の助け無しに、相互コミュニケーションが成立するネットワーク)に対して、ある $j \in N \setminus i$ を通して接続した場合、その節点 $i \in N$ の周辺度を、「接続前のネットワーク $G(N \setminus i)$ における、すべてのポジションの持つ周辺性を継承したもの」として定義することを要請している(例えば、 $N'=\{1, \dots, n-1\}$ の節点からなる連結なネットワーク $G(N')$ に節点 n がリンク $\{n, 1\}$ を通して接続した場合、節点 n の周辺性を、「節点1のさらに周辺であ

り、加えて、節点2のさらに周辺でもあり、…、加えて、節点 $n-1$ のさらに周辺でもある」というニュアンスを表現したものである).

3.2 周辺度

定理3.1

任意の連結な無向グラフ $G=(N, L)$ に対して、 $\{P_i(G)\}_{i \in N}$ が、公準P-1, P-2, P-3, P-4を満たすとき、 $\{P_i(G)\}_{i \in N}$ は一意に定まり

$$P_i(G) = |\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n) = i\}| \quad (1)$$

と表される. ただし、 Π_G は、 G と両立する順序全体の集合とする. この $\{P_i(G)\}_{i \in N}$ をグラフ G の周辺度(peripherality degree)とよぶ.

証明 第6節に示す.

つまり、式(1)より、周辺度は、ある節点 i の助け無しに、 $N \setminus i$ のネットワークが構築できる機会の頻度を表していると言える. 実際、図1のネットワークの場合、表1より、

$$(P_1(G), P_2(G), P_3(G)) = (2, 0, 2)$$

となる. この場合は、 $P_2(G)=0$ は、2の存在なしに1, $3 \in N \setminus \{2\}$ の間のコミュニケーションが成り立たないことを示している.

次に、連結なネットワーク $G=(N, L)$ における各ポジション $i \in N$ の、 N の中での相対的な周辺度を表す概念として、相対周辺度を導入する.

定義3.2(相対周辺度) 周辺度 $\{P_i(G)\}_{i \in N}$ に対して、以下の $\{p_i(G)\}_{i \in N}$ を相対周辺度(relative peripherality degree)と呼ぶ:

$$p_i(G) := \frac{P_i(G)}{\sum_{j \in N} P_j(G)}$$

定義3.3(ネットワークポテンシャル) ネットワーク $G=(N, L)$ に対して、各ポジションの周辺度の総和(i.e., G に両立する順序の総数)

$$P(G) := \sum_{i \in N} P_i(G) (= |\Pi_G|)$$

を G のネットワークポテンシャルと呼ぶ. つまり、ネットワークポテンシャルは、ネットワーク G の可能な構成過程の総数を表している.

このネットワークポテンシャルの概念を通して、相対周辺度 $p_i(G)$ は、

$$p_i(G) = \frac{P_i(G)}{P(G)} \quad i \in N$$

と表される. また、公準P-4は、

$$P_i(G(N \setminus i) + ij) = P(G(N \setminus i)) \quad \forall j \in N \setminus i$$

となり、 $i \in N$ が連結なネットワーク $G(N \setminus i)$ に、ある $j \in N \setminus i$ を通して接続する場合、 $i \in N$ の周辺度は、 $G(N \setminus i)$ のネットワークポテンシャルを継承することになる.

4. 計算例

ここでは、図2および図3に示す節点数が5および4のすべての連結グラフ(同型のものを除く)に対する、それぞれの周辺度、相対周辺度の計算例を示す.

図2 節点数5の連結グラフ

図3 節点数4の連結グラフ

表2, 3に, 図2, 3における周辺度をそれぞれ示す(上段: 周辺度, 下段: 相対周辺度). 節点数が5の場合でも4の場合でも, 相対的に周辺性(相対周辺度)が最も高いのが, 線状グラフの端節点(g_{20} の3, 4および g_f の2, 3)であることがわかる.

