Choquet 積分の T-formula による簡単計算[†]

塚本 弥八郎*

ファジィ積分の中で、ショケ積分の別表現として包除積分あるいはメビウス変換による表現があるが、本論文では、もう一つの別表現を提案し、それを直接用いた簡単な計算手法を示す。通常、ショケ積分の計算にはあらかじめ並べ替えの操作が要求されるが、提案される別表現、T-formula、ではその必要はなく被積分関数そのまま計算可能である。また、測度が加法的ならば通常のルベーク積分、確率分布ならば確率変数の期待値の表現としても適用可能である。

本論文では、まず T-formula がショケ積分になることを証明し、この T-formula から出発した誰もが容易に使えるデータベース関数のみを用いたショケ積分の簡単な計算手法について述べる。

キーワード：非加法的測度、ショケ積分の別表現、データベース関数

1. 序 論

ファジィ測度およびファジィ積分については、すでにこれまで書籍[2]が出版されており、例題による解説[7]、また応用例[5, 8]も報告されている。

ファジィ積分の中で、ショケ積分の別表現として包除積分あるいは Möbius 変換による表現が研究されているが、本論文では、さらにもう一つの別表現について提案し、それを直接用いた簡単な計算手法を示す。

通常、ショケ積分の計算にはあらかじめ並べ替えの操作が要求されるが、提案されたショケ積分の別表現[11]ではその必要はなく被積分関数そのまま計算可能である。また、測度が加法的ならば通常のルベーク積分、確率分布ならば確率変数の期待値の表現としても適用可能である。

次章で記号、簡略表記および基本事項の定義を示す。第3章で、提案された別表現、T-formula、がショケ積分になることを証明する。第4章で、原定義を離れて、T-formula から出発した計算アルゴリズムを示す。ファジィ積分の計算については高萩[9]により Web 上でも公開されているが、本論文では、誰もが容易に使えるデータベース関数のみを用いたショケ積分の簡単な計算手法について述べる。

2. 準 備

(左辺) := (右辺)

を(左辺)は(右辺)により定義されると読む。

以下の記号を定める。V, ∧ は順に max, min を, $B \setminus A$ は差集合, $|A|$ は集合 A の基数を表す。

非負の実数の集合を次のように表す。

$R^+ := [0, \infty)$

$f: X \rightarrow R^+$ について, $\alpha \in R^+$ として, 次のような集合を表す簡略記号を用いる。

$\{f \geq \alpha\} := \{x : f(x) \geq \alpha\}$ 。

集合関数 $v \in (R^+)^{2^X}$ は次のように表記する。

$v(f \geq \alpha) := v(\{x : f(x) \geq \alpha\})$ 。

以下、第2章、3章を通じて、全体集合を有限集合 $N = \{1, \dots, n\}$ とする。

定義1：ファジィ測度

$v: 2^N \rightarrow R^+$ が次の3条件を満たすとき, v をファジィ測度または Capacities [1] と呼ぶ。

1. $v(\emptyset) = 0$
2. $v(N) > 0$
3. $\forall A, B \in 2^N, A \subseteq B \rightarrow v(A) \leq v(B)$ 。

定義2：ショケ積分

非負関数 $f: N \rightarrow R^+$ について,

$$C_v(f) := \sum_{i=1}^n \left(f(\sigma(i)) - f(\sigma(i-1)) \right) v(f \geq f(\sigma(i))) \quad (1)$$

ただし, $f(\sigma(0)) := 0$, $\sigma(i)$ は N 上の置換 (昇順) で, $f(\sigma(1)) \leq \dots \leq f(\sigma(n))$ を満たす [1]。

[†] A Simple Method of Calculating the Choquet Integral using T-formula

Yahachiro TSUKAMOTO

* 名城大学名誉教授

Emeritus Professor, Meijo University

以下, 既往の研究で明らかにされている(1)式の3つの別表現を示す.

