LC梯子形回路や単位素子で得られる固有振動

永井 信夫¹（北海道大学）、任 捷²（北海道大学）、谷萩 隆嗣³（信号処理技術研究所）

Eigen Oscillation Obtained from LC Ladder Circuit and Unit Elements

Nobuo Nagai¹, Jie Ren² (Hokkaido University)

and Takashi Yahagi³ (Signal Processing Technology Laboratory)

E-mail: ¹nagai@es.hokudai.ac.jp, ²renjie@lmd.ist.hokudai.ac.jp, ³yahagi@risp.jp

Abstract Voltage and current of electricity or electro-magnetic wave are presented by complex functions. Since product of voltage and current represents power, power is presented by complex function. Real part of power presents energy, and imaginary part of power presents reactive power. Eigen oscillation is caused by reactive power. It is well known that unit element of distributed constant circuit has eigen oscillation. LC ladder circuit also has eigen oscillation. This paper shows the condition of a cascade matrix of the circuit having eigen oscillation.

キーワード：複素電力，固有振動，LC梯子形回路，縦続行列，反復パラメータ理論，単位素子

Keywords: complex power, eigen oscillation, LC ladder circuit, cascade matrix, iterative parameter theory, unit element

1. はじめに

本講義シリーズの前の第1回目に、LC梯子形回路およびその回路の入出力ポートを接続して環状にした回路の固有振動を求めた。この固有振動は力学では考えられない電気や電磁気特有の物理現象で、エネルギーが0である無効電力であり、振動をしているがエネルギーを消費していないものである。量子力学においては量子振動というエネルギーを消費するとは考えられない振動があり、上記の固有振動を物理現象や量子力学の現象と関係付ける試みを、ここで考えることにする。

1次元結晶の等価回路としてLC梯子形回路が得られるが、そこで用いられるもの（すなわち、物理的には質量で表され、Lに等価となるもの）を分子や原子と仮定するならば、その1次元結晶の固有振動は物性の性質を表すスペクトルと考えることができるのではなかろうか？また、用いられるものが陽子や中性子とみなせば、その固有振動は中間子という素粒子に対応するのではなかろうか？

このように考えるに至った原因は、LC梯子形回路は開いた弦であり、LC梯子形回路の入出力ポートを閉じて環状にした回路は閉じた弦のように考えられ、超弦理論[1]への回路理論の応用の一つと考えられる。しかも超弦理論では振動を問題とし、量子振動のようにエネルギーを消費しないで、永遠に続く振動のように考えられ、無効電力から得られる固有振動が当てはまるように考えられたからであ

る。

そのような考えの下で、1次元結晶を考えてみよう。LC梯子形回路の解析は分布定数回路の解析に類似した反復パラメータ理論で行われた。また、その方法を用いると、LC梯子形回路は分布定数回路の素子である「単位素子」と類似した素子と考えられる。そこで、本文ではLC梯子形回路の特長を考察し、単位素子との相違点を考え、それらで構成される回路の固有振動を考えることにする。

2. LC梯子形回路の固有振動

本講義シリーズの第1回目には、LC梯子形回路の解析が反復パラメータ理論[2]で行えることを示した。すなわち、図2.1に示す基本LC梯子形回路の縦続行列は、反復パラメータ Λ_1 , Λ_2 , Z_{J1} および Z_{J2} を用いて次のように求められることを示した。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{Z_{J1} + Z_{J2}} \begin{pmatrix} Z_{J1}\Lambda_1 + Z_{J2}\Lambda_2 & Z_{J1}Z_{J2}(\Lambda_1 - \Lambda_2) \\ \Lambda_1 - \Lambda_2 & Z_{J2}\Lambda_1 + Z_{J1}\Lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ところで、図2.2に示すLC梯子形回路は図2.1に示す基本区間を4区間反復接続した回路なので、図2.2に示す回路の縦続行列は反復パラメータの性質を利用すれば、式(2.1)

を用いて、次のように表すことができる。

$$\frac{1}{Z_{J1} + Z_{J2}} \begin{pmatrix} Z_{J1}\Lambda_1^4 + Z_{J2}\Lambda_2^4 & Z_{J1}Z_{J2}(\Lambda_1^4 - \Lambda_2^4) \\ \Lambda_1^4 - \Lambda_2^4 & Z_{J2}\Lambda_1^4 + Z_{J1}\Lambda_2^4 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