表2 図2における周辺度

Graphs	node 1	node 2	node 3	node 4	node 5
g_1	24 (0.2)	24 (0.2)	24 (0.2)	24 (0.2)	24 (0.2)
g_2	20 (0.19)	20 (0.19)	24 (0.22)	20 (0.19)	24 (0.22)
g_3	14 (0.15)	20 (0.22)	20 (0.22)	14 (0.15)	24 (0.26)
g_4	16 (0.17)	20 (0.21)	20 (0.21)	20 (0.21)	20 (0.21)
g_5	8 (0.11)	20 (0.26)	14 (0.18)	14 (0.18)	20 (0.26)
g_6	14 (0.21)	14 (0.21)	14 (0.21)	24 (0.36)	0 (0)
g_7	20 (0.24)	12 (0.14)	20 (0.24)	20 (0.24)	12 (0.14)
g_8	20 (0.25)	14 (0.18)	16 (0.20)	16 (0.20)	14 (0.18)
g_9	0 (0.0)	14 (0.25)	14 (0.25)	14 (0.25)	14 (0.25)
g_{10}	14 (0.23)	12 (0.20)	14 (0.23)	20 (0.33)	0 (0)
g_{11}	14 (0.28)	8 (0.16)	0 (0)	20 (0.4)	8 (0.16)
g_{12}	16 (0.27)	8 (0.13)	14 (0.23)	14 (0.23)	8 (0.13)
g_{13}	16 (0.22)	12 (0.17)	16 (0.22)	16 (0.22)	12 (0.17)
g_{14}	0 (0)	12 (0.23)	12 (0.23)	14 (0.27)	14 (0.27)
g_{15}	8 (0.27)	0 (0)	0 (0)	14 (0.47)	8 (0.27)
g_{16}	8 (0.22)	0 (0)	14 (0.39)	14 (0.39)	0 (0)
g_{17}	8 (0.2)	8 (0.2)	8 (0.2)	8 (0.2)	8 (0.2)
g_{18}	8 (0.18)	12 (0.27)	8 (0.18)	16 (0.36)	0 (0)
g_{19}	0 (0)	12 (0.25)	12 (0.25)	12 (0.25)	12 (0.25)
g_{20}	0 (0)	0 (0)	8 (0.5)	8 (0.5)	0 (0)
g_{21}	0 (0)	12 (0.43)	8 (0.29)	8 (0.29)	0 (0)

表3 図3における周辺度

Graphs	node 1	node 2	node 3	node 4
g_a	6 (0.25)	6 (0.25)	6 (0.25)	6 (0.25)
g_b	6 (0.3)	6 (0.3)	4 (0.2)	4 (0.2)
g_c	4 (0.25)	4 (0.25)	4 (0.25)	4 (0.25)
g_d	4 (0.286)	6 (0.429)	4 (0.286)	0 (0)
g_e	4 (0.333)	4 (0.333)	4 (0.333)	0 (0)
g_f	0 (0)	4 (0.5)	4 (0.5)	0 (0)

5. ネットワークの安定性

ここでは, ネットワーク形成過程におけるネットワークの安定性について議論する.

まず, ある節点 $i \in N$ が, 他の節点 $j \in N$ との間にリンク ij を張るか否かの判断基準の1つとして, 「そのリンクを張ることによって, ネットワークから得られる実質の便益が上昇するのか否か」が考えられる. ここでは, 「ネットワークを構成することによって得られるネットワーク全体としての便益は, そのネットワークが連結か否かによって決定され, 各節点の享受する便益は, ネットワーク内で相対的なものである」という立場を取る. そのため, 3.2節で定義した周辺性(相対周辺度)を実質便益を表す1つの尺度として捉え, どのようなネットワークが安定であるかについて考察する.

定義5.1 (対(つ)い安定性) $G=(N, L)$ が次の2条件を満たすとき, $\{p_i(G)\}_{i \in N}$ に関して**対安定**(pairwise stable)であるという:

(i) 任意の $ij \in L$ に対して, $G-ij$ が連結であるとき,

$$p_k(G) \geq p_k(G-ij) \quad \forall k \in \{i, j\}.$$

(ii) 任意の $ij \in L^N \setminus L$ に対して,

$$p_i(G) < p_i(G+ij) \Rightarrow p_j(G) > p_j(G+ij).$$

条件(i)は, 直接のコネクションを持つポジション i, j から, そのコミュニケーションリンクである ij を除去しても, i, j 共に, 便益を上げることができない状況を表している. つまり, i, j の両者にとって, コネクションを解消する誘因が働かない状況である. 一方, 条件(ii)は, 直接のコネクションを持たない i と j の間に新たなコミュニケーションリンク ij を形成しようと考えた場合, 少なくとも一方にとって, それがデメリットになる状況を表している. よって, 双方の合意が得られず, ネットワークの冗長化が行われない状況である. つまり, G が対安定性の状態にあるとき, ネットワーク形成行動は均衡している状況にあると言える.