定義3: 包除積分による表現

非負関数 $f: N \rightarrow R^+$ のファジィ測度に関する t -norm 型包除積分は次式で定義される. $f_i := f(i)$ として,

$$\otimes \int f \circ dv = \sum_{A \subseteq N} \left(\sum_{B \supseteq A} \left((-1)^{|B \setminus A|} \otimes_{i \in B} f_i \right) \right) v(A). \quad (2)$$

$\otimes$ を $\wedge$ とすると次式を得る.

$$IE_v(f) := \sum_{A \subseteq N} \left(\sum_{B \supseteq A} \left((-1)^{|B \setminus A|} \bigwedge_{i \in B} f_i \right) \right) v(A). \quad (3)$$

(3) 式は t -norm 型包除積分(2)式において t -norm として $\min$ を採用した場合のもので, このときシヨケ積分になることが示されている[10].

定義4: Möbius変換およびその逆変換

Möbius変換, $m: 2^N \rightarrow 2^N$ は次式で定義される.

$\forall A \in 2^N$ について,

$$m^v(A) := \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A \setminus B|} v(B). \quad (4)$$

逆 Möbius 変換は次式となる.

任意の $\forall A \in 2^N$ について,

$$v(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B). \quad (5)$$

定義5: Möbius変換値によるシヨケ積分の表現

包除積分(3)式は Möbius 変換値を用いて次式のように表すことができる.

$$C_m(f) := \sum_{A \subseteq N} \left(\bigwedge_{i \in A} f(i) \right) m^v(A). \quad (6)$$

定義6: v を被積分関数とする表現

$$L_f(v) = \sum_{i=1}^n \left(v(f \geq f(\sigma_i)) - v(f \geq f(\sigma_{i+1})) \right) f(\sigma_i) \quad (7)$$

ただし, (7) 式では, $\sigma_i := \sigma(i)$ としている.

(7) 式は入れ子構造をなす v を関数, f を加法的測度とした表現である[8]. すなわち, $f(\sigma_i)$ は区間 $[0, f(\sigma_i)]$ のルベーク測度とみなしている.

(5) 式を(3)式に代入することにより, (6) 式を導くことができる.

すなわち, 上述した(3), (6) および(7) 式はすべてシヨケ積分の原定義(1)式の別表現となっている.

3. T-formulaによる別表現

本章ではシヨケ積分のもう一つの別表現を考える([11]).

[命題1] (1) 式で定義された n 点集合の Choquet 積分の別表現として次式を得る,

$$T_v(f) := \sum_{A \subseteq N} \left(\bigwedge_{i \in A} f(i) - \bigvee_{j \notin A} f(j) \right)^+ v(A) \quad (8)$$

ただし, $f^+ := f \vee 0$, A^c は N に対する A の補集合を表す.

本稿でいう T-formula とは上の(8) 式を指す. その詳しい誘導については, 文献[11] に示されている. 本論文では, (8) 式が(1) 式になることを示す.

[命題1の証明]

集合関数 $h: 2^N \rightarrow R^+$ を次式で定義する.

$$h(A) := \left(\bigwedge_{i \in A} f(i) - \bigvee_{j \notin A} f(j) \right)^+. \quad (9)$$

その基数が k のすべての部分集合 $\forall A \subseteq N$ について,

$$\sum_{A: |A|=k} h(A) = (k \text{ 番目に大きい } f) - (\text{次に大きい } f). \quad (10)$$

π を N 上の置換(降順)とし, $f(\pi(n+1)) := 0$ とする.

すなわち, π は

$$f(\pi(1)) \geq \dots \geq f(\pi(n)) \text{ を満たす.}$$

$$\sum_{A: |A|=k} h(A) v(A) = \left(f(\pi(k)) - f(\pi(k+1)) \right) \cdot v\left(f \geq f(\pi(k))\right) \quad (11)$$

$$= \left(f(\sigma(n-k+1)) - f(\sigma(n-k)) \right) \cdot v\left(f \geq f(\sigma(n-k+1))\right). \quad (12)$$

したがって,

$$\begin{aligned} T_v(f) &= \sum_{A \subseteq N} h(A) v(A) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{A: |A|=k} h(A) v(A) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(f(\sigma(i)) - f(\sigma(i-1)) \right) v\left(f \geq f(\sigma(i))\right) \\ &= C_v(f). \end{aligned} \quad (13)$$

(Q.E.D.)

