解説

ファジィ数Ⅳ[†]

稲井田 次郎*

9. 区間数列

各項が区間数で表される数列，区間数列

$$I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$$

について考える．区間数列 $\{I_n\}$ が1つの区間数 I に収束するとは，任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N が存在して， $n > N$ なるすべての n に対して， $\rho_H(I_n, I) < \epsilon$ が成立するときをいう．この I を区間数列 $\{I_n\}$ の極限值といい

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$$

と書く．

収束しない区間数列は発散するという．

定理7 区間数列に関するコーシーの判定条件

区間数列 $\{I_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N が存在して， $m, n > N$ なるすべての m, n に対して， $\rho_H(I_m, I_n) < \epsilon$ が成立することである．

(証明)

必要条件 $\{I_n\}$ が I に収束しているとすれば，任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N を選ぶと

$$\rho_H(I_n, I) < \epsilon/2, \quad n > N$$

ゆえに， $m, n > N$ ならば

$$\begin{aligned} \rho_H(I_m, I_n) &\leq \rho_H(I_m, I) + \rho_H(I, I_n) \\ &= \rho_H(I_m, I) + \rho_H(I, I_n) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

十分条件

$$I_n = [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \dots$$

とおけば，任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N が存在して， $m, n > N$ なるすべての m, n に対して

$$\rho_H(I_m, I_n) = |a_m - a_n| \vee |b_m - b_n| < \epsilon, \quad m, n > N$$

が成立する．よって

$$|a_m - a_n| < \epsilon, \quad m, n > N$$

したがって，実数列に関するコーシーの判定条件により，数列 $\{a_n\}$ はある定数 a_0 に収束する．同様に，数列 $\{b_n\}$ はある定数 b_0 に収束する．

$$a_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

より

$$a_0 \leq b_0$$

したがって， $\{I_n\}$ は区間数 $I[a_0, b_0]$ に収束する．

□

注41 実数列に関するコーシーの判定条件

実数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N が存在して， $m, n > N$ なるすべての m, n に対して， $|a_m - a_n| < \epsilon$ が成立することである．

10. ファジィ数列

各項がファジィ数で表される数列，ファジィ数列

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

について考える．ファジィ数列 $\{u_n\}$ が1つのファジィ数 u に収束するとは，任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N が存在して， $n > N$ なるすべての n に対して， $\rho(u_n, u) < \epsilon$ が成立するときをいう．この u をファジィ数列 $\{u_n\}$ の極限值といい

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

と書く．

収束しないファジィ数列は発散するという．

Lemma 14 ファジィ数列 $\{u_n\}$ が収束すれば，その極限值は一意に定まる．

(証明)

収束するファジィ数列 $\{u_n\}$ の2つの極限值を u, v とする．このとき，任意の正数 ϵ に対して，ある番号 N が存在して， $n > N$ なるすべての n に対して

$$\rho(u_n, u) < \epsilon/2, \quad \rho(u_n, v) < \epsilon/2$$

が成立する．よって

[†] Fuzzy Numbers IV
Jiro INAIDA

* 日本大学理工学部
College of Science and Technology, Nihon University

$$\begin{aligned}\rho(u, v) &\leq \rho(u, u_n) + \rho(u_n, v) \\ &= \rho(u_n, u) + \rho(u_n, v) \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

ここで、 ϵ は任意であるから、 $\rho(u, v) = 0$ である。すなわち、 $u = v$ が成立する。□

Lemma 15 ファジィ数列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ がそれぞれ u, v に収束する。このとき

- 1) 任意の実数 k に対し、 $\{ku_n\}$ は ku に収束する。
- 2) $\{u_n + v_n\}$ は $u + v$ に収束する。

(証明)

1) $k = 0$ のとき

$$ku_n = 0 \cdot u_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

となる。したがって、このファジィ数列はすべての項が0となり、0に収束する。

次に、 $k \neq 0$ の場合を考える。 $\{u_n\}$ は u に収束するから、任意の正数 ϵ に対して、

$$\rho(u_n, u) < \epsilon/|k|$$

が成立する。よって

$$\rho(ku_n, ku) = |k|\rho(u_n, u) < \epsilon$$

すなわち、 $\{ku_n\}$ は ku に収束する。

2) ファジィ数列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ がそれぞれ u, v に収束するから、任意の正数 ϵ に対して、ある番号 N が存在して、 $n > N$ なるすべての n に対して

$$\rho(u_n, u) < \epsilon/2, \quad \rho(v_n, v) < \epsilon/2$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned}\rho(u_n + v_n, u + v) &\leq \rho(u_n + v_n, u + v_n) + \rho(u + v_n, u + v) \\ &= \rho(u_n, u) + \rho(v_n, v) \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

