ショートノート

ファジィ・モダス・ポネンスについての一考察[†]

塚本 弥八郎*

古典論理での三段論法（肯定法）では、含意文：“ P implies Q ” が正しくかつ含意における前件部が真のとき後件部を真とするが、前件部が偽のとき後件部については何も述べることはできない、他方、ファジィ推論においては、結論を表現するメンバーシップ関数の値がすべて 1 のとき、これを *unknown* と定義している。Max- $\otimes$ 合成（ $\otimes$ は T -ノルム）について、水本はファジィ関係、 $\otimes$ 、およびファジィな入力の色々なケースについて推論結果を求めている。本稿では、これら 84 通りのファジィ推論の計算結果を 5 つの規範的ルールに基づいて検討する。ファジィ関係をファジィ含意に基づいて構築する立場で考え、ポラーケースにおいては通常モダス・ポネンスに還元されること、含意文：“ P implies Q ” の前件部が否定されるとき結論については *unknown* となることは 5 つの規範のうちの一つとなる。

キーワード：添加含意、84 通りの計算結果、規範的接近

1. 序

古典論理では真か偽かのどちらかの真理値をとるような文、命題、のみを扱う。古典論理での三段論法（肯定法）では、 P および Q を命題として、含意文：“ P implies Q ” が正しくかつこの含意における前件部が真のとき後件部を真とするが、前件部が偽のとき後件部については何も述べることはできない、他方、ファジィ推論においては、結論を表現するメンバーシップ関数の値がすべて 1 のとき、これを *unknown* と定義している。2 値論理においてもある文が真かもしれないし偽かもしれないとき、「分らない」ということを発信するのも貴重な情報の一つである。ファジィ集合の円筒的拡張と射影に基づくファジィ推論法である Max- $\otimes$ 合成（ $\otimes$ は T -ノルム）について、水本はファジィ関係、 $\otimes$ 、およびファジィな入力の色々なケースについて推論結果を求めている。本稿では、これら 84 通りのファジィ推論の計算結果を 5 つの規範的ルールに基づいて検討している。ファジィ関係をファジィ含意に基づいて構築する立場で考え、ポラーケースにおいては通常モダス・ポネンスに還元されること、含意文：“ P implies Q ” の前件部が否定されるとき結論については *unknown* となることは 5 つの規範の一部となる。

第 2 節で記号と定義、第 3 節で Max- $\otimes$ 合成によるファジィ推論、第 4 節で規範的ルールについて、第 5 節で得られた知見および今後の課題について述べる。

2. 記号および定義

定義 1： T -ノルム

2 項演算 $\otimes$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ が次の 4 条件を満たすとき $\otimes$ を T -ノルムと呼ぶ、

1. $0 \otimes x = 0, \quad x \otimes 1 = x,$
2. $x \leq y \rightarrow x \otimes z \leq y \otimes z,$
3. $x \otimes y = y \otimes x,$
4. $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$

T -ノルムの例：

- (i) 論理積： $x \wedge y := \min(x, y),$
- (ii) 代数積： $x \cdot y := xy,$
- (iii) 限界積： $x \odot y := (x + y - 1) \vee 0,$
- (iv) 激烈積： $\text{if } x \vee y = 1, x \nabla y := x \wedge y, \text{ else } 0.$

ファジィ条件文 “ P implies Q ” の前件部（後件部）の数値真理値を $p(q)$ とする。

定義 2：R-含意 (Residual Implication)

(添加含意 [1] とも呼ばれている。)

$[0, 1]$ での R-含意を次式で定義する、

$$\text{Res}(p, q, \otimes) := \sup\{e \in [0, 1] \mid p \otimes e \leq q\} \quad (1)$$

$\otimes$ を論理積、代数積、限界積、および激烈積として (1) 式を解くと、順に、Gödel's, Gouguen's, Łukasiewicz's, Weber's Implication を得る [2].

3. Max- $\otimes$ 合成によるファジィ推論

A, A' を X 上、 B, B' を Y 上のファジィ集合とする。ただし、以下に用いるファジィ集合はすべて正規ファジィ集合とする。ファジィな言語表現を使う条件文または仮説文： $\text{if } A \text{ then } B$ が所与の知識として与えられていて、Incoming fact として A' が来たとき、 Y 上に得る推論結果を、 B' 、と記す。

本稿では、田中 [9] の表現に従い、

$$\forall y \in Y, \quad B'(y) = \bigvee_x (A'(x) \circ R(x, y)) \quad (2)$$

のように記す。ただし、 R はファジィ関係、 A' はファジィ集合で記述される Incoming Fact、 $\circ$ は合成則の一般的表現である。

水本 [3] は以下の 84 通りの場合の計算結果を示している。詳しい計算過程については文献 [4] に見られる。

7 通りのファジィ関係：“ A implies B ” の数値的真理値 (NTV) を、 $a \rightarrow b$ と記し、表 1 の第 2 列目に示す 7 通りのファ