反復パラメータ理論の特長の一つとして、通過帯域と阻止帯域とを求めることができ、図 2.1 や図 2.2 に示す回路の通過帯域は次のように求められる。

$$0 \leq \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (2.3)$$

図 2.1 非対称 LC 梯子形回路

Fig.2.1 Asymmetric LC ladder circuit

図 2.2 非対称一周期構造の LC 梯子形回路

Fig.2.2 An asymmetric-periodic LC ladder circuit

通過帯域内では、反復パラメータの Λ_1 および Λ_2 は位相を表し、次のように表される。

$$\Lambda_1 = \exp(j\beta_a) \quad (2.4a)$$

$$\Lambda_2 = \exp(-j\beta_a) \quad (2.4b)$$

ここに、位相 β_a は次のように表される。

$$\cos \beta_a = 1 - \omega^2 \frac{LC}{2} \quad (2.5)$$

なお、 $\cos \beta_a$ は角周波数 ω の減少関数であり、通過帯域内の位相 β_a は次式を満たす。

$$0 \leq \beta_a < \pi \quad (2.6)$$

また、通過帯域内では反復パラメータ Z_{J1} と Z_{J2} とは互いに共役複素数となることが示される。すなわち、

$$Z_{J2} = Z_{J1}^* \quad (2.7a)$$

ここに、 Z_{J1} は次のように表される。

$$Z_{J1} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4} LC} + j \frac{L}{2} \omega = R_{K1} + jX_K \quad (2.7b)$$

図 2.2 に示す LC 梯子形回路の固有振動は 3 個得られ、それらは式(2.5)で表される位相 β_a が 45° 、 90° および 135° となることが示され、それらの角周波数 ω は次のように求められる。

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3}{LC}} \quad (2.8)$$

前回の第 1 回目には図 2.2 に示す回路の入出力ポートを接続して得られる図 2.3 の環状の回路では、 ω_1 および ω_3 の波は環状の回路を一周したときに反対符号の波が重なることになり、振動は消えて固有振動とはならない。したがって、その角周波数は式(2.8b)で与えられる ω_2 のみとなることが示されている。

図 2.3 環状の LC 梯子形回路

Fig.2.3 Loop type LC ladder circuit

図 2.2 に示す回路は開かれた弦に似ていて、図 2.3 に示す回路は閉じた弦に似た回路のように見える。そのような見方をすれば、超弦理論への回路理論の応用が役立つようにも考えられよう。また、LC 梯子形回路よりは分布定数回路[3]、すなわち、単位素子を用いた回路の方がより弦に似ているように考えられるので、次章では単位素子を用いた回路の固有振動などを考えることにしよう。

3. 単位素子の固有振動

前章で LC 梯子形回路および LC 梯子形回路の入出力ポートを接続して環状にした回路が開いた弦および閉じた弦に似ていることが考えられるが、より弦に似た回路として分布定数回路の単位素子が考えられる。そこで、本章では単位素子を用いた回路について考え、単位素子で生じる固有振動を考えよう。

図 2.4 単位素子

Fig.2.4 Unit element

単位素子は無損失電信方程式から得られる長さ l の回路素子であり、単位素子の表現はいろいろとあるが、ここでは弦の表現に似たものを用いるために、端子対の相手はアース（大地あるいは遮蔽）とする。そのため、ここでの単位素子の表現は図 2.4 に示すように片側の端子はアースとする。また、このアースを省略することもある。

単位素子の縦続行列は、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} V_G \\ I_G \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda R_0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_R \\ I_R \end{pmatrix} \quad (2.9a)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta l & jR_0 \sin \beta l \\ \frac{j}{R_0} \sin \beta l & \cos \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_R \\ I_R \end{pmatrix} \quad (2.9b)$$