すなわち、 $\{u_n + v_n\}$ は $u + v$ に収束する。□

Lemma 16 ファジィ数列 $\{u_n\}$ が収束すれば、区間数列 $\{[u_n]^\alpha\}$ は $\alpha \in [0, 1]$ に関して一様収束する。

(証明)

$\{u_n\}$ が u に収束すると仮定すれば、任意の正数 ϵ に対して、ある番号 N が存在して、 $n > N$ なるすべての n に対して

$$\rho(u_n, u) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u_n]^\alpha, [u]^\alpha) < \epsilon$$

よって

$$\rho_H([u_n]^\alpha, [u]^\alpha) < \epsilon, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

すなわち、 N は α に無関係に選べるから、 $\{[u_n]^\alpha\}$ は $\alpha \in [0, 1]$ に関して一様収束する。□

注42 Lemma 16より、各区間数列 $\{[u_n]^\alpha\}$ が収束しても、 $\alpha \in [0, 1]$ に関して一様収束しなければ、ファジィ

数列 $\{u_n\}$ は収束しない。

例21 各項のメンバーシップ関数が

$$(u_n)(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられているファジィ数列 $\{u_n\}$ を考える。 u_n のメンバーシップ関数のグラフを図19で示す。

図19 第 n 項 u_n のメンバーシップ関数のグラフ

それらの α -レベル集合は

$$[u_n]^\alpha = \begin{cases} [0, 1], & 0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{1}{n} \\ [\frac{1}{2}, 1], & 1 - \frac{1}{n} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

したがって、極限をとることにより

$$P_\alpha = \begin{cases} [0, 1], & 0 \leq \alpha < 1 \\ [\frac{1}{2}, 1], & \alpha = 1 \end{cases}$$

となるから、 $\{[u_n]^\alpha\}$ は $\alpha \in [0, 1]$ に関して収束するが、一様収束ではない。よって、このファジィ数列 $\{u_n\}$ は収束しない。

逆に、ファジィ数列 $\{u_n\}$ において、各区間数列 $\{[u_n]^\alpha\}$ が $\alpha \in [0, 1]$ に関して一様収束すれば、 $\{u_n\}$ は収束し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap \lim_{n \rightarrow \infty} [u_n]^\alpha) \quad (27)$$

が成立する。すなわち、式(27)によってファジィ数列の収束の表現ができる。

式(27)の右辺がファジィ数である証明

各 $\alpha \in [0, 1]$ に対して, 区間数列 $\{[u_n]^\alpha\}$ の極限値を P_α とする.

1) 区間数列の極限値も区間数である. よって,

$\{[u_n]^\alpha\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ の極限値 P_α も空でない有界閉区間である.

2) $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ならば

$$[u_n]^{\alpha_1} \supset [u_n]^{\alpha_2}, n = 1, 2, \dots$$

であるから

$$P_{\alpha_1} \supset P_{\alpha_2}$$

3) 単調増加な正数列 $\{\alpha_n\}$ が $\alpha \in (0, 1]$ に収束するとする. このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P_{\alpha_n} = P_\alpha$$

が成立することを示せばよい.

各 u_m はファジィ数であるから

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [u_m]^{\alpha_n} = [u_m]^\alpha$$

ゆえに

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \lim_{m \rightarrow \infty} [u_m]^\alpha \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [u_m]^{\alpha_n} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (u_m)_-(\alpha_n), \lim_{n \rightarrow \infty} (u_m)_+(\alpha_n) \right] \\ &= \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_m)_-(\alpha_n) \right), \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_m)_+(\alpha_n) \right) \right] \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m)_-(\alpha_n) \right), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m)_+(\alpha_n) \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m)_-(\alpha_n), \lim_{m \rightarrow \infty} (u_m)_+(\alpha_n) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} [u_m]^{\alpha_n} \right) \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} P_{\alpha_n} \end{aligned}$$

したがって, 定理4よりただ1つのファジィ数 u が存在して

$$[u]^\alpha = P_\alpha, \alpha \in (0, 1]$$

$$[u]^0 \subset P_0$$

を満たす. 最後に

$$[u]^0 = P_0$$

を示す.

