解説

経済動学における非加法的測度†

尾崎 裕之*

本稿は Choquet 積分を用いて定義された動学的な目的関数にダイナミック・プログラミングの手法が適用できるような環境を明らかにすることをその目的とする。そのために、まず、非加法的測度（本稿では、確率容量とよぶ）を Markov 的なカーネルに拡張し、これを用いて再帰的な目的関数を定義した。再帰的な目的関数を設定することによって、はじめてダイナミック・プログラミングの手法を適用することが可能となる。合わせて、そのような目的関数の公理化についての簡単な試みにも触れた。以上のことによって、Choquet 積分を用いた経済動学の分析が可能になる。

1. はじめに

不確実性下の意思決定問題では、Savage (1954) 以来、主観的期待効用理論が主流であった。これは、意思決定者の行動パターンがある公理系と整合的であるならば、彼女はあたかも一意に定まる確率測度を有し、これを用いて計算された期待効用が最大となるように選択肢を選んでいると見做してもよい、とするものである。しかし、その一方で、人々の行動パターンが Savage の公理系とは相いれないパターンを示すことも知られていた (Ellsberg (1961) の反例)。これに対して、Schmeidler (1989, ワーキング・ペーパーは1982) および Gilboa (1987) は、確率測度ではなく非加法的測度 (本稿では、確率容量とよぶ) を用いた Choquet 期待効用理論を、また、Gilboa and Schmeidler (1989) は、複数の確率測度の中から期待効用が最小となるものを選ぶ Maxmin 期待効用理論を公理化した。これらの表現定理は、Ellsberg (1961) の反例を説明できるものとなっており、経済学ではその後、これらの理論を様々な経済モデルに応用し、その含意を調べることが盛んに行われてきた。さらに、これらのモデルを動学モデルに拡張し、分析を行う研究も盛んになっている。本稿の筆者は、Ozaki and Streufert (1996) において、Choquet 積分を含む、より広いクラスの非期待値を用いた動学的な目的関数に対するダイナミック・プログラミングの手法を開発した。本稿はこの手法を Choquet 積分に特化し、同手法が適用

できるような環境を明らかにすることをその目的とする。そのために、まず、確率容量を Markov 的なカーネルに拡張し、これを用いて再帰的な目的関数を定義した。再帰的な目的関数を設定することによって、はじめてダイナミック・プログラミングの手法を適用することが可能となる。合わせて、そのような目的関数の公理化についての簡単な試みにも触れた。筆者は、実際にここで開発されたようなダイナミック・プログラミングの手法を具体的な動学的経済モデルに応用した分析も行っているが (Nishimura and Ozaki, 2004, 2014)、これについての紹介は別の機会に譲ることにしたい。

2. 確率容量と Choquet 積分

本節では確率容量に関する数学的基礎を与える。証明が簡単に見つかるものについては、証明を省略する。（例えば、Dellacherie, 1970, Shapley, 1971, Schmeidler, 1986, 1989 などを参照。）

2.1 確率容量と確率チャージ

可測空間 $(S, \mathcal{F})$ を考える。ここで、 S は任意の集合であり、 $\mathcal{F}$ は S 上の σ -代数である。可測空間 $(S, \mathcal{F})$ 上の確率容量、あるいは、非加法的確率測度 $\theta: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ とは、次の 3 条件を満たす集合関数のことを指す。

$$\theta(\emptyset) = 0$$

$$\theta(S) = 1$$

$$(\forall A, B \in \mathcal{F}) \quad A \subseteq B \Rightarrow \theta(A) \leq \theta(B)$$

確率容量は

† Non-additive Measure in Economic Dynamics
Hiroyuki OZAKI

* 慶應義塾大学経済学部
Keio University, Faculty of Economics

本稿執筆の機会を与えていただいた東京工業大学の室伏俊明准教授に感謝いたします。あり得べき誤りはすべて筆者一人の責任に帰すものです。

$$(\forall A, B \in \mathcal{F}) \quad \theta(A \cup B) + \theta(A \cap B) \geq \theta(A) + \theta(B) \quad (1)$$

を満たすときに、凸であるといわれる。また、常に逆向きの不等式が成立するとき、凹であるといわれる。さらに、不等式が常に等号で成立するときに、確率容量は確率チャージと呼ばれる。確率容量 θ は、

$$(\forall \{A_i\}_i \subseteq \mathcal{F}) \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \Rightarrow \theta(\cup_i A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta(A_i)$$

を満たすときに、下から連続であるといわれる。また、

$$(\forall \{A_i\}_i \subseteq \mathcal{F}) \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \Rightarrow \theta(\cap_i A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \theta(A_i)$$

を満たすときに、上から連続であるといわれる。下からも上からも連続な確率容量 θ は、連続であるといわれる。どのような有限測度も連続であり、連続性と有限加法的性(すなわち(1)で、等号が常に成立する)が可算加法的性を含意することが直ぐにわかる。

確率容量 θ の共役な確率容量 $\theta': \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ を次によって定義する。

$$(\forall A \in \mathcal{F}) \quad \theta'(A) = 1 - \theta(A^c)$$

ただし、ここで、 A^c は S における A の補集合を表す。確率容量 θ のコア、 $\text{core}(\theta)$ 、を次によって定義する。

$$\text{core}(\theta) = \{P \in \mathcal{M} \mid (\forall A \in \mathcal{F}) P(A) \geq \theta(A)\}$$

ここで、 $\mathcal{M}$ は $(S, \mathcal{F})$ 上のすべての確率チャージからなる集合である。連続な確率容量のコアに含まれる確率チャージは、可算加法的性を満たす、すなわち、確率測度となることが証明できる。

補題 1 可測空間 $(S, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P 、および、 $f(0) = 0$ かつ $f(1) = 1$ を満たす非減少関数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が与えられたとき、関数 $f \circ P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ を

$$(\forall A \in \mathcal{F}) \quad f \circ P(A) = f(P(A))$$

によって定義すると、 $f \circ P$ は確率容量となる。さらに、 f がそれぞれ、凸関数、凹関数、連続関数のとき、 $f \circ P$ はそれぞれ、凸、凹、連続になる。

補題 2 確率容量 θ が与えられた時、 θ が凸(凹)であることと、 θ' が凹(凸)であることは同値である。

補題 3 確率容量 θ が凸であるならば、 $\text{core}(\theta)$ は非空である。

2.2 Choquet 積分

集合 S 上で定義され、 $\bar{\mathbb{R}}$ 上の点を値としてとり、かつ $\mathcal{F}$ -可測である関数全体からなる空間を $L(S, \bar{\mathbb{R}})$ と