ここに、 R_0 は特性抵抗、 λ はリチャーズの変数と呼ばれ、次のように表される純虚数である。ただし、信号処理で用いられる z 変換の z^{-1} に合わせているので、次式のように表す。

$$\lambda = \tanh j\beta l = \tanh \frac{sT}{2} = j \tan \theta / 2 \quad (2.9c)$$

$$z^{-1} = \exp(-sT) \quad (2.9d)$$

ここに、 β は位相定数、 l は単位素子の基準の長さ、 s はラプラス変換の変数で複素周波数パラメータ、 T は単位素子を往復するに必要な時間、 θ は波が単位素子を往復するときの電気長である。

単位素子の固有振動を求めよう。入出力ポートの両方を接地あるいはアースしたものが固有振動になるかどうかを調べよう。すなわち、負荷をアースして抵抗を 0 として入力ポートから見た入力インピーダンス Z_{in} は次のように求まる。

$$Z_{in} = jR_0 \tan \beta l \quad (2.10)$$

したがって、 Z_{in} が 0 になるのは次の場合である。

$$\beta l = n\pi \quad (2.11)$$

また、入出力ポートの両方を開放して抵抗を ∞ とした場合も式(2.11)が固有振動の条件となる。したがって、固有振動は位相が重要なパラメータとなり、回路の位相（電気角）が $n\pi$ のときに固有振動が得られる。

それでは、どうして LC 梯子形回路や単位素子で固有振動が得られるかを考えよう。

回路理論では電圧と電流という二つの複素関数を有効に用いるために、2 行 2 列の行列での表記が必要であり、次のように表される縦続行列を用いる。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

ただし、ここでは I_2 の電流方向も左から右を正の方向としている。

回路理論には力学とは異なる定義がいくつかあり、その一つが相反性である。式(2.12)で与えられる縦続行列での相反性は次のように表される。

$$AD - BC = 1 \quad (2.13)$$

すなわち、縦続行列の行列式が 1 である。

また、エネルギーの保存則を有効に利用するためには、無損失回路が重要である。相反性を満たし、無損失回路の条件は次のように与えられる。

式(2.13)が成り立ち、しかも次の条件を満たす。

A および D は実数

B および C は純虚数 (2.14)

LC 梯子形回路も単位素子も式(2.13)および式(2.14)を満たしているが、その他に固有振動が求められる条件を考えておこう。

式(2.12)で与えられる縦続行列の固有値が単位ベクトルとなる角周波数範囲が通過帯域になるから、通過帯域の条件が次のように与えられる。

$$-1 < \frac{A+D}{2} = \cos \beta < 1 \quad (2.15)$$

ところで、LC 梯子形回路は直列素子も分路素子も 1 種類の回路素子のみで構成されているので、減衰極を持たない。また、減衰極がある回路では縦続行列の B または C は減衰極で ∞ となり、減衰極の付近で極めて大きくなり、式(2.15)を満たさないで、通過帯域とはならない。

なお、減衰極では B あるいは C は純虚数であるが、その符号が変化するから、減衰極で位相が π すなわち 180° 変化する。

ここで注意すべき点は、純虚数の B と C との符号が異なる場合には、

$$BC > 0 \quad (2.16)$$

となるため、式(2.13)より次の条件が求まる。

$$AD > 1 \quad (2.17)$$

A と D とが同符号の場合には次の二つの式が成り立つ。

$$AD > \sqrt{AD} > 1 \quad (2.18a)$$

$$\left| \frac{A+D}{2} \right| > \sqrt{AD} > 1 \quad (2.18b)$$

したがって、式(2.15)が成り立たないので通過帯域ではない。なお、非対称回路では A と D とが異符号の場合にも通過帯域となる場合があるが、その場合は式(2.17)が成り立たないから通過帯域とはならない。

減衰極のない回路に対しては縦続行列の要素はすべて ω の多項式となるから、多項式の零点が問題となり、その結果、式(2.16)が重要な役割を果たす。すなわち、縦続行列の B と C とが異なる多項式の場合には多項式の零点が異なることになり、その零点の近くでは式(2.16)が成り立つため阻止帯域が生じる可能性が高くなる。ところで、LC 梯子形回路のいくつかの回路を反復接続したときには、回路の次数は高くなるが B と C との比は変わらない。すなわち、式