$[u]^0 \subsetneq P_0$ ならば, $[u]^0, P_0$ は有界閉区間であるから

$$[a_0, b_0] \subset P_0, [a_0, b_0] \cap [u]^0 = \phi$$

なる有界閉区間 $[a_0, b_0]$ が存在する. また

$$[u]^0 = \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [u]^\alpha$$

であるから

$$[a_0, b_0] \cap [u]^\alpha = \phi, 0 < \alpha \leq 1$$

$[u]^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_n]^\alpha$ は, $\alpha \in [0, 1]$ に関して一様収束だから, 有界閉区間 $[a_1, b_1] (\subset [a_0, b_0])$ を適当に選べば, 十分大きい番号 N が存在して

$$[a_1, b_1] \cap [u_n]^\alpha = \phi, n > N, 0 < \alpha \leq 1 \quad (28)$$

一方

$$P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_n]^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [u_n]^\alpha$$

が成立し, $[a_1, b_1] \subset P_0$ であるから, 式(28)に矛盾する. したがって

$$[u]^0 = P_0$$

である. 以上のことからファジィ数列 $\{u_n\}$ は収束し

$$[u]^\alpha = P_\alpha, \alpha \in [0, 1]$$

である. $\square$

注43 二重数列に関する収束の十分条件

$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = b_n$ が存在して, しかも $a_{m,n}$ が n に関して一様に b_n に収束し, かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$ が存在するならば, $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n}$ が存在して, それは ℓ に等しい. したがって, もし $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} = c_m$ が存在すれば, $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m$ も存在して, それは ℓ に等しい.

$$\text{例22} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{n} \right)^n = e^u, u \in E^1$$

(証明) 任意の $u \in E^1$ に対し

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{u}{n} \right)^\alpha &= \left(\left[1 + \frac{u}{n} \right]^\alpha \right)^n \\ &= \left(1 + \frac{[u]^\alpha}{n} \right)^n \end{aligned}$$

が各 $\alpha \in [0, 1]$ に関して成立する. いま, $[u]^\alpha = [a, b]$ とおけば, 十分大きい n に対して

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{[a, b]}{n} \right)^n &= \left[1 + \frac{a}{n}, 1 + \frac{b}{n} \right]^n \\ &= \left[\left(1 + \frac{a}{n} \right)^n, \left(1 + \frac{b}{n} \right)^n \right] \end{aligned}$$

ここで極限をとれば, 上式は

$$[e^a, e^b] = e^{[a, b]} = e^{[u]^\alpha}$$

に収束し

$$[e^u]^\alpha = e^{[u]^\alpha}, \alpha \in [0, 1]$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u}{n} \right)^n = e^u, u \in E^1$$

が成立する. $\square$

$$\text{注44} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x, x \in R$$

$$\text{例23} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin ku}{k} = u, u \in E^1$$

(証明) 任意の $u \in E^1$ に対し

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sin ku}{k}\right]^\alpha &= \frac{1}{k}[\sin ku]^\alpha \\ &= \frac{1}{k}\sin[ku]^\alpha \\ &= \frac{1}{k}\sin k[u]^\alpha \end{aligned}$$

が各 $\alpha \in [0, 1]$ に関して成立する. いま, $[u]^\alpha = [a, b]$ とおく.

i) $k > 0$ の場合

十分小さい k に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\sin k[a, b] &= \frac{1}{k}\sin[ka, kb] \\ &= \frac{1}{k}[\sin ka, \sin kb] \\ &= \left[\frac{1}{k}\sin ka, \frac{1}{k}\sin kb\right] \end{aligned}$$

ここで極限をとれば, 上式は

$$[a, b] = [u]^\alpha$$

に収束し

$$\lim_{k \rightarrow +0} \frac{\sin ku}{k} = u, \quad u \in E^1$$

が成立する.