書き、有界な関数全体からなるその部分空間を $B(S, \mathbb{R})$ と書くことにする。このとき、関数 $u \in L(S, \bar{\mathbb{R}})$ の確率容量 θ に関する Choquet 積分を次によって定義する。

$$\begin{aligned} \int_S u d\theta &:= \int_S u(s) \theta(ds) \\ &:= \int_{-\infty}^0 (\theta(\{s \mid u(s) \geq x\}) - 1) dx + \int_0^{+\infty} \theta(\{s \mid u(s) \geq x\}) dx \end{aligned}$$

(ただし、 $-\infty + \infty$ とならないときに限る。)関数 u の値域が有限集合であるとする。このような u を単関数とよぶ。このとき u は次のかたちで一意に表現できる。

$$u = \sum_{i=0}^k a_i \chi_{A_i}$$

ただし、 $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ であり、 A_i は $(\forall_i) A_i := \{s \in S \mid u(s) = a_i\}$ で定義される。また、関数 $\chi_A: S \rightarrow \{0, 1\}$ は集合 A の特性関数であり、次によって定義される。

$$(\forall s) \quad \chi_A(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s \in A \\ 0 & \text{if } s \notin A \end{cases}$$

このとき、関数 u の Choquet 積分は

$$\int_S u(s) \theta(ds) = a_0 + \sum_{i=1}^k (a_i - a_{i-1}) \theta\left(\bigcup_{j=i}^k A_j\right)$$

となることが簡単な計算で確認できる。次の補題中、2つの関数 $u, v \in L(S, \bar{\mathbb{R}})$ は、 $(\forall_{s,t} \in S) (u(s) - u(t))(v(s) - v(t)) \geq 0$ を満たすときに共単調であるといわれる。

補題 4 確率容量 θ が与えられているとする。

(a) (単調性)

$$(\forall u, v \in B(S, \mathbb{R})) \quad u \leq v \Rightarrow \int u d\theta \leq \int v d\theta$$

(b) (正の1次同次性)

$$(\forall u \in B(S, \mathbb{R})) (\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}_+) \quad \int (a + bu) d\theta = a + b \int u d\theta$$

ただし、左辺の a は定数関数と解釈する。

(c)

$$(\forall u \in B(S, \mathbb{R})) \quad \int u d\theta' = - \int -u d\theta$$

(d) (共単調加法的性) 2つの関数 $u, v \in B(S, \mathbb{R})$ が共単調ならば

$$\int (u+v)d\theta = \int u d\theta + \int v d\theta$$

が成立する.

補題 5 凸の確率容量 θ が与えられているとする.

(a)

$$(\forall u \in B(S, \mathbb{R})) \quad \int u d\theta = \min \left\{ \int u dP \mid P \in \text{core}(\theta) \right\}$$

(b) (優加法性)

$$(\forall u, v \in B(S, \mathbb{R})) \quad \int (u+v)d\theta \geq \int u d\theta + \int v d\theta$$

(θ が凹のときには逆向きの不等式が成立する.)

(c)

$$(\forall u \in B(S, \mathbb{R})) \quad \int u d\theta \leq \int u d\theta'$$

(d)

$$(\forall u \in B(S, \mathbb{R})) \quad \left| \int u d\theta - \int v d\theta \right| \leq \int |u-v| d\theta'$$

証明 (d) 以外の結果はよく知られている. (d) の結果は Nishimura and Ozaki (2004) で与えられているが重要なので再掲する. 以下が成立する.

$$\begin{aligned} & \int u d\theta - \int v d\theta \\ &= \int u d\theta - \int (v-u+u) d\theta \\ &\leq \int u d\theta - \left[\int (v-u) d\theta + \int u d\theta \right] \\ &= - \int (v-u) d\theta \\ &= \int (u-v) d\theta' \\ &\leq \int |u-v| d\theta' \end{aligned}$$

ここで, 最初の不等式は補題 5 (b) から, 3 つめの等式は補題 4 (c) から, 最後の不等式は補題 4 (a) からそれぞれ従う. ■

補題 6 (単調収束定理, Nishimura and Ozaki ,

2004) (a) 確率容量 θ は下から連続であるとし, $\langle u_n \rangle_{n=0}^\infty$ を $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots$ および $\int u_0 d\theta > -\infty$ を満たす $\mathcal{F}$ -可測な関数の列とする. このとき, 次が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\theta = \int \lim_{n \rightarrow \infty} u_n d\theta$$

(b) 確率容量 θ は上から連続であるとし, $\langle u_n \rangle_{n=0}^\infty$ を $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$ および $\int u_0 d\theta < +\infty$ を満たす $\mathcal{F}$ -可測な関数の列とする. このとき, 次が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\theta = \int \lim_{n \rightarrow \infty} u_n d\theta$$

証明 (b) は, (a) において, $\langle u_n \rangle$ と θ を, それぞれ, $\langle -u_n \rangle$ と θ' とすることによって (a) から従う. よって, (a) のみ証明する. 最初に,

$$\theta(\{u \geq x\}) = \theta(\{u > x\})$$

がほとんどすべての x について成立することを示す. 明らかに $\theta(\{u \geq x\}) \geq \theta(\{u > x\})$ がすべての x について成立する. 他方, $x \mapsto \theta(\{u > x\})$ が x について非増加であることから, 高々可算無限個の点を除いて x について連続であることが分かる. 点 x を $x \mapsto \theta(\{u > x\})$ が連続であるような点とする. このとき

$$\theta(\{u > x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\{u > x - 1/n\}) \geq \theta(\{u \geq x\})$$

が成立する. したがって, 以下の等式から (a) が成立する.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^0 (\theta(\{u_n \geq x\}) - 1) dx + \int_0^\infty \theta(\{u_n \geq x\}) dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^0 (\theta(\{u_n > x\}) - 1) dx + \int_0^\infty \theta(\{u_n > x\}) dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^0 \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta(\{u_n > x\}) - 1) dx + \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\{u_n > x\}) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (\theta(\cup_n \{u_n > x\}) - 1) dx + \int_0^\infty \theta(\cup_n \{u_n > x\}) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (\theta(\{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > x\}) - 1) dx + \int_0^\infty \theta(\{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n > x\}) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (\theta(\{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq x\}) - 1) dx + \int_0^\infty \theta(\{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq x\}) dx \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} u_n d\theta \end{aligned}$$

ただし, 最初と最後の等式は Choquet 積分の定義から, 2 番目と 6 番目の等式は上で述べた注意から, 3 番目の等式は Lebesgue 単調収束定理から, 4 番目の等式は θ の下からの連続性から, 5 番目の等式は集合を定義している厳密な不等式から, それぞれ従う. ■ 単調収束定理によって, 上記の Choquet 積分に関する補題は (積分が定義される限りにおいて), 連続な確率容量 θ および任意の関数 $u \in L(S, \mathbb{R})$ について成立することがわかる.