(2.2)の性質を利用すれば、次式のように表される。

$$\frac{B}{C} = Z_{J1} Z_{J1}^* = R_{K1}^2 + X_K^2 \quad (2.19)$$

すなわち、反復接続をくり返しても通過帯域の範囲内ではBとCとは同じ多項式をもち、位相が大きくなっても異なる符号とはならず、位相 $n\pi$ の数が増してゆく。そのため、固有振動の数が増してゆくことを表している。

単位素子も縦続行列のBとCとの比は次のように表され

$$\frac{B}{C} = R_0^2 \quad (2.20)$$

位相 $n\pi$ での固有振動が求まる。

LC梯子形回路や単位素子から固有振動が求まることが示されたが、量子振動と同様にエネルギーを消費しないと考えられる固有振動がどうして問題なのかを示すと考えられる文章を次章で引用しておこう。

4. 共鳴とエネルギー

エネルギーと真空とが振動に関係しているという文章を文献[1]の 29 ページ以降に述べているので、その一部を以下に引用しよう。

『南部陽一郎は、「真空」の構造の解明によって、素粒子の質量の起源を説明した。広辞苑によると真空とは「物質のない空間」のことである。空虚な空間がなぜ構造をもつか。そしてそれがなぜ素粒子の質量と関係があるのか。(中略)

全体のエネルギーは個々の粒子のエネルギーの総和であるから、粒子がまったく存在しない状態が最も低いエネルギーをもつ。そこで、最低エネルギー状態のことを真空と呼ぶことにすると、この場合には、「物質のない空間」という辞書の定義と一致する。

1957 年にバーディーン、クーパー、シュリーファール（以下では3氏の名前の頭文字をとってBCSと呼ぶ）は、超伝導の原理を説明する画期的な理論を発表した。電子の間に働く力を計算にいれると、通常考えられている真空よりもさらにエネルギーの低い別な状態が存在し、これが超伝導の状態を表しているというのである。超伝導は辞書の定義に沿わない真空をもっていたことになる。

今回のノーベル賞の受賞対象となった南部の業績は、BCS理論についての疑問に端を発している。そこで、南部の発見の原点となった超伝導理論についてまず解説しよう。

金属の中を運動している電子に着目する。パウリの排他律により、1つの電子軌道には1つの電子しか入れない。したがって、電子間の力を無視すると、エネルギーの低い電子軌道から電子を順番に詰めていった状態が電子系全体の最低エネルギー状態になる。しかし実際には、電子の間にはクーロン場による斥力と、金属結晶格子の振動が媒介する引力が働いている。クーロン斥力は金属中の他の電荷によって遮られて弱くなるので、格子振動が媒介する引力が勝って、電子の間に働く力が全体で引力になることがあ

る。この場合に、電子数の異なる状態を量子力学的に重ね合わせることで、エネルギーのより低い状態を構成し、それを使って超伝導を説明するのがBCS理論である。』

上記の説明では、真空という線形方程式であるマクスウェル方程式を満たす空間と、線形方程式では表されないと考えられる超伝導とが、物理学的には相等しいという上記の説明にはなにか疑問を持っても良いように感じられる。その原因はエネルギーの観点のみで現象を観ていて、電磁波で生じるエネルギーではない無効電力を、実関数での表現ではエネルギーと見なすからではないかと考えられる。

本講義シリーズでは固有振動を主目的の問題と考えているが、その理由は物理学では振動をしていれば必ずエネルギーが伴うと解釈しているので、エネルギーを消費しない固有振動についての話題は皆無である。しかしながら、上の文で述べている金属結晶格子の振動は量子振動のように理解でき、エネルギーを消費しない振動のように解釈できるのではなかろうか？

すなわち、量子力学では粒子と波動との二重性があり、光と電磁波との波動は電氣的にマイナスとなる電子という粒子のエネルギーと関係している。そのように考えると、ここで考えている固有振動が波動として振舞うものに対応する粒子は何であろうか？本文では電圧と電流とを考えているが、電子という粒子とは無関係であり、それが波動として振舞うものとしてはスペクトルや素粒子と考えることができないであろうか？特に質量を持ったものが質量のほとんど等しい中性子と陽子と考えた場合、その固有振動が波動として振舞うものは素粒子と考えられないか？