ii) $k < 0$ の場合

十分小さい k に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\sin k[a, b] &= \frac{1}{k}\sin[kb, ka] \\ &= \frac{1}{k}[\sin kb, \sin ka] \\ &= \left[\frac{1}{k}\sin ka, \frac{1}{k}\sin kb\right] \quad (\because \frac{1}{k} < 0) \end{aligned}$$

ここで極限をとれば, 上式は

$$[a, b] = [u]^\alpha$$

に収束し

$$\lim_{k \rightarrow -0} \frac{\sin ku}{k} = u, \quad u \in E^1$$

が成立する.

i), ii) より

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin ku}{k} = u, \quad u \in E^1$$

が成立する. $\square$

注45

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{k} = x, \quad x \in R$$

定理 8 ファジィ数列に関するコーシーの判定条件

ファジィ数列 $\{u_n\}$ が収束するための必要十分条件は, 任意の正数 ϵ に対して, ある番号 N が存在して, $m, n > N$ なるすべての m, n に対して, $\rho(u_m, u_n) < \epsilon$ が成立することである.

(証明)

必要条件 $\{u_n\}$ が u に収束しているとすれば, 任意の正数 ϵ に対して, ある番号 N を選ぶと

$$\rho(u_n, u) < \epsilon/2, \quad n > N$$

ゆえに, $m, n > N$ ならば

$$\begin{aligned} \rho(u_m, u_n) &\leq \rho(u_m, u) + \rho(u, u_n) \\ &= \rho(u_m, u) + \rho(u_n, u) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

十分条件 任意の正数 ϵ に対して, ある番号 N が存在して, $m, n > N$ なるすべての m, n に対して

$$\rho(u_m, u_n) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \rho_H([u_m]^\alpha, [u_n]^\alpha) < \epsilon$$

が成立すれば

$$\rho_H([u_m]^\alpha, [u_n]^\alpha) < \epsilon, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

したがって, 区間数列 $\{[u_n]^\alpha\}$ は $\alpha \in [0, 1]$ に関して一様収束するから, ファジィ数列 $\{u_n\}$ は収束する. $\square$

Lemma 17 ファジィ数列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ がそれぞれ u, v に収束する. このとき, 各 $u_n - v_n$ が存在すれば, $\{u_n - v_n\}$ は $u - v$ に収束する.

(証明)

$\{u_n\}, \{v_n\}$ は収束するから, 前定理より, 任意の正数 ϵ に対して, ある番号 N が存在して, $m, n > N$ なるすべての m, n に対して

$$\rho(u_m, u_n) < \epsilon/2, \quad \rho(v_m, v_n) < \epsilon/2$$

よって

$$\begin{aligned} &\rho(u_m - v_m, u_n - v_n) \\ &= \rho(u_m + v_n, u_n + v_m) \\ &\leq \rho(u_m + v_n, u_n + v_n) + \rho(u_n + v_n, u_n + v_m) \\ &= \rho(u_m, u_n) + \rho(v_m, v_n) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

したがって, 前定理より $\{u_n - v_n\}$ は収束する. その極限値を w とすれば, Lemma 15 2) より, 数列 $\{(u_n - v_n) + v_n\} = \{u_n\}$ は

$$w + v = u$$

に収束する. すなわち

$$w = u - v$$

$\square$

11. ファジィ級数

実関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で解析的であるというのは, $f(x)$ が x_0 の近傍で $x - x_0$ のべき級数で表されることである. この関数 f の定義域を複素数平面 C に延長したとき, 複素関数 $f(z)$ が z_0 の近傍で解析的であるというのは, $z - z_0$ のべき級数で表されることと定義できる. この意味で, 解析性は定義域を実数集合から複素数平面に延長しても, 保存されることが分っている. この関数 f の定義域をファジィ数空間に延長した

とき、解析性がどうなるかは1つの問題である。

各項がファジィ数で表される級数

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (k_n \otimes u_n) \quad (u_0 \text{ は } 1 \text{ とする}) \\ = (k_0 \otimes u_0) \oplus (k_1 \otimes u_1) \oplus (k_2 \otimes u_2) \oplus \cdots \oplus (k_n \otimes u_n) \oplus \cdots \end{aligned}$$