補題 7 (Fatou の補題, Nishimura and Ozaki, 2014) 確率容量 θ は上から連続とする. さらに, $\langle u_n \rangle_{n=1}^\infty$ は, 上から一様に有界な, 非負値かつ $\mathcal{F}$ -可測な関数列とする. このとき, 次が成立する.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\theta \leq \int \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n d\theta.$$

証明 関数列 $\langle u_n \rangle$ を上の仮定を満たす関数列とする. このとき

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int u_n(s) \theta(ds) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \theta(\{s | u_n(s) \geq t\}) dt \\ &\leq \int_0^\infty \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \theta(\{s | u_n(s) \geq t\}) dt \\ &\leq \int_0^\infty \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \theta\left(\bigcup_{k=n}^\infty \{s | u_k(s) \geq t\}\right) dt \\ &\leq \int_0^\infty \theta\left(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty \{s | u_k(s) \geq t\}\right) dt \\ &\leq \int_0^\infty \theta\left(\left\{s \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n(s) \geq t\right\}\right) dt \\ &= \int \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u_n(s) \theta(ds) \end{aligned}$$

が成立する. ただし, 最初の不等式は $\langle u_n \rangle$ が上から一様に有界であることから通常の Fatou の補題によって, 2 番目の不等式は直ぐに, 3 番目の不等式は θ についての仮定から, 4 番目の不等式は関数列と実数列についての $\overline{\lim}$ の定義から, それぞれ従う. ■

3. カーネル

以下の 2 つの条件が成立するときに, 写像 $\theta: S \times \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ は (S から S への) カーネルと呼ばれる.

($\forall s \in S$) θ_s は可測空間 $(S, \mathcal{F})$ 上の確率容量である.
($\forall B \in \mathcal{F}$) $\theta \cdot (B)$ は $\mathcal{F}$ -可測である.

カーネルは, すべての s について θ_s が凸(凹, 下から連続, 上から連続, 連続)であるときに, 凸(凹, 下から連続, 上から連続, 連続)であるといわれる. 動学モデルにおいて, カーネルの連続性は次の例が示すように, 非常に重要である.

例 1 (ε -汚染) 実数 ε を $\varepsilon \in (0, 1)$ とする. 任意の確率測度 μ が与えられた時, 集合関数 ν を次によって定義する.

$$(\forall A \in \mathcal{F}) \quad \nu(A) = \begin{cases} (1 - \varepsilon)\mu(A) & \text{if } A \neq S \\ 1 & \text{if } A = S \end{cases}$$

これは μ の ε -汚染と呼ばれ, 凸の確率容量となって

いることがわかる. 関数 $u: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F})$ -可測な関数とすると,

$$\int_S u(s, s_+) d\nu(s_+) = (1 - \varepsilon) \int_S u(s, s_+) d\mu(s_+) + \varepsilon \inf_{s_+ \in S} u(s, s_+)$$

となる. しかしながら, $\inf_{s_+ \in S} u(s, s_+)$ が s について必ずしも $\mathcal{F}$ -可測な関数とはならないことがよく知られている. 確率容量 ν は連続ではない. (これを見るためには, 例えば, $\langle S_n \rangle_n$ を $(\forall n) S_n \neq S$ かつ $\cup_n S_n = S$ となるような増加集合列とすればよい.)

一般的に, Choquet 積分

$$\int_S u(s, s_+) d\theta(s_+)$$

は, θ が連続でない限り, 必ずしも s について $\mathcal{F}$ -可測とはならない.

補題 8 (Fubini の性質, Nishimura and Ozaki, 2004) カーネル θ が連続であるとする. このとき, 任意の $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F})$ -可測な関数 u について, 写像

$$s \mapsto \int u(s, s_+) \theta_s(ds_+)$$

は $\mathcal{F}$ -可測である.

証明 集合 $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ と点 $s \in S$ が与えられたとき, E の s -セクションを $E(s)$ とかき, $E(s) := \{s' \in S \mid (s, s') \in E\}$ によって定義する. まず最初に, 写像 $s \mapsto \theta_s(E(s))$ が, どのような $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ についても $\mathcal{F}$ -可測であることを証明する. 集合族 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \mid s \mapsto \theta_s(E(s)) \text{ は } \mathcal{F}\text{-可測}\}$$

によって定義する. 仮に, $E = \cup_{i=1}^n (A_i \times B_i)$ であるならば(ただし, ここで, $(\forall i) A_i, B_i \in \mathcal{F}$ かつ $i \neq j$ ならば $(A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset$ と仮定する.)

$$\theta_s(E(s)) = \max_{N' \subset \{1, 2, \dots, n\}} \theta_s(\cup_{i \in N'} B_i) \chi_{\cap_{i \in N'} A_i}(s)$$

が成立し, しかも, 右辺は $\mathcal{F}$ -可測であることから, 矩形の非交叉有限和からなる集合族は $\mathcal{E}$ の部分集合族となる. あとは, $\mathcal{E}$ が単調クラスであることを示せばよい. このために, $E_n \uparrow E$ となるような集合列 $\langle E_n \rangle_{n=1}^\infty$ を考える. すると, どのような $s \in S$ についても $E_n(s) \uparrow E(s)$ となり, $\theta_s(\cdot)$ の連続性より $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_s(E_n(s)) = \theta_s(E(s))$ となる. これより, $E \in \mathcal{E}$ が従う. 同様の議

論が減少列についても成立する。

次に、補題の主張が単関数について成立することを証明する。単調収束定理(補題6)により、これで証明が完結する。関数 u を $S \times S$ 上の非負値単関数とする。すると、 u は $u(s, s_+) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(s, s_+)$ のようにかける。ただし、ここで、 $0 < a_1 < \dots < a_n$ であり、 $\langle E_i \rangle$ は $S \times S$ の分割である。このとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} (\forall s \in S) \quad \int u(s, s_+) \theta_s(ds_+) &= \int \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}(s, s_+) \theta_s(ds_+) \\ &= \int \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i(s)}(s_+) \theta_s(ds_+) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \theta_s(\cup_{k=i}^n (E_k(s))) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \theta_s(\cup_{k=i}^n E_k)(s) \end{aligned}$$