命題5.1 $G-ij$ が連結ならば,

$$p_k(G) < p_k(G-ij) \quad \forall k \in \{i, j\}.$$

証明 第6節に示す.

系5.1 $G=(N, L)$ が連結でかつ, $ij \in L^N \setminus L$ のとき,

$$p_k(G + ij) < p_k(G) \quad \forall k \in \{i, j\}.$$

定理5.1 連結な G が対安定であるための必要十分条件は、 G が木であることである。

証明 第6節に示す。

これにより、各節点が、本稿で定義された周辺性(相対周辺度)で表される実質便益に基づいてネットワーク形成行動をとる場合、ネットワークが木となるところで(対安定の意味で)均衡することがわかる。たとえば、周辺性に注目した場合に、節点数5のネットワーク(図2)において対安定となるのは、 g_{19} , g_{20} , g_{21} であり、節点数4のネットワーク(図3)において対安定となるのは、 g_e , g_f であることがわかる。

6. 定理・命題の証明

6.1 定理3.1の証明

6.1.1 定理3.1の一貫性部分の証明

$|N| = 1$, (i.e., $G = (N, L)$, $N = \{1\}$, $L = \emptyset$) のとき、公準P-1(正規性)より、直ちに

$$P_1(G) = 1 \quad (2)$$

が導かれる。

$|N| = n \geq 2$ のとき、 $i \in N$ について、以下の2つの場合に分けて考える。

Case A: $G(N \setminus i)$ が非連結, (i.e., i が G における切断点)。

Case B: $G(N \setminus i)$ が連結。

Case A の場合、公準P-2(切断点0性)により、直ちに、 $P_i(G) = 0$ が導かれる。

Case B の場合、公準P-4(継承性)により、

$$P_i(G(N \setminus i) + ij) = \sum_{k \in N \setminus i} P_k(G(N \setminus i)) \quad \forall j \in a^G(i) \quad (3)$$

が導かれる。ただし、 $a^G(i) := \{j \in N \setminus i \mid ij \in L\}$ 。とする。加えて、公準P-3(冗長性)により、

$$P_i(G(N \setminus i) + ij) = P_i(G(N \setminus i) + \sum_{k \in a^G(i)} ik) = P_i(G) \quad (4)$$

が導かれる。よって(3)および(4)から、

$$P_i(G) = \sum_{k \in N \setminus i} P_k(G(N \setminus i)) \quad (5)$$

が導かれる。

それゆえ、 $P_i(G)$ は、 $|N|$ に関して帰納的に一意に定まることがわかる。□

6.1.2 定理3.1の表現部分の証明

ここでは、 $P_i(G)$ が

$$P_i(G) = |\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n) = i\}|$$

によって表されることを示す。ただし、 Π_G は G と両立する順序(順列)すべての集合とする。

$|N| = 1$, (i.e., $G = (N, L)$, $N = \{1\}$, and $L = \emptyset$) のとき、 Π_G は $\pi(1) = 1$ なる順列 π のみからなる単集合である。それゆえ、式(2)より、

$$|\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(1) = 1\}| = 1 = P_1(G)$$

が導かれる。

$|N| \geq 2$ のとき、任意の $i, j \in N (i \neq j)$ に対して、

$$P_j(G(N \setminus i)) = |\{\pi \in \Pi_{G(N \setminus i)} \mid \pi(n-1) = j\}|$$

が成り立つと仮定する。はじめに、 $G(N \setminus i)$ が非連結となるような $i \in N$ (i.e., i は、 G の切断点であり、 $P_i(G) = 0$) について考える。このとき、任意の $\pi(n) = i$ となるような N 上の順列に対して、