をファジィ級数という。ここで、 k_n を実数、 $\otimes, \oplus$ を形式的な演算とする。

この級数の第 n 部分和を

$$v_n = (k_0 \otimes u_0) \oplus (k_1 \otimes u_1) \oplus (k_2 \otimes u_2) \oplus \cdots \oplus (k_n \otimes u_n)$$

とおく。ただし

$$\begin{aligned} v_0 &= k_0 \otimes u_0 = k_0, \\ v_1 &= v_0 \oplus (k_1 \otimes u_1) = \begin{cases} k_0 + k_1 u_1, & k_1 \geq 0 \\ k_0 - |k_1| u_1, & k_1 < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

のようにし、一般には

$$v_n = v_{n-1} \oplus (k_n \otimes u_n) = \begin{cases} v_{n-1} + k_n u_n, & k_n \geq 0 \\ v_{n-1} - |k_n| u_n, & k_n < 0 \end{cases}$$

とおく。

ファジィ級数 $\sum (k_n \otimes u_n)$ がファジィ数 u に収束するとは、第 n 部分和 v_n がすべて存在し、ファジィ数列 $\{v_n\}$ が u に収束するときをいう。ファジィ級数が収束しないとき、発散するという。

例えば、 $k_0 = 0, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3, \dots$ とすれば、

$$u_1 + 2u_2 - 3u_3 + \cdots$$

となる。 $u_1 = [0, 1], u_2 = [-1, 1], u_3 = [1, 3]$ ならば、

$$v_1 = u_1 = [0, 1]$$

$$v_2 = v_1 + 2u_2 = [0, 1] + 2[-1, 1] = [-2, 3]$$

となり、 v_2 は存在するが、

$$v_3 = v_2 - 3u_3 = [-2, 3] - 3[1, 3]$$

$$= [-2, 3] - [3, 9]$$

であるから、 v_3 は存在しない。よって、このファジィ級数は発散する。

ファジィ級数の収束の定義およびファジィ数列の収束に関する表現式(27)から、つぎのLemmaが成立する。

Lemma 18 ファジィ級数 $\sum (k_n \otimes u_n)$ が収束する必要十分条件は、第 n 部分和からなるファジィ数列 $\{v_n\}$ がすべて存在、 $\{\{v_n\}^\alpha\}$ が $\alpha \in [0, 1]$ に関して一様収束することである。

このLemmaより、ファジィ級数の収束を次式で表現することができる：

$$\sum (k_n \otimes u_n) = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (\alpha^* \cap \lim_{n \rightarrow \infty} [v_n]^\alpha) \quad (29)$$

ただし、右辺の極限は $\alpha \in [0, 1]$ に関する一様収束とする。

ファジィ級数の特別なものとして、次のファジィベキ級数がある：

$$\sum (k_n \otimes (u - x_0)^n)$$

いま、実関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で解析的、すなわちテーラー展開可能とする：

$$f(x) = P_f(x; x_0)$$

$$= \sum k_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r \quad (30)$$

ただし、 r は収束半径である。

このとき、収束半径 r より小さい正数 r_1 が存在して

$$0 \leq x - x_0 \leq r_1 < r$$

において $f(x)$ は単調である。 $f(x)$ がそこで単調増加ならば、ある正数 $\delta (\leq r_1)$ が存在して

$$0 \leq u - x_0 \leq \delta \leq r_1$$

なるすべてのファジィ数 u に対して、 $f(u)$ はテーラー展開可能で

$$f(u) = P_f(u; x_0)$$

であり、単調減少ならば、同様な範囲において

$$f(u) = (-1)P_{-f}(u; x_0)$$

が成立する。ここで、 $f(u)$ は $f(x)$ の定義域を拡張原理によりファジィ数空間 E^1 に拡張して得られるファジィ写像である。

注46 $f(x)$ が $[x_0, x_0 + r_1]$ で単調増加であっても、必ずしもその範囲で式(30)の x を u に置換えることはできない。一般に

$$[x_0, x_0 + \delta] \subset [x_0, x_0 + r_1]$$

なる範囲で置換え可能である(図20を参照)。

図20 $f(x)$ のテーラー展開がファジィ数で置換え可能な範囲

いくつか例を挙げてみる。

例24

$$1) e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + \cdots, \quad u \geq 0$$