ここで、 $a_0 := 0$ であり、3つ目の等式は Choquet 積分の定義による。第1パラグラフより、最後の表現が $\mathcal{F}$ -可測となることから主張が従う。 ■

次の定義と補題では、 S を位相空間、 $\mathcal{F}$ を S 上の Borel σ -代数とし $\mathcal{B}_S$ とかく。集合列 $\langle A_n \rangle_{n=1}^\infty$ を $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ を満たす $\mathcal{B}_S$ -可測な S の任意の部分集合列とし、 $\langle s_n \rangle_{n=1}^\infty \subseteq S$ を $s_n \rightarrow s_0 \in S$ であるような任意の点列とする。このとき、常に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{s_n}(A_n) \leq \theta_{s_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \right)$$

が成立するならば、カーネル θ は上半連続であるという。また、 $s_0 \in S$ に収束する任意の点列 $\langle s_n \rangle_{n=1}^\infty \subseteq S$ について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{B}_S} |\theta_{s_n}(A) - \theta_{s_0}(A)| \rightarrow 0$$

が成立するときに、カーネル θ は強連続であるという。

補題9 (上半連続性, Nishimura and Ozaki, 2014)
カーネル θ は、上から連続で強連続ならば、上半連続である。

証明 補題を証明するために、 $\langle A_n \rangle_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}_S$ を $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ を満たすような任意の集合列とし、 $\langle s_n \rangle_{n=1}^\infty \subseteq S$ を $s_n \rightarrow s_0 \in S$ であるような任意の点列とし、最後に、 $\varepsilon > 0$ を任意の正の実数とする。このとき、仮定により θ は強連続であるから、 $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$n > N_1 \Rightarrow |\theta_{s_n}(A_n) - \theta_{s_0}(A_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる。また、仮定により θ が上から連続であることと、 $n \rightarrow +\infty$ のとき $A_n \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ であることから、 $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$n > N_2 \Rightarrow |\theta_{s_0}(A_n) - \theta_{s_0}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる。自然数 N を $N := \max\{N_1, N_2\}$ と定義する。すると、任意の $n > N$ について、

$$\begin{aligned} &|\theta_{s_n}(A_n) - \theta_{s_0}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)| \\ &\leq |\theta_{s_n}(A_n) - \theta_{s_0}(A_n)| + |\theta_{s_0}(A_n) - \theta_{s_0}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

が成立し、これより、任意の $n > N$ について、

$$\theta_{s_n}(A_n) < \theta_{s_0}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) + \varepsilon$$

が成立する。正の実数 $\varepsilon > 0$ は任意であったから、これで証明が完了した。 ■

カーネルの上半連続性と密接に関係した性質に Feller の性質がある。関数 $\bar{u} \in L(S, \mathbb{R})$ が与えられたとき、

$$(\forall \langle s_n \rangle_{n=1}^\infty \rightarrow s_0 \in S) (\forall \langle u_n \rangle_{n=1}^\infty \subseteq \bar{u})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S u_n(s) \theta_{s_n}(ds) \leq \int_S \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s) \theta_{s_0}(ds)$$

が成立するならば、カーネル θ は $\bar{u}$ について Feller の性質を満たすという。

4. 再帰的効用関数

本節では、再帰的効用関数の定義を与えたのち、その部分的な公理化を行う。

4.1 Koopmans 方程式

ダイナミック・プログラミングの手法を適用するためには、効用関数が再帰的でなくてはならない。本小節では、Choquet 積分を用いた再帰的効用関数を定義する。以下では、 θ は凸かつ連続なカーネルと仮定する。それぞれの $t=1, 2, \dots$ について、 $(S^t, \mathcal{F}^t)$ を $(S, \mathcal{F})$ から生成された直積可測空間とする。すなわち、

$$S^t := S \times \dots \times S \quad \text{かつ} \quad \mathcal{F}^t := \mathcal{F} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}$$

である(ただし、積は $t-1$ 回)。 S^t の一般的な要素を歴史とよび、 ${}_1s_t = (s_1, s_2, \dots, s_t)$ とかく。それぞれの $t=1, 2, \dots$ について、 $L(S^t, \mathbb{R}_+)$ を、 S^t から $\mathbb{R}_+$ への $\mathcal{F}^t$ -可測なすべての関数からなる空間とする。(ただし、 $L(S^0, \mathbb{R}_+) := \mathbb{R}_+$ と定義する。)消費計画とは $\prod_{t \geq 0} L(S^t, \mathbb{R}_+)$ の任意の要素であり、 ${}_0c = (c_0,$

$c_1, c_2, \dots$) とかけられる。すなわち、 $_0c$ は非負実数値の $\langle \mathcal{F}^t \rangle_{t \geq 0}$ -適当な確率過程である。歴史 $_1s_t$ と、消費計画 $_0c$ が与えられたとき、

$$t\mathbf{c} := (c_t(1s_t), c_{t+1}(1s_t, \cdot), c_{t+2}(1s_t, \cdot, \cdot), \dots) \in \prod_{t \geq 0} L(S^t, \mathbb{R}_+)$$

によって定義される(新たな)消費計画を、歴史 $_1s_t$ が与えられたときの $_0c$ の継続とよぶ。非減少かつ上半連続な凹関数 $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ を以下ではフェリシティー関数とよぶ。また、 $\beta \in (0, 1)$ を割引因子とよぶ。以上の準備の下で、効用関数 $U: S \times \prod_{t \geq 0} L(S^t, \mathbb{R}_+) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ を次によって定義する。

$$U_{s_0}(_0c) := \lim_{T \rightarrow +\infty} u(c_0) + \beta \int_S \dots \beta \int_S \left(u(c_{T-1}) + \beta \int_S u(c_T) \theta_{s_{T-1}}(ds_T) \right) \theta_{s_{T-2}}(ds_{T-1}) \dots \theta_{s_0}(ds_1)$$

Limit 内の各コンポーネントは可測関数に Choquet 積分を繰り返し適用したものとなっており、Fubini の性質から定義可能であることがわかる。さらに、効用関数は、フェリシティー関数の非負値性により、非減少実数列の極限となっているために(+ ∞ も許して)定義可能である。単調収束定理により、効用関数が次の関係を満たすこともわかる。

$$(\forall s_0)(\forall _0c) \quad U_{s_0}(_0c) = u(c_0) + \beta \int_S U_{s_1}(_1c) \theta_{s_0}(ds_1),$$