本文では電子が直接には関係しない問題を金属結晶格子の振動と考え、それこそが固有振動に関係すると考えている。

ところで、2013年5月23日 東海村にある「J-PARC」の放射性物質漏れ事故の原因は、加速した陽子の軌道を制御する電磁石の不具合により、高いエネルギーを持つ陽子が原子核素粒子実験設備に一気に流れ込んだためとみられるとの発表があった。これは加速した陽子をビームとして金に当て、素粒子を発生させる実験をしていたもので、電子には無関係の原子核素粒子の問題で、原子核の格子の問題であり、これこそが格子振動、すなわち、固有振動が関係する問題と考えられる。

そのようなわけで、金属や原子核における無効電力すなわち、固有振動について考察を続けることにする。

LC梯子形回路も単位素子も固有振動をもつことが示されたが、LC梯子形回路は非対称であり、単位素子是对称回路で解析がより容易なこと、および回路形がより弦に似ていることなどから、単位素子によって構成される回路の固有振動を以後主として考えてゆく。

なお、単位素子の固有振動は位相 βl が $n\pi$ の角周波数で求まるので、単位素子に対しては無限個の固有振動が求まることになる。ところで、物理学の理論に関して「低エネルギー有効理論」という考えがあるので、その考えについ

て、文献[1]の88ページから次の文を引用しておこう。

『物理学の理論は常に真実の近似である。量子電磁力学は素粒子の「標準模型」と呼ばれる場の量子論の近似であり、その「標準模型」自身はさらに根源的な模型の近似であると考えられている。このような近似的模型は、低エネルギー有効理論と呼ばれる。低エネルギー有効理論が漸近的自由性をもつ必然性はない。有効理論は高いエネルギーでは別な模型に置き換えられるので、紫外切断 Λ がそのエネルギーを超えたところまで模型が整合性を保つべきだと要求する理由がないのである。』

本文では、LC梯子形回路を考えているが、それは非対称回路であり、しかも2種類の回路素子を用いているので、それよりも理論的に少し簡単な回路として単位素子を考えてところ、単位素子の固有振動はエネルギーの高いものも含まれることになった。LC梯子形回路では上記の引用文とは逆に低エネルギー有効理論を用いなくても、低エネルギーで抑えられているのであるから、その近似と考えた単位素子も低エネルギーで抑えられていると考えよう。すなわち、LC梯子形回路では通過帯域が求まり、1周期のLC梯子形回路の通過帯域が π までなので、1個の単位素子の通過帯域を単位素子の位相 βl が π までとしておけば、LC梯子形回路の近似とも解釈できよう。ただし、LC梯子形回路に対して位相 π は通過帯域に入らないが、単位素子に対してはその位相 βl が π は通過帯域に入ると仮定している。

5. 単位素子で構成される回路

分子や原子で構成される1次元結晶の等価回路としてLC梯子形回路が得られることを基にして、1次元結晶の固有振動がスペクトルと考えられることを述べてきた。ここでは、もう少し焦点を絞って、原子核で生じる固有振動を考えることにしよう。

原子核は中性子と陽子とで構成されているが、中性子と陽子との質量がほとんど等しいことが知られている。そこで、中性子と陽子の質量が等しいと仮定し、また、それらが対称回路と仮定できるとするならば、それらは単位素子として取り扱うことができると考えられる。そこで、以降は単位素子のみで構成される回路の固有振動について考察を続けることにしよう。

図2.2に示す回路は、図2.1に示す基本LC梯子形回路を4周期分接続した回路を示していて、単位素子を用いた回路で図2.2に示す回路に対応するのは、単位素子を4区間接続した回路であり、図2.5に示している。

図2.5 単位素子を4個接続した回路
Fig.2.5 A circuit constituted with four unit elements

図2.5に示す回路の固有振動は式(2.8)に示したLC梯子形

回路との相似性から、 βl が 45° 、 90° および 135° の3個の固有振動が求まることは理解できる。ただし、単位素子は対称回路のため、 βl が 180° も固有振動となり、入出力端を同時に接地または開放したときに合計4個の固有振動が得られる。