$$2) \sin u = u - \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{5!}u^5 - \cdots, \quad -\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$$

$$3) \cos u = (-1)((-1) + \frac{1}{2!}u^2 - \frac{1}{4!}u^4 + \cdots),$$

$$0 \leq u \leq \sqrt{6}$$

- 4) $\tan u = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{15}u^5 + \dots, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$
 5) $\kappa(u) = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^{n-1} + \dots, 0 \leq u < 1$
 ただし, $\kappa(x) = \frac{1}{1-x}$
 6) $\log(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \dots, 0 \leq u \leq 1$
 7) $\sin^{-1} u = u + \frac{1}{6}u^3 + \frac{3}{40}u^5 + \dots, -1 \leq u \leq 1$
 8) $\tan^{-1} u = u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 - \dots, -1 \leq u \leq 1$

注47 例24 1)において, 条件 $u \geq 0$ ははずせない.
 $u = [-1, 0]$ のとき,

$$u^2 = [0, 1], u^3 = [-1, 0], u^4 = [0, 1], \dots$$

より,

$$\begin{aligned} v_{2n} &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \dots + \frac{1}{2n!}u^{2n} \\ &= [1 + (-1) - \frac{1}{3!} - \dots, 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{2n!}] \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{2n} = [1 - \sinh 1, \cosh 1]$$

一方

$$e^{[-1, 0]} = [\frac{1}{e}, 1]$$

すなわち, 関数値と級数の極限值が一致しない.

注48 例24 1)において, 条件 $u \geq 0$ は, いわゆる右辺のテーラー展開の収束域ではない.

例えば, $u = [-1, 2]$ は, 条件 $u \geq 0$ からはずれているが

$$e^{[-1, 2]} = [e^{-1}, e^2]$$

となり, 一方

$$\begin{aligned} &1 + [-1, 2] + \frac{1}{2!}[-1, 2]^2 + \dots + \frac{1}{n!}[-1, 2]^n + \dots \\ &= 1 + [-1, 2] + \frac{1}{2!}[(-1)^2, 2^2] + \dots + \frac{1}{n!}[(-1)^n, 2^n] + \dots \\ &= [1 + (-1) + \frac{1}{2!}(-1)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(-1)^n + \dots, \\ &\quad 1 + 2 + \frac{1}{2!}2^2 + \dots + \frac{1}{n!}2^n + \dots] \\ &= [e^{-1}, e^2] \end{aligned}$$

となつて, テーラー展開可能である.

注49 実関数 $f(x)$ が $x = 0$ で解析的, かつ奇関数であれば, $f(u)$ は $[-\delta, \delta]$ の範囲でテーラー展開可能である.

たとえば, 正弦関数は

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots, -\infty < x < \infty$$

のようにテーラー展開され, $[-\pi/2, \pi/2]$ で単調増加である. この右辺において, x を u に置換え最初の2項をとると

$$u - \frac{1}{3!}u^3$$

となる. これに

$$u = [a, b], a \leq b$$

を代入すれば

$$u - \frac{1}{3!}u^3 = [a, b] - [\frac{1}{6}a^3, \frac{1}{6}b^3]$$

であり, このファジィ数の差が存在するためには

$$a - \frac{1}{6}a^3 \leq b - \frac{1}{6}b^3$$

が成立しなければならない. したがって

$$-\sqrt{2} \leq a \leq b \leq \sqrt{2}$$

を得る. すなわち, 条件

$$u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

を満たす u に対し, 例24 2)の右辺の級数における各段階のファジィ数の差は存在し, この展開式が成立する.

注50 余弦関数は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots, -\infty < x < \infty$$

のようにテーラー展開される. この右辺において, 単に x を u に置換えると

$$1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}u^4 - \dots$$

となるが, u が実数でない限り, 第2部分 v_2

$$1 - \frac{1}{2!}u^2$$

は存在せず, この級数は発散する. そこで, $(-\cos)(x)$ のテーラー展開

$$(-\cos)(x) = -1 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \dots, -\infty < x < \infty$$

を考え, x を u に置換え, その後, 両辺を -1 倍して, 例24 2)のテーラー展開を得ている.