ただし、ここで、 $_1c$ は s_1 が与えられた時の $_0c$ の継続である。この関係を Koopmans 方程式とよぶ。Koopmans 方程式で表現される効用関数の再帰性により、ダイナミック・プログラミングの手法を適用することが可能となる。

4.2 公理的基礎

この小節では、Nishimura and Ozaki (2003) に沿って、前小節の効用関数にみられるような Choquet 積分の繰り返しによる表現の公理的基礎付けを与える。

4.2.1 諸定義

2 期間モデルを考える。1 期目と 2 期目の状態空間をそれぞれ $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ および $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ とおく。ただし、 $m, n \in \mathbb{N}$ である。故に、2 期間にわたる状態空間は $\Omega := S \times T$ となる。集合 Ω の一般的な要素を ω あるいは (s, t) と表記する。集合 X を賞品(賞金)の集合とし、 Y を可測空間 $(X, 2^X)$ 上の、サポートが有限の確率測度の集合とする(ただし、 2^X は X のべき集合である)。集合 Y の要素は、くじとよばれる。集合 Y の要素 $y, y' \in Y$ および $\lambda \in [0, 1]$ が与えられたとき、 $\lambda y + (1 - \lambda) y'$ を複合くじとよぶ。(以上の定義は、より一般的な混合空間へ拡張で

きるが、ここでは省略する。混合空間については、Herstein and Milnor (1953) を参照。)

Anscombe and Aumann (1963) のフレームワークにしたがい、値域が Y の有限部分集合であるような Ω 上の Y -値関数を、単純なくじ型アクト(以下、アクト)とよび、その集合を L_0 とかく。アクト $f, g \in L_0$ および $\lambda \in [0, 1]$ が与えられたとき、 $(\forall \omega) (\lambda f + (1 - \lambda)g)(\omega) = \lambda f(\omega) + (1 - \lambda)g(\omega)$ によって、複合アクトを定義する。また、値域が 1 点集合であるようなアクトを定数アクトとよび、その集合を L_c と書く。アクト f が、 $(\forall s)(\forall t, t') f(s, t) = f(s, t')$ を満たすときに、 f は第 1 期について可測であるという。その名称が示すように、第 1 期について可測なアクトの値は、第 1 期の状態のみによって決定される。第 1 期について可測なアクトの、点 (s, t) における値を $f(s, t)$ の代わりに単に $f(s)$ と書くことがある。

意思決定者の選好は、 L_0 上の 2 項関係のクラス $\{\succsim_i\}_{i=0,1,\dots,m}$ によって与えられる。2 項関係 $\succsim_0$ は意思決定者の条件なし選好を、2 項関係 $\succsim_i$ は彼女が第 1 期に $s_i \in S$ が実現したことを知ったあとの彼女の条件付き選好を表していると解釈する。2 つの 2 項関係のクラス $\{\succsim_i\}$ と $\{\sim_i\}$ を、 $\{\succsim_i\}$ は $\succsim_i \Leftrightarrow \not\succ_i$ によって、 $\{\sim_i\}$ は $\sim_i \Leftrightarrow [\not\succ_i \text{ かつ } \not\succ_i]$ によって定義する。一般に、2 項関係 $\succ$ は非対称性と負の推移律を満たすときに選好順序とよばれる。ただし、ここで、非対称性とは $(\forall f, g \in L_0) f \succ g \Rightarrow g \not\succ f$ が成り立っていることをいい、負の推移律とは $(\forall f, g, h \in L_0) [f \not\succ g \text{ かつ } g \not\succ h] \Rightarrow f \not\succ h$ が成り立っていることをいう。それぞれの $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ について、 Y 上の 2 項関係を、 $\succsim_i$ を L_c 上に制限することによって定義し、これを同じ記号 $\succsim_i$ を用いて表す。すなわち、

$$(\forall y, y' \in Y) \quad y \succsim_i y' \Leftrightarrow (\exists f, g \in L_c) (\forall \omega \in \Omega) f(\omega) = y, g(\omega) = y' \text{ かつ } f \succsim_i g$$

一対のアクト f と g は、 $(\forall \omega, \omega') f(\omega) \succsim_i f(\omega') \Rightarrow g(\omega) \not\succ_i g(\omega')$ が成立するときに $\succsim_i$ に関して共単調であるといわれる。ただし、ここでの共単調性は $\succsim_i$ によって Y 上に導入された 2 項関係で定義されている。

4.2.2 公理と主定理

集合 L_0 上で定義された意思決定者の 2 項関係のクラス $\{\succsim_i\}_{i=0,1,\dots,m}$ が与えられているものとし、このクラスについての以下の公理を考える。ただし、公理中、 f, g, h は L_0 の任意の要素とし、 λ は $\lambda \in (0, 1]$ を満たす任意の実数とする。

A1 (順序性) それぞれの $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ について, 2 項関係 $\succ_i$ は選好順序である.

A2(0) (制約付き共単調独立性) アクト f, g, h が第 1 期について可測であり, どの対も $\succ_0$ について共単調であるならば, $f \succ_0 g \Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)h \succ_0 \lambda g + (1-\lambda)h$ が成立する.

A2(1) (条件付き共単調独立性) それぞれの $i \in \{1, \dots, m\}$ について, もし f, g, h のどの対も $\succ_i$ について共単調ならば, $f \succ_i g \Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)h \succ_i \lambda g + (1-\lambda)h$ が成立する.

A3 (連続性) それぞれの $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ について, もし $f \succ_i g$ かつ $g \succ_i h$ であるならば,

$$(\exists \alpha, \beta \in (0, 1)) \alpha f + (1-\alpha)h \succ_i g \text{ かつ } g \succ_i \beta f + (1-\beta)h$$

が成立する.

A4 (単調性) それぞれの $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ について, もし $(\forall \omega \in \Omega) f(\omega) \succeq_i g(\omega)$ であるならば, $f \succeq_i g$ である.

A5 (非退化性) $(\exists f, g \in L_0) f \succ_0 g$.

A6 (未実現の事象からの独立性) $(\forall i \in \{1, \dots, m\}) f(s_i, \cdot) = g(s_i, \cdot) \Rightarrow f \sim_i g$.

A7 (序数的選好の整合性) $(\forall i \in \{1, \dots, m\}) (\forall y, y' \in Y) y \succ_0 y' \Leftrightarrow y \succ_i y'$.

A8 (動学的整合性) $[(\forall i \in \{1, \dots, m\}) f \succeq_i g] \Rightarrow f \succeq_0 g$.