また、前回の講義シリーズ「回路理論における伝送と振動」の第4回に考えたように対称回路の場合には入出力端を接地と開放とした場合にも固有振動が得られ、図2.6に示す回路に対しては、 βl が 22.5° 、 67.5° および 112.5° の3個の固有振動が求まることも示される。

図2.6 入出力端を接地と開放とした回路
Fig.2.6 A unit element circuit terminated with earth and open circuit

図2.5に示す回路の入出力端を接続して得られる図2.7に示す回路の固有振動は図2.3に示す回路との相似性から、 βl が 90° のとき固有振動となることが理解できるが、単位素子が対称回路でしかも通過帯域であるから、 βl が 180° のときも固有振動となることが示される。

図2.7 4個の単位素子をループ状にした回路
Fig.2.7 A loop circuit constituted with four unit elements

6. 単位素子のループのある回路

図2.2や図2.5に示す1次元結晶のような回路よりも原子や金属結晶としては、図2.3や図2.7に示す環あるいはループを持つ回路の方が適しているように考えられる。そこで図2.8に示すような4個の単位素子をループ状にした回路を考え、基本ループ回路と呼ぶことにする。

基本ループ回路は4個の単位素子で構成されているが、入出力ポートが単位素子を通して異なるところにあり、図2.7に示す環状の回路とは異なる特性をもつことが予想される。また、基本ループ回路は分布定数回路理論[2]から見ると、池野ループの特殊な例であり、分布定数回路理論の性質を応用することができると考えられる。

図 2.8 単位素子で構成される基本ループ回路

Fig.2.8 A basic loop circuit constituted with unit elements

基本ループ回路の縦続行列は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \cos \beta l - \frac{\sin^2 \beta l}{\cos \beta l} & jR_0 \frac{\sin \beta l (4 \cos^2 \beta l - 1)}{4 \cos^2 \beta l} \\ \frac{j4 \sin \beta l}{R_0} & \cos \beta l - \frac{\sin^2 \beta l}{\cos \beta l} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

この回路の性質を知るために、映像または反復パラメータを求めてみよう。この回路は対称回路であるから、映像パラメータを求めることができる。映像パラメータでは通過帯域では映像抵抗が求まるので、まず映像抵抗 R_B を求め、それを図 2.9(a)に示す。この映像抵抗は単位素子の位相 βl が $\pi/2$ までは対称 LC 梯子形回路の映像抵抗と似た特性を示している。ところで、固有振動は位相と深く関わっているので、図 2.8 に示す回路の映像位相を求め、それを図 2.9(b)に示している。

図 2.9 からわかるように、単位素子は全角周波数で通過帯域であるが、図 2.8 に示すような単位素子を組み合わせた回路では、その映像位相 β_B が 180° で阻止帯域になる。そのときの単位素子の位相 βl は 90° より小さい角周波数で阻止帯域になっている。この場合、映像位相 β_B が 180° になる角周波数のみで映像抵抗 R_B が 0 になるので、その角周波数で入出力両端を接地したときに固有振動が得られることが示される。

なお、単位素子のみで構成される回路では位相 βl を折り返し軸としての特性となっているので、位相 βl が $\pi/2$ までの特性を求めれば十分であり、しかも図 2.9 に示すように位相 βl が $\pi/2$ より小さい角周波数で阻止帯域になるので、以降、位相 βl が $\pi/2$ までの特性を求めれば十分なことも示された。

以上の考察から、図 2.8 に示す基本ループ回路は図 2.1 に示す LC 非対称回路の特性と似た特性をもち、しかも対称回路となっていて、金属結晶を表すのに LC 回路よりも適していると考えられるので、次章では基本ループ回路と単位素子とで構成される回路について考えることにしよう。

図 2.9 基本ループ回路の通過帯域の(a)映像抵抗、および (b)映像位相

Fig.2.9 (a) Image resistance and (b) image phase in pass band for the basic loop circuit

7. 単位素子と基本ループ回路の接続回路

固有振動がどのような回路で得られるかを知るために、基本的な回路を接続したときに得られる特性を調べることから始めよう。そのために、単位素子と図 2.8 に示す基本ループ回路とを接続した回路の特性を得ることから考える。

図 2.10 に示す回路の縦続行列を求めよう。その