[†] A Bit More About Fuzzy Modus Ponens
Yahachiro TSUKAMOTO

* 名城大学名誉教授
Emeritus Professor, Meijo University

表 1 7通りのファジィ含意の定義

	$a \rightarrow b$	Name
I1	$1 \wedge (1 - a + b)$	<i>Łukasiewicz</i>
I2	$(a \wedge b) \vee (1 - a)$	<i>Zadeh</i>
I3	$a \wedge b$	<i>Mamdani</i>
I4	$a \leq b : 1 \text{ else } 0$	<i>Weber</i>
I5	$a \leq b : b \text{ else } 0$	<i>Gödel</i>
I6	$(1 - a) \vee b$	<i>Kleene-Dienes</i>
I7	$a \leq b : 1 \text{ else } b/a$	<i>Gouguen</i>

表 2 Max- $\wedge$ 合成

$a \rightarrow b$	A	A^2	$\sqrt{A}$	$not A$
I1	$\frac{1+\mu_B}{2}$	$\frac{3+2\mu_B-\sqrt{5+4\mu_B}}{2}$	$\frac{\sqrt{5+4\mu_B}-1}{2}$	1
I2	$0.5 \vee \mu_B$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \wedge \mu_B$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \mu_B$	1
I3	μ_B	μ_B	μ_B	$0.5 \wedge \mu_B^{\vee}$
I4	μ_B	$\mu_B^2 \vee$	$\sqrt{\mu_B}$	1
I5	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1
I6	$0.5 \vee \mu_B$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \wedge \mu_B$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \wedge \mu_B$	1
I7	$\sqrt{\mu_B}$	$(\mu_B)^{\frac{2}{3}}$	$(\mu_B)^{\frac{1}{3}}$	1

第4節に示す **F1**~**F5** の基準に反する結果については、記号“ $\vee$ ”で示している。

表 3 Max- $\odot$ 合成

$a \rightarrow b$	A	A^2	$\sqrt{A}$	$not A$
I1	μ_B	μ_B	if $\mu_B \geq \frac{1}{4}$, μ_B , else $\mu_B + \frac{1}{4}$	1
I2	μ_B	μ_B	$1/4 \vee \mu_B$	1
I3	μ_B	μ_B	$\mu_B \vee$	$0 \vee$
I4	μ_B	$\mu_B^2 \vee$	$\sqrt{\mu_B}$	1
I5	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1
I6	μ_B	μ_B	$1/4 \vee \mu_B$	1
I7	μ_B	μ_B	$\sqrt{\mu_B}$	1

第4節に示す **F1**~**F5** の基準に反する結果については、記号“ $\vee$ ”で示している。

ジィ関係を検討している。

4つの入力：式(2)におけるファジィな入力 A' については以下の4通り、

$$A' = A, \quad \text{very } A, \quad \text{more or less } A, \quad \text{not } A.$$

3通りの $\otimes$ ：ファジィ入力 A' と R との Max- $\otimes$ 合成における $\otimes$ について、論理積、限界積、激烈積の3通りについて調べている。

(注) 代数積の場合の計算結果は、 T -ノルムの大小関係から論理積と限界積の計算結果の間にある。

3通りの $\otimes$ の中で、本稿では、Max- $\wedge$ 合成および Max- $\odot$ 合成則についての56通りの計算結果を表2, 3に示す。

4. F.M.R.の規範的性質

本稿では、たとえば、“*tall*” implies “*heavy*”, に比してその逆は言い難いようなファジィ含意に基づいて構築されるファジィ

関係の使用を前提にしている。

Fuzzy Modus Ponens が満足すべき性質について以下の基準を考える。

F1：ポラーケースとして、いつでも2値論理におけるモダス・ポネンスへ帰還できる、

F2： $A' = A$ のとき、 $B \subseteq B'$ 、

F3： $A' = \text{very } A$ のとき、 $B' = B$ 、

F4： $A' = \text{more or less } A$ のとき、 $B' = \text{more or less } B$ 、

F5： $A' = \text{not } A$ のとき、 $B' = \text{unknown}$ 。

各基準について説明を加える。

F1：本稿では、*extension and project* に基づくファジィ推論ではなく、ファジィ・モダス・ポネンスに限定して述べているので、ポラーケースとして、いつでも2値論理におけるモダス・ポネンスに基づく推論へ帰還できることが保障されなければならない。この基準は B より曖昧さの少ない出力を禁じるものである。

F2： $A' = A$ のとき、 $B' = B$ を要請するのが自然に見えるが、推論を重ねるたびに曖昧さが何程か増大するという場合があり得ることを主張している。

F3：「 $A' = \text{very } A$ のとき $B' = B$ 」は、もし、 $B' = \text{very } B$ を主張するならば、前提の関係が含意ではなく、双含意(同値)関係の存在についての知識を使っていることを意味する。

F4： $A' = \text{more or less } A$ という入力に対して、 $B' = \text{more or less } B$ を得るのは、入力のあいまいさが何程か出力に反映されるという意味で妥当である。

F5： $A' = \text{not } A$ のとき $B' = \text{unknown}$ とするのはモダス・ポネンスの図式で特徴的なことあり、ファジィ・モダス・ポネンスの場合も例外ではない。