12. あとがき

学会誌「知能と情報」への「ファジィ数」の連載が決まり, 堀内清光先生に相談するため甲南大学に赴いたのは, 昨年の夏のことでした. 長年, ハルビン工業大学の呉從焄先生の参考文献[1][2]に沿ってファジィ数学を研究していたので, それに基づいて連載をまとめたいと堀内先生に申しました. それに対し, 先生は折角の解説だから自分独自の考えを主張すべきとのこと意見を述べられました. 瞬時に思いついたのは, 呉先生が[1]の中で, ここでのファジィ数の定義は「すべての α -カットが空でない有界閉区間であるようなファジィ集合」と同値であると示唆されていることと, 水本雅晴先生が「ファジィ数の演算は α -カットを用いて表現できる」(参考文献[4])と仰っていることの2つでした.

帰京後, 早速「ファジィ数を α -カットを用いて表現する」を基本原則として, ファジィ数間の距離・順序, ファジィ数の演算, ファジィ写像, ファジィ数列, ファジィ級数をまとめたのが, ファジィ数Ⅰ～Ⅳです.

同連載において, 数学の様々な概念を使用していますが, それらは注としてまとめています. ファジィ数の α -カットにおいて $[u]^0$ は閉包を用いて

$$[u]^0 = \{x \in R \mid u(x) > 0\}$$

のように定義しています。これを

$$[u]^0 = \{x \in R \mid u(x) \geq 0\}$$

とする定義もあります。この場合、 $[u]^0$ は常に無限区間 $(-\infty, \infty)$ となり、ファジィ数列の収束の表現に別の配慮が必要となります。そのため、無限区間を排除するため、本解説のような定義とし、 $[u]^0$ も有界閉区間としました。反面、この定義に閉包を用いているため証明が複雑になったきらいがあります。この連載で用いたファジィ数の定義「すべての α -カットが空でない有界閉区間であるようなファジィ集合」および「ファジィ数に関わる諸概念を α -カットを用いて表現する」の利点を挙げれば、第1にファジィ数を実数の拡張として捉えられるということです。このため、実数の諸概念がそのまま区間関数を通して定義することができました。第2にファジィ数の演算のふるまいが区間関数を通して明確に表すことができます。従来、ファジィ数の和は拡張原理を用いて

$$(u+v)(x) = \sup_{s+t=x} (u(s) \wedge v(t)), x \in R$$

のように定義しますが、この定義ですと、右辺がファジィ数であることの証明が、本手法に比べて難しくなります。特に、ファジィ数の和に関する結合法則

$$(u+v)+w = u+(v+w), u, v, w \in E^1$$

の証明が著しく難しくなります。

また、実関数 $f(x)$ の定義域をファジィ数空間に延長する際、普通拡張原理を用いますが、これによって得られた $f(u)$ がファジィ写像となる証明も数学的に難しくなります。

本連載では、これらの証明を述べましたが、もう少し工夫すれば、より分りやすくなると思います。ファジィ級数の定義において、ファジィ数の和と共にファジィ数の差を用いました。ファジィ数の差の定義には、拡張原理を用いたものと、ファジィ数の和の逆演算を用いたものがあります(参考文献[5])。

本解説で用いた後者の定義は数学者の福原満洲雄先生に因んで“福原の差”ということもあります。

本稿で述べたファジィ級数の定義はファジィ数の和と共にファジィ数の差をも組み込むため、その表現に苦労しました。ここでの定義は同僚の日本大学御前憲廣先生のサジェスションによるものです。

解析関数 $f(x)$ を拡張し得られた、ファジィ写像 $f(u)$ のテーラー展開に関する結論は、一般に $f(x)$ の展開の収束域よりも狭い範囲でのみ成立します。展開範囲をこれ以上広げるためには、 $f(x)$ をここで述べた手法以外の方法で拡張すること、およびファジィ数自身の拡張が必要だと思ひます。ファジィ数の拡張に関し

ては、堀内先生の解説「ファジィ数V, VI」に期待して下さい。

現在、私は日本大学理工学部数学科で卒業研究「ファジィ数」を担当しています。したがって、担当している卒研を意識して執筆しました。そのため、数学の基本的な知識のみで理解できるようにし、「測度」を用いた表現は避けるようにしました。各命題の精密化、ファジィ数学の発展には、測度の知識が必須となります。たとえば、Lemma 6の