次の定理は, 公理系 A1-A8 のもとでは, 条件なし選好 $\succ_0$ は, ある確率容量のクラスによる繰返し Choquet 期待効用で表現され(定理 1 の (2) を参照), それぞれの条件付き選好 $\succ_i$ は, その $\{s_i\} \times T$ 上への制限として表現されることを主張している(定理 1 の (3) を参照).

定理 1 2 項関係のクラス $\{\succ_i\}_{i=0}^m$ が公理系 A1-A8 を満たすとする. このとき, かつ, このときに限り, 一意に定まる S 上の確率容量 θ_0 , 一意に定まる T 上の確率容量のクラス $\langle \theta_{s_i} \rangle_{i=1}^m$, および, 正のアファイン変換を除いて一意に定まるアファイン関数 $u: Y \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 以下が成立する.

$$f \succ_0 g \Leftrightarrow \int_S \int_T u(f(s, t)) \theta_s(dt) \theta_0(ds) > \int_S \int_T u(g(s, t)) \theta_s(dt) \theta_0(ds) \quad (2)$$

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\}) f \succ_i g \Leftrightarrow \int_T u(f(s_i, t)) \theta_{s_i}(dt) > \int_T u(g(s_i, t)) \theta_{s_i}(dt) \quad (3)$$

証明 Nishimura and Ozaki (2003) を参照. ■

集合 S 上の任意の確率容量 $\hat{\theta}_0$ と集合 T 上の任意の確率容量のクラス $\langle \hat{\theta}_{s_i} \rangle_{i=1}^m$ が与えられているとする. このとき, Ω 上の実数値集合関数 $\hat{\theta}$ を次によって定義する.

$$(\forall A \in 2^\Omega) \hat{\theta}(A) = \int_S \int_T \chi_A(s, t) \hat{\theta}_s(dt) \hat{\theta}_0(ds) \quad (4)$$

このとき, $\hat{\theta}(\phi) = 0$, $\hat{\theta}(\Omega) = 1$ かつ $A \subseteq B \Rightarrow \hat{\theta}(A) \leq \hat{\theta}(B)$ となっているので, $\hat{\theta}$ が Ω 上の確率容量であることがわかる. ここで, 2 つのことを確認する. (同様の観察は Wang (2003) にもみられる.) 第 1 に,

$$(\forall E \subseteq S)(\forall F \subseteq T) \hat{\theta}(E \times F) =$$

$$\int_S \int_T \chi_{E \times F}(s, t) \hat{\theta}_s(dt) \hat{\theta}_0(ds) = \int_S \hat{\theta}_s(F) \chi_E(s) \hat{\theta}_0(ds)$$

となっていることがわかり, これより

$$(\forall E) \hat{\theta}(E \times T) = \int_S \hat{\theta}_s(T) \chi_E(s) \hat{\theta}_0(ds) = \hat{\theta}_0(E)$$

$$\text{かつ } (\forall i)(\forall F) \hat{\theta}(\{s_i\} \times F) =$$

$$\int_S \hat{\theta}_s(F) \chi_{\{s_i\}}(s) \hat{\theta}_0(ds) = \hat{\theta}_0(\{s_i\}) \hat{\theta}_{s_i}(F)$$

が従う. よって, 分母がゼロにならない限り,

$$\hat{\theta}_{s_i}(F) = \frac{\hat{\theta}(\{s_i\} \times F)}{\hat{\theta}_0(\{s_i\})} = \frac{\hat{\theta}(\{s_i\} \times F)}{\hat{\theta}(\{s_i\} \times T)}$$

となる. これは $\hat{\theta}$ を確率測度であるかのように見做し, これに単純に Bayes ルールを適用したときに得られる更新ルールであり, 素朴な Bayes ルールとよばれる. 第 2 に,

$$\begin{aligned} (\forall i)(\forall F) \quad & \hat{\theta}((\{s_i\} \times F) \cup (S \setminus \{s_i\} \times T)) \\ &= \int_S \int_T \chi_{(\{s_i\} \times F) \cup (S \setminus \{s_i\} \times T)}(s, t) \hat{\theta}_s(dt) \hat{\theta}_0(ds) \\ &= \int_S \left(\hat{\theta}_{s_i}(F) \chi_{\{s_i\}}(s) + \chi_{S \setminus \{s_i\}}(s) \right) \hat{\theta}_0(ds) \\ &= (1 - \hat{\theta}_{s_i}(F)) \hat{\theta}_0(S \setminus \{s_i\}) + \hat{\theta}_{s_i}(F) \\ &= (1 - \hat{\theta}_0(S \setminus \{s_i\})) \hat{\theta}_{s_i}(F) + \hat{\theta}_0(S \setminus \{s_i\}) \end{aligned}$$

となっていることがわかり, これより, 分母がゼロにならない限り,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{s_i}(F) &= \frac{\hat{\theta}((\{s_i\} \times F) \cup (S \setminus \{s_i\} \times T)) - \hat{\theta}_0(S \setminus \{s_i\})}{1 - \hat{\theta}_0(S \setminus \{s_i\})} \\ &= \frac{\hat{\theta}((\{s_i\} \times F) \cup (S \setminus \{s_i\} \times T)) - \hat{\theta}(S \setminus \{s_i\} \times T)}{1 - \hat{\theta}(S \setminus \{s_i\} \times T)} \end{aligned}$$

が成立している．これは統計学においてDempster-Shafer ルールとして知られている確率容量の更新ルールに一致している．（例えば，Dempster, 1967, 1968 および Shafer, 1976 を参照．）

定理 1 によって公理系 A1-A8 のもとでその存在が保障されている θ_0 と $\langle \theta_{s_i} \rangle_i$ を上記の $\hat{\theta}_0$ と $\langle \hat{\theta}_{s_i} \rangle_i$ と見做すことにし， $\hat{\theta}$ を θ_0 と $\langle \theta_{s_i} \rangle_i$ から (4) によって定義すると，次の系を得る．

系 1 2 項関係のクラス $\langle \succ_i \rangle_{i=0}^m$ が公理系 A1-A8 を満たすと仮定する．このとき，集合 Ω 上の確率容量 $\hat{\theta}$ と正のアファイン変換を除いて一意に定まるアファイン関数 $u: Y \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し， $\hat{\theta}(\{s_i\} \times T) \neq 0$ および $\hat{\theta}(S \setminus \{s_i\} \times T) \neq 1$ を満たすどのような i についても次が成立する．

$$f \succ_i g \Leftrightarrow \int_T u(f(s_i, t)) \theta_{s_i}(dt) > \int_T u(g(s_i, t)) \theta_{s_i}(dt),$$