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} \{\pi(j)\} = N \setminus i$$

は非連結となる。よって、

$$|\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n) = i\}| = |\emptyset| = 0 = P_i(G)$$

が成り立つ。次に、 $G(N \setminus i)$ が連結となるような $i \in N$ に対して、

$$\begin{aligned} & |\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n) = i\}| \\ &= |\bigcup_{j \in N \setminus i} \{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n-1) = j, \pi(n) = i\}| \\ &= \sum_{j \in N \setminus i} |\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n-1) = j, \pi(n) = i\}| \\ &= \sum_{j \in N \setminus i} |\{\pi \in \Pi_{G(N \setminus i)} \mid \pi(n-1) = j\}| \\ &= \sum_{j \in N \setminus i} P_j(G(N \setminus i)) \\ &= P_i(G) \quad \text{from (5).} \end{aligned}$$

それゆえ、任意の $i \in N$ に対して、

$$P_i(G) = |\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n) = i\}|$$

が成り立つ。□

6.2 第5節の定理・命題の証明

補題6.1

$$\sum_{i \in N} P_i(G) = |\Pi_G|.$$

証明 G が非連結のとき、 $P_i(G) = 0 \forall i \in N$ であり、 $\Pi_G = \emptyset$ なので、明らか。 G が連結のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} P_i(G) &= \sum_{i \in N} |\{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n) = i\}| \\ &= |\bigcup_{i \in N} \{\pi \in \Pi_G \mid \pi(n) = i\}| \\ &= |\Pi_G|. \quad \square \end{aligned}$$

補題6.2 $G = (N, L)$ が連結であり、 $ij \in L$ のとき、

$$\Pi_G \supsetneq \Pi_{G-ij}.$$

証明 $\Pi_G \supsetneq \Pi_{G-ij}$ は明らかなので、

$$\exists \pi \in \Pi_G \quad \text{s.t.} \quad \pi \notin \Pi_{G-ij}$$

が言えればよい。 $G-ij$ が連結でない場合は、 $\Pi_{G-ij} = \emptyset$ なので明らか。 $G-ij$ が連結のとき、 j は任意の $k \in N \setminus \{j\}$ に対して到達可能であるので、 $\pi'(1) = j$ なる $\pi' \in \Pi_{G-ij}$ が存在する。このとき、 $\pi'(m) = i$ なる m を通して、

$$\pi(l) = \begin{cases} i & \text{if } l = 1 \\ \pi'(l-1) & \text{if } 2 \leq l \leq m \\ \pi'(l) & \text{if } l > m \end{cases}$$

とすると、 $\pi \in \Pi_G$ かつ $\pi \notin \Pi_{G-ij}$ となる。 $\square$

6.2.1 命題5.1の証明

$G-ij$ が連結なので、公準P-3より、

$$P_k(G) = P_k(G-ij) \quad \forall k \in \{i, j\}.$$

このとき、相対周辺度の定義と補題6.1, 6.2より、任意の $k \in \{i, j\}$ に対して、

$$\begin{aligned} p_k(G) &= \frac{P_k(G)}{\sum_{l \in N} P_l(G)} \\ &= \frac{P_k(G)}{|\Pi_G|} \\ &< \frac{P_k(G-ij)}{|\Pi_{G-ij}|} \\ &= p_k(G-ij) \quad \square \end{aligned}$$

6.2.2 定理5.1の証明

$G = (N, L)$ が木であるとする。このとき、任意の $ij \in L$ に対して、 $G-ij$ は非連結となる。よって、定義5.1の条件(i)は満足する。また、系5.1より、定義5.1の条件(ii)も満足する。それゆえ、 $G = (N, L)$ が木であるとき、 G は対安定である。一方、 $G = (N, L)$ が木でないとする。このとき、 $G-ij$ が連結となる $ij \in L$ が存在する。この $ij \in L$ を、命題5.1に適用すると、定義5.1の条件(i)を満たさない。よって、 $G = (N, L)$ が木でないとき、 G は対安定ではない。つまり、 G が対安定であるとき、 G は木となる。 $\square$