「2つのファジィ数 u, v に対して、 $[u]^\alpha = [v]^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ ならば、 $u=v$ である。」

は

「2つのファジィ数 u, v に対して、 $\alpha \in [0, 1]$ 上ほとんどいたる所 $[u]^\alpha = [v]^\alpha$ ならば、 $u=v$ である。」

のように精密化されます。また、ファジィ数列の節で「有界な単調数列は収束する」

のファジィ化した命題も記載したかったのですが、これも測度を用いなければならず

「単調増加なファジィ数列 $\{u_n\}$ に対し、1つのファジィ数 v が存在し

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v$$

を満たすならば、あるファジィ数 u が存在し $\alpha \in [0, 1]$ 上ほとんどいたる所

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_H([u_n]^\alpha, [u]^\alpha) = 0$$

が成立する。」

のように表現されます。これら2つの命題は参考文献[3]によります。

この解説を執筆するにあたり、多くの数学書を参考にしました。特に参照したのが参考文献[6][7]です。いずれも私が学生時代から身近に置いている書籍で、前者は「高木の解析概論」として知られる解析学の名著で、著者の没後50年を記念し、読みやすく組み直し定本として新たに刊行されました。後者は現代数学の基礎としての集合論と位相空間論を解説した名著です。ファジィ数の数学的厳密さの背景をこの書籍に求めました。

山下元先生のファジィ理論ゼミにおいて、ファジィ数についての発表を始めたのは、2001年のことでした。以来5年間、毎回レジュメを準備し、早稲田大学に向かう車中で発表の手順をあこれ工夫していました。同ゼミでの発表の積み重ねが、この解説の土台になっています。このゼミで少しずつまとまった成果をFSS及びファジィ関連シンポジウムで発表していましたが、度々水本雅春先生が来られ、常にご質問、コメントを頂きました。非常に励みとなりました。ファジィ数研究の指針を示された山下先生、水本先生に深

く御礼申し上げます。

ファジィ級数に関する研究もまともに、筑波大学で開催された第25回ファジィシステムシンポジウムの査読あり論文セッションに「ファジィ数空間上のテラー展開」を申し込みました。その際、査読者の先生方に20数箇所ものご指摘を頂きました。本質的な錯誤もあり、これらの訂正作業を進める内、一層ファジィ数への理解が深まりました。今回査読者の先生方のご指摘をこのような形に活かすことができました。厚く感謝致します。

最後になりますが、会誌編集委員会委員長櫻井茂明先生をはじめ編集委員各位には、解説論文執筆の機会を与えて頂きました。各回の原稿に対し、丁寧にご点検頂き、懇切丁寧なアドバイスを賜りました。心からの謝意を表します。

参 考 文 献

- [1] Wu Congxin and Ma Ming: Foundations of Fuzzy Analysis, National Defense Industry Press, 1994. (in Chinese)
- [2] Wu Congxin: Some advances on the calculus of fuzzy

mappings, The 19th Fuzzy System Symposium Proceeding, 2003.

- [3] Wu Congxin & Wang Guixiang: Convergence of sequences of fuzzy numbers and fixed point theorems for increasing fuzzy mappings and application, Fuzzy Sets and Systems 130.383-390, 2002.
- [4] Masaharu Mizumoto & Kokichi Tanaka: SOME PROPERTIES OF FUZZY NUMBERS, ADVANCES IN FUZZY SET THEORY AND APPLICATION, 1979.
- [5] A.Kaufmann and M.M.Gupta: Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1991. (邦訳：ファジィ数理と応用：田中英夫、松岡浩訳、オーム社、1992.)
- [6] 高木貞治：定本解析概論，岩波，2010.
- [7] 松坂和夫：集合・位相入門，岩波，1968.

(2012年10月31日 受付)

[問い合わせ先]

〒274-8501 船橋市習志野台7-24-1

日本大学理工学部船橋校舎 一般教育教室数学系列

稲井田 次郎

TEL : 047-469-8713

FAX : 047-469-5234

E-mail : daojingtian@penta.ge.cst.nihon-u.ac.jp