4. T-formula に基づく積分計算

本章では、ショケ積分の原定義から離れて、(8)式に基づく積分計算のアルゴリズムを示す。

$\forall A \subseteq X$ について、特性関数 $I_A: N \rightarrow \{0, 1\}$ を次のように言語的表現を用いて表す。

$$I_A(x) := \begin{cases} \text{"in"} & \text{if } x \in A \\ \text{"notin"} & \text{else} \end{cases}$$

簡単な計算手法として、身近にある Excel 2007 のデータベース関数を使用する。データベース関数“ $=DMIN(DMAX)$ ”は DB の領域、関数値 (f)、および検索条件の範囲を指定することにより、検索条件を満たす中での f の最小値 (最大値) を返す命令である。

簡単のため 2 要素の場合 $X = \{a, b\}$ について表 1 に基づいて詳述する。2 つの要素は名前や番号など名義尺度のままで良い。表 1 の第 1 行に 3 つの部分集合を $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ の順に書く。F 列は F14 を除いて備考欄として使用している。データベース領域 (以下、DB と呼ぶ) の第 1 行は関数の名称 f と 3 つの部分集合の名称からなる。第 B 列には、 f の値を、第 2, 3 行の C, D, E 列には対応する要素が各部分集合に属すれば“in”，属さなければ“notin”と書く。以上の (B1 : E3) の 3 行 4 列を DB として定義する。

検索条件 1 は (C6 : E7) の 2 行 3 列で、7 行目のすべての列に“in”と書かれたもの、および、検索条件 2 として、(C10 : E11) の 11 行目のすべての列に“notin”と書かれたものを作成しておく。

$DMIN$ の計算に当たって、最初の検索条件 1 で実行すれば、各部分集合に属するものの中での f の最小値を、 $DMAX$ の計算を検索条件 2 で実行すれば、各部分集合に属さないものの中での f の最大値を得る。13 行の C, D, E 列は、(9) 式に示した $h(A)$ の計算結果で、最後にすべての部分集合について $h(A)$ の和を以て、T-formula の計算終了である。

表 1 における C8, C13, F14 のセル情報を示す。

C8 : $=DMIN(\$B\$1 : \$E\$3, "f", C\$6 : C\$7)$,

C13 : $=MAX(C\$8 - C\$12, 0)$,

F14 : $=SUM(C14 : E14)$.

以上の準備を俟って、 $f(\cdot)$ と $v(\cdot)$ を入力するとただちに積分値を得る。なお、表 1 はできるだけ分かり易く作成したもので、データベースと検索条件を除けば、より少ないセルの使用で、さらに、入出力の工夫をすればより使いやすく作成することができる。

要素数が増加した場合については、DB と検索条件の領域を確定し、2 点集合の表 1 で示した方法に準拠し

表 1 T-formula によるショケ積分の簡単計算

	A	B	C	D	E	F
1		f	{ a }	{ b }	{ a,b }	Subset
2	a	30	in	notin	in	
3	b	12	notin	in	in	DB
4			100	60	200	Capacity
5						
6			{ a }	{ b }	{ a,b }	
7			in	in	in	検索条件 1
8			30	12	12	DMIN
9						
10			{ a }	{ b }	{ a,b }	
11			notin	notin	notin	検索条件 2
12			12	30	0	DMAX
13			18	0	12	$h(A)$
14			1800	0	2400	4200

て、データベース関数等を対応するセルに書き込んでおけばよい。

因みに、シングルトンにのみ $v(\cdot)$ を与え、加法性によりすべての部分集合の測度を求め、T-formula により、よく知られた積分、たとえば、通常のルベグ積分、確率変数の期待値、加重平均などいずれも最小必要限の入力で計算可能である。ここでは検索条件 1 を使った“ $DSUM$ ”という名のデータベース関数が活躍する。“ $DSUM$ ”の処理内容については割愛する。この場合、縦割りの積和で充分であるが、横割りに基づくショケ積分でも同じ積分値が計算できることを確認する上で有用である。

5. 結び

本論文では、Choquet 積分の原定義に比べて、T-formula による簡潔な表現およびこの表現に基づく簡単な計算手法を示した。提案された簡単計算の特徴として、被積分関数 f を昇順に並べ替えたり、番号付けなどは不要であること、言語使用の領域が多いことがあげられる。さらに、T-formula とデータベース関数の相性の良さは特筆すべき点であろう。

本稿は「ファジィ測度と積分のやさしい学び方」と題して行われた本学会支部での数回にわたる勉強会の成果に基づいており、初心者向けの教育的効果も目的の一つとしている。

謝 辞

第13回FSSの「温故知新」セッションへの参加を呼び掛けて下さいました林麩関西大学大学院教授に謝意を表します。これに応える中でT-formulaにたどり着きました。また、本学会東海支部会員の皆様には日頃ご指導頂き感謝します。最後に、本論文作成にあたり

レフェリ氏から貴重なコメントを頂きました, 記して御礼申し上げます.