7. まとめと将来の展望

本稿では、ネットワークにおける各ポジション(節点)に対する周辺性の概念について議論し、これに基づくネットワーク形成とその安定性について考察した。また、本稿では、連結な無向グラフで表されるネットワークについてのみ議論したが、今後、有向グラフで表されるネットワーク、コミュニケーションの強さも考慮に入れた重み付き有向グラフ等への一般化も考えられる。また、一方で、グラフの各ノードに対するパワーインデックスに基づくコミュニケーションゲームの解(ハルサニ解)[13]への応用も考えられる。

謝辞

本研究は科研費(基盤研究(C)22510134)の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] E. O. Laumann and T. U. Pappi. *Networks of collective action*. Academic Press, New York, 1976.
- [2] R. S. Burt. *Toward a structural theory of action*. Academic Press, New York, 1982.
- [3] K. S. Cook and et. al. The distribution of power in exchange networks : Theory and experimental results. *Journal of Sociology*, 89 : 275-305, 1983.
- [4] P. M. Blau. *The Dynamics of Bureaucracy: A study of interpersonal relations in two government agencies*. University of Chicago Press, Chicago, 1963.
- [5] M. S. Granovetter. *Getting a job : a study of contacts and careers*. University Of Chicago Press, 1995.
- [6] J. S. Coleman and H. Menzel E. Katz. *Medical innovation : A diffusion study*. Bobbs-Merrill, Indianapolis, 1966.
- [7] P. Mariolis. Interlocking directorates and control of corporations: The theory of bank control. *Social Science Quarterly*, 56 : 425-439, 1975.
- [8] D. S. Sade. Sociometricss of macacamulattai: linkages and cliques in grooming networks. *Folia Primatologica*, 18 : 196-223, 1972.
- [9] F. R. Pitts. The medieval river trade network of russia

- revisited. *Social Networks*, 1 : 285–292, 1979. (2012年1月17日 受付)
- [10] L. C. Freeman. Centrality in networks: conceptual classification. *Social Networks*, 1 : 215–239, 1979. (2012年3月7日 採録)
- [11] P. Bonacich. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of mathematical sociology*, 2 : 113–120, 1972.
- [12] S. P. Borgatti and M. G. Everett. A graph-theoretic perspective on centrality. *Social Networks*, 28 : 466–484, 2006.
- [13] R. Brink, G. Laan, and V. Pruzhansky. Harsanyi power solutions for graph-restricted games. *International journal of game theory*, 40 : 87–110, 2011.

[問い合わせ先]

〒960-1296 福島市金谷川1
 福島大学 共生システム理工学類
 藤本 勝成
 TEL : 024-548-8436
 FAX : 024-548-8436
 E-mail : fujimoto@sss.fukushima-u.ac.jp

著者紹介

ふじもと かつしげ
 藤本 勝成 [正会員]

1995年東京工業大学総合理工学研究科システム科学専攻博士後期課程修了, 博士(理学), 1995年東北大学大学院工学研究科都市・建築学専攻助手, 1999年福島大学経済学部助教授, 現在, 福島大学共生システム理工学類准教授. ファジィ測度, 協力ゲーム等, 非加法的集合関数に関する研究, ならびに, 鋼材の劣化度非破壊検査に関する研究に従事. 日本知能情報ファジィ学会, 日本建築学会の会員.

Network - formation and its stability based on peripherality of nodes in social networks by

Katsushige FUJIMOTO

Abstract :

Centrality is a core concept in the field of network analysis and, therefore, much discussion is concerned with the centrality of each position (node) and less with peripherality. However, we can see that peripheral nodes are faced with a heavier burden than central nodes when expanding telecommunications, transportation, or other networks. Therefore, it is important to discuss the notion of peripherality. Peripherality measures would provide a solution for cost burden problems in such situations. In this paper, we propose a new peripherality measure axiomatically. Moreover, pairwise stability of networks is also discussed.

Keywords : peripherality measure, compatible order, social network analysis, pairwise stability

Contact Address : **Katsushige FUJIMOTO**

College of Symbiotic Systems Science, Fukushima University
 1, Kanayagawa, Fukushima-shi, 960-1296, JAPAN
 TEL : 024-548-8436
 FAX : 024-548-8436
 E-mail : fujimoto@sss.fukushima-u.ac.jp