補足 文献[5]では、表4として、Max- ∇ 合成について掲載されているが、本稿では文章で述べる。**I4**は3つのすべての合成について、入力 $\text{very } A$ に対して $\text{very } B$ を出力としており、これは規範 **F3** に反する。ただし、**I2**については、Max- ∇ 合成則では規範 **F3** に反するが、他の2つの合成則では5つの規範に反してはいない。

5. 結び

84通りの計算結果を **F1**~**F5** の基準について調べると、ファジィ含意に関しては、**I1**, **I5**, **I7** の R-含意の仲間達が残る、さらに、激烈積による含意の定義および Max- ∇ 合成を除けば、Zadeh [6–8] によるファジィ含意の定義、**I2**, が有効となる。

次の課題は $\text{not } B'$ を入力とした場合、ポラーケースで通常の対偶に還元されるか等の検討である。

謝辞

本稿作成にあたり、水本雅春大阪電気通信大学名誉教授より氏の労作[4]における計算結果の使用を快諾頂きました。記して謝意を表します。

参考文献

[1] 杉原丈夫: 数学的論理学, 4版, 横書店, 1975.

- [2] 塚本弥八郎: “添加含意再考,” 第 29 回ワークショップ講演論文集, 3 月 5-6 日, 札幌, pp. 50-51, 2019.
- [3] 水本雅春: “Fuzzy 論理と Fuzzy 推論,” 数理科学, Vol.25, No.2, pp. 10-18, 1987.
- [4] M. Mizumoto: “Fuzzy conditional inference under max- $\odot$ composition,” *Information Sciences*, Vol.27, No.3, pp.183-209, 1982.
- [5] 塚本弥八郎: “FMP への規範的接近,” 第 48 回東海ファジィ研究会講演論文集, 2 月 16-17 日, P1-07, pp. 1-4, 2020.
- [6] L. A. Zadeh: “The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning – I,” *Information Sciences*, Vol.8, No.3, pp. 199-249, 1975.
- [7] L. A. Zadeh: “The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning – II,” *Information Sciences*, Vol.8, No.4, pp. 301-357, 1975.
- [8] L. A. Zadeh: “The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning – III,” *Information Sciences*, Vol.9, No.1, pp. 43-80, 1975.
- [9] 田中英夫: “第 10 章 ファジィ推論とその応用,” ファジィモデリングとその応用, 田中英夫著, 朝倉書店, 1990.
- [10] M. Baczyński and B. Jayaram: *Fuzzy Implications*, Springer-Verlag, 2008.
- [11] Y. Tsukamoto: “A Normative approach to fuzzy logic reasoning using residual implication,” *J. Adv. Comput. Intell. Intell. Inform.*, Vol.13, No.3, pp. 262-267, 2009.
- [12] 中島信之: ファジィ論理のほとんど全て, 三恵社, 2015.
- [13] 塚本弥八郎: “一般化ファジィ推論,” 第 45 回東海ファジィ研究会講演論文集, 8 月 6-7 日, 蒲郡, pp. 5.1-5.6, 2018.

(2020 年 4 月 2 日 受付)

(2020 年 5 月 22 日 採録)

[問い合わせ先]

名城大学名誉教授

塚本 弥八郎

E-mail: yytsukamoto@ac.auone-net.jp

—— 著 者 紹 介 ——

つかもと やちろう
塚本 弥八郎 [名誉会員]

1937 年生. 1963 年 東京教育大学理学部物理学科卒業, 同年 4 月 東京工業大学工学部制御工学科助手. 1979-1981 年 Research Associate, Faculty of Engineering, University of Saskatchewan, Canada. 1981 年 福井県立短期大学経営学科教授, 1986 年 名城大学短期大学部教授. 1999-2000 年 第 6 期日本ファジィ学会会長, 2003 年 名城大学理工学部教授, 2010 年 日本知能情報ファジィ学会名誉会員. 工学博士. 著書: 共著: ファジィシステム (廣田薫編), 計測自動制御学会, 第 2,3,4 章, 1990 年. ファジィ情報論, 大学教育出版, 2004 年 等.

A Bit More About Fuzzy Modus Ponens

by

Yahachiro TSUKAMOTO

Abstract:

Since Lotfi A. Zadeh formulated the compositional rule of inference so called “*extension and projection*,” various kinds of fuzzy reasoning methods have been proposed with their mathematical properties. Mizumoto studied about many cases based on Max- $\otimes$ composition. The cases lead to *T*-norm family of fuzzy reasoning methods. In the *fuzzy modus ponens*, $\otimes$ is used twice, when defining fuzzy implication and the process of composition. Under the normative criteria required for *fuzzy modus ponens*, we discuss which *T*-norms noted by $\otimes$ have good properties. In the usual modus ponens, when both “*P* implies *Q*” and the antecedent are valid, the consequent is right, but when the antecedent is false, we can say nothing about the truth of the conclusion. Also like the above case, *unknown* should be assigned to the conclusion inferred by fuzzy modus ponens, which is one of the five criteria.

Keywords: residual implication, 84 computational results, normative approach

Contact Address: **Yahachiro TSUKAMOTO**

Emeritus Professor, Meijo University

E-mail: yytsukamoto@ac.auone-net.jp