参 考 文 献

- [1] G.Choquet:Theory of capacities, ANN. Inst. Fourier, Vol.5, pp.131-295, 1954
- [2] 菅野道夫, 室伏俊明: 講座ファジィ第3巻, 「ファジィ測度」, 日本ファジィ学会編, 日刊工業新聞社, 1993
- [3] Mesiar, R.:Choquet-like integral, J. Math. Anal. Appl., vol.194, pp.477-488, 1995
- [4] P. Benvenuti, R. Mesiar and D. Vivona: Monotone set functions-based integrals, In E. Pap (Ed.), *Handbook of measure theory*, Chapter 33, Amsterdam:Elsevier Science, 2002
- [5] Y. Tsukamoto and X. ZHAO: Cost Analysis of Joint Products with the Use of Fuzzy Integral, J. of Japan Society for Fuzzy Theory and Systems, Vol.14, No.4, pp.384-392, 2002
- [6] 室伏俊明他: 特集「ファジィ測度・積分」, 知能と情報 Vol.16, No.4, pp.2-35, 2004
- [7] 藤本勝成: 「入門: ファジィ測度とその周辺, 第1回〜第4回」, 知能と情報, Vol.20, No.2, No.3, No.4, No.5, 2008
- [8] S. Sriboonchita, W.Wong, S. Dhompangsa, and H.T. Nguyen: Stochastic Dominance and Applications to Finance, Risk and Economics, CRC Press, 2009
- [9] 高萩栄一郎: ファジィ測度とファジィ積分モデルによる総合評価法, 日本経営学会誌, Vol.31, No.2, pp.85-112, 2010
- [10] 本田あおい: 包除積分とその画像評価モデルへの応用, 第34回東海ファジィ研究会講演論文集, pp.10-1 ~ 10-6, Feb., 2013
- [11] 塚本弥八郎: 包除積分に関する一考察, in CDROM, 日本知能情報ファジィ学会評価問題研究会, 第18回あいまいな気持ちに挑むワークショップ (in 相馬), Nov., 2013 (2015年12月28日 受付)
(2016年2月3日 採録)

[問い合わせ先]

〒468-8502 名古屋市天白区塩釜口1-501
名城大学名誉教授
塚本 弥八郎
TEL: 052-834-6953
E-mail: yytsukamoto@ac.auone-net.jp

著 者 紹 介

つかもと や ちろう
塚本 弥八郎 [名誉会員]

1963年東京教育大学理学部物理学科卒業. 1963年4月より東京工業大学工学部制御工学科助手. 1971-1981年 Research Associate, Faculty of Engineering, University of Saskatchewan, Canada. 1981年福井県立短期大学経営学科教授. 1984年名城大学短期大学部商経科教授. 2003年名城大学理工学部情報科学科教授. 2010年定年退職. 第6期日本ファジィ学会会長. 著書: ファジィ情報論, 大学教育出版, 2004年.

A Simple Method of Calculating the Choquet Integral using T-formula

by

Yahachiro TSUKAMOTO

Abstract :

As for the other expressions of the Choquet integral with respect to non-additive measures, there are the ones using the Inclusion-exclusion integral or Möbius transform. In this paper another expression called T-formula is shown, which was proposed in 2013 by the author. In order to calculate the Choquet integral with respect to capacities, permutation is required in advance. Using this formula, such a permutation is not necessary. The purposes of this paper are to show that the Choquet integral is derived from the T-formula and to propose an easy method of calculating the Choquet integral using the T-formula with an example, where it suffices to use only the database function in Excel 2007 to obtain the solution.

Keywords : non-additive measures, expressions of Choquet integral, T-formula, database functions

Contact Address : **Yahachiro TSUKAMOTO**

Emeritus Professor, Meijo University

1-501, Shiogamaguchi, Tempaku-ku, Nagoya, 468-8502, Japan

TEL : 052-834-6953

E-mail : yytsukamoto@ac.auone-net.jp