ただし，ここで， θ_{s_i} は $\hat{\theta}$ により，以下によって定義されている．

$$(\forall F) \quad \theta_{s_i}(F) = \frac{\hat{\theta}(\{s_i\} \times F)}{\hat{\theta}(\{s_i\} \times T)} = \frac{\hat{\theta}((\{s_i\} \times F) \cup (S \setminus \{s_i\} \times T)) - \hat{\theta}(S \setminus \{s_i\} \times T)}{1 - \hat{\theta}(S \setminus \{s_i\} \times T)}.$$

系 1 は，公理系 A1-A8 のもとで，条件付き選好は，或る確率容量 $\hat{\theta}$ を Dempster-Shafer ルールで更新した確率容量についての Choquet 期待効用で表現されることを示している．系 1 ではさらに，この確率容量 $\hat{\theta}$ について，素朴な Bayes ルールによる更新と Dempster-Shafer ルールによる更新が一致することを示しているが，このことは一般の確率容量については成立しない．このことと，更新ルールが Dempster-Shafer ルールと一致することは，条件なし，および，条件付き選好に課された動学的整合性の公理の強い含意である．（Dempster-Shafer ルールの特徴づけについては Gilboa and Schmeidler, 1993 を，Maxmin 型選好を用いた再帰的効用関数の公理化については Epstein and Schneider, 2003 を，動学的整合性の含意については Epstein and Le Breton, 1993 をそれぞれ参照せよ．）

5. ダイナミック・プログラミング

本節では，第 4 節で定義され，部分的に公理化された再帰的効用関数を用いたダイナミック・プログラミングの手法を，Ozaki and Streufert (1996) および Nishimura and Ozaki (2014) に基づいて解説する．

以下では， S を Polish 空間とする．すなわち， S は完備な可分距離空間と位相同形とし， $\mathcal{F}$ は S 上の Borel σ -代数とする．また，カーネルは凸かつ連続とする．コンパクト値かつ上半連続な多価写像 $\Gamma: S \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+^2$ を実現可能性対応とよぶ．

例 2 (1 部門モデルと 2 部門モデル) 関数 $F: S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ を上半連続な生産関数とすると，

$$(\forall s, x) \quad \Gamma_s(x) := \{ (c, x') \in \mathbb{R}_+^2 \mid c + x' \leq F_s(x) \}$$

は実現可能性対応となっている (1 部門モデル)．また， $G: S \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ を連続な変形関数とすると，

$$(\forall s, x) \quad \Gamma_s(x) := \{ (c, x') \in \mathbb{R}_+^2 \mid c \leq G_s(x, x') \}$$

は実現可能性対応となっている (2 部門モデル)．

消費計画 ${}_0c \in \prod_{t \geq 0} L(S^t, \mathbb{R}_+)$ は，

$$(c_0, x_1) \in \Gamma_s(x) \text{ かつ } (\forall t \geq 1) (c_t, x_{t+1}) \in \Gamma_{s_t}(x_t)$$

を満たす投資計画 ${}_1x \in \prod_{t \geq 0} L(S^t, \mathbb{R}_+)$ が存在するときに (s, x) から実現可能であるといわれる．消費者は， (s, x) が与えられたときに，そこから実現可能な消費計画 ${}_0c$ (と投資計画 ${}_1x$) を選んで，効用関数の最大化を図る．関数 $v^*: S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ は $(\forall s, x) \quad v_s^*(x) = \max \{ U_s({}_0c) \mid {}_0c \text{ は } (s, x) \text{ から実現可能} \}$

を満たすときに，価値関数といわれる．価値関数がいづつも存在するとは限らない．消費計画 ${}_0c$ は，それが (s, x) から実現可能であり，かつ，

$$U_s({}_0c) = v_s^*(x)$$

を満たすときに， (s, x) から最適であるといわれる．価値関数と同様に，最適な消費計画がいつでも存在するとは限らない．（ただし，価値関数が存在すれば，最適な消費計画は存在する．）価値関数 v^* が存在するときに，政策対応 $g: S \times \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+^2$ を

$$(\forall s, x) \quad g_s(x) = \arg \max \left\{ u(c) + \beta \int_S v_{s'}^*(x') \theta_s(ds') \mid (c, x') \in \Gamma_s(x) \right\}$$

によって定義する．政策対応が存在するためには，すべての x' に対して $v^*(x')$ が $\mathcal{F}$ -可測であり，さらに上式の右辺が非空でなければならない．これらも証明されるべきことからである．消費計画 ${}_0c$ が (s, x) から再帰的に最適であるとは，投資計画 ${}_1x$ が存在して，

$$(c_0, x_1) \in g_s(x) \text{ かつ } (\forall t \geq 1) (c_t, x_{t+1}) \in g_{s_t}(x_t)$$

が成立するときのことをいう。再帰的最適性には、 g の可測選択子の存在も含まれる。どのような (s, x) についても、また、その (s, x) から実現可能などのような消費計画 ${}_0c$ についても

$$U_s({}_0c) \leq v_s^+(x)$$

が成立するとき、上半連続かつ第2変数について非減少な関数 $v^+ : S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ は極端に楽観的な価値関数といわれる。以下では、極端に楽観的な価値関数が存在し、この関数について、 θ はFellerの性質を満たすものと仮定する。関数 $v : S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ は、上半連続、第2変数に関して非減少、かつ

$$(\forall s, x) \quad 0 \leq v_s(x) \leq v^+(x)$$

を満たすときに、許容されるといわれる。Bellman作用素 B とは、許容される関数 v を別の関数 Bv に写す関数で、以下のように定義される。

$$(\forall v)(\forall s, x) \quad Bv_s(x) =$$

$$\max \left\{ u(c) + \beta \int_S v_{s'}(x') \theta_s(ds') \mid (c, x') \in \Gamma_s(x) \right\}$$

補題10 Bellman作用素は定義可能である。すなわち、maximumは存在する。

証明 Fellerの性質より従う。より詳しくは、Ozaki and Streufert (1996)を参照。■

この補題によって、価値関数 v^* が存在し、それが許容されるものであるならば(これらは以下で証明される)、政策対応が存在することがわかる。

補題11 極端に楽観的な価値関数が $Bv^+ \leq v^+$ を満たすならば、どのような許容される関数 v についても、 Bv は許容される。

証明 Fellerの性質より従う。より詳しくは、Ozaki and Streufert (1996)を参照。■

補題の条件を満たす極端に楽観的な価値関数の存在も、後に定理として証明される。許容される関数 v は $v = Bv$ を満たすとき、Bellman方程式を解くといわれる。すなわち、

$$(\forall s, x) \quad v_s(x) =$$

$$\max \left\{ u(c) + \beta \int_S v_{s'}(x') \theta_s(ds') \mid (c, x') \in \Gamma_s(x) \right\}$$

が成立するとき、 v はBellman方程式を解く。

成長条件 ダイナミック・プログラミングの手法を適用するためには、「成長条件」が必要になる。成長条件は通常、

$$\beta \times \text{“平均”成長率} < 1$$

のかたちをとる。成長率は実現可能性対応から導かれ、“平均”はカーネルを用いて定義される。(u が有界のときのように、成長条件が自動的に成立する場合も多い。) 本稿では、フェリシティー関数 $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$(\forall c) \quad u(c) = \frac{c^{1-\rho}}{1-\rho}$$

で特定化し(ただし、 $\rho \in (0, 1)$ とする)、1部門モデルを仮定し、生産関数 $F : S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$(\forall s, x) \quad F_s(x) = \gamma_s x$$

で特定化する(ただし、 γ は $(\forall_s) \gamma_s \geq 0$ であるような $\mathcal{F}$ -可測な関数とする)。このうえで、本稿で仮定する成長条件は

$$\sup_s \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_S \cdots \int_S \int_S \left(\prod_{q=1}^t \gamma_{s_q}^{1-\rho} \right) \theta'_{s_{t-1}}(ds_t) \theta'_{s_{t-2}}(ds_{t-1}) \cdots \theta'_s(ds_1) \right)^{1/t} < \beta^{-1} \quad (5)$$

である。

定理2 条件(5)を仮定する。このとき、価値関数が存在し、それはBellman方程式の唯一の許容される解であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n v^+$ に等しい。(ここで、 v^+ は補題11の性質を満たす極端に楽観的な価値関数である。) さらに、再帰的最適性は最適性を含意する。

証明 補題5(d)、Fellerの性質、成長条件により、Ozaki and Streufert (1996)より従う。■

この定理は、より一般的なフェリシティー関数や生産関数に拡張することができる。また、実際に、Nishimura and Ozaki (2014)では、ここで開発されたダイナミック・プログラミングの手法を用いて、具体的な動学的最大化問題の解析的な解を求めている。

参考文献

- [1] Anscombe, F. J. and R. J. Aumann (1963): “A Definition of Subjective Probability,” *Annals of Mathematical Statistics* 34, 199–205.
- [2] Dellacherie, C. (1971): “Quelques commentaires sur les prolongements de capacités,” *Seminaire Probabilités V, Strasbourg*, Lecture Notes in Math., vol.191, Springer-Verlag, Berlin and New York, 77–81.

- [3] Dempster, A. P. (1967): "Upper and Lower Probabilities Induced by A Multivalued Map," *Annals of Mathematical Statistics* 38, 325 - 339.
- [4] Dempster, A. P. (1968): "A Generalization of Bayesian Inference," *Journal of Royal Statistics Society, Series B* 30, 205 - 247.
- [5] Ellsberg, D. (1961): "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms," *Quarterly Journal of Economics* 75, 643-669.
- [6] Epstein, L. G. and M. Le Breton (1993): "Dynamically Consistent Beliefs Must Be Bayesian," *Journal of Economic Theory* 61, 1 - 22.
- [7] Epstein, L. G. and M. Schneider (2003): "Recursive Multiple-Priors," *Journal of Economic Theory* 113, 1-31.
- [8] Gilboa, I. (1987): "Expected Utility with Purely Subjective Non-Additive Probabilities," *Journal of Mathematical Economics* 16, 65 - 88.
- [9] Gilboa, I. and D. Schmeidler (1989): "Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior," *Journal of Mathematical Economics* 18, 141 - 153.
- [10] Gilboa, I. and D. Schmeidler (1993): "Updating Ambiguous Beliefs," *Journal of Economic Theory* 59, 33-49.
- [11] Herstein, I. N. and J. Milnor (1953): "An Axiomatic Approach to Measurable Utility," *Econometrica* 21, 291 - 297.
- [12] Nishimura, K. G. and H. Ozaki (2003): "A Simple Axiomatization of Iterated Choquet Objectives," unpublished manuscript.
- [13] Nishimura, K. G., and H. Ozaki (2004): "Search and Knightian Uncertainty," *Journal of Economic Theory* 119, 299 - 333.
- [14] Nishimura, K. G. and H. Ozaki (2014): "Liquidity Preference and Knightian Uncertainty," Discussion Paper Series CARF-F-337, The University of Tokyo. <http://www.carf.e.u-tokyo.ac.jp/english/workingpaper/F337e.html>
- [15] Ozaki, H. and P. A. Streufert (1996): "Dynamic Programming for Non-additive Stochastic Objectives," *Journal of Mathematical Economics* 25, 391 - 442.
- [16] Savage, L. (1954): *The Foundations of Statistics*, John Wiley, New York.
- [17] Schmeidler, D. (1986): "Integral Representation without Additivity," *Proceedings of the American Mathematical Society* 97, 255 - 261.
- [18] Schmeidler, D. (1989): "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity," *Econometrica* 57, 571 - 587.
- [19] Shafer, G. (1976): *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton.
- [20] Shapley, L. S. (1971): "Cores of Convex Games," *International Journal of Game Theory* 1, 11 - 26.
- [21] Wang, T. (2003): "Conditional Preferences and Updating," *Journal of Economic Theory* 108, 286 - 321.

(2014年7月13日 受付)

[問い合わせ先]

〒108-8345 東京都港区三田2-15-45

慶應義塾大学経済学部

尾崎 裕之

TEL : 03-5427-1574

FAX : 03-5427-1578

E-mail : ozaki@econ.keio.ac.jp

著者紹介

 おざき ひろゆき
 尾崎 裕之 [非会員]

1986年、慶應義塾大学経済学部卒業。1992年、米国ウィスコンシン大学マディソン校博士課程修了。Ph.D. (経済学)。ウェスタン・オンタリオ大学(カナダ)助教授、東北大学助教授を経て、2005年より慶應義塾大学教授。数理経済学、意思決定論のマクロ経済学への応用などを専門とする。主要業績：“Conditional Implicit Mean and the Law of Iterated Integrals,” *Journal of Mathematical Economics* (2009) など。日本経済学会会員。数理経済学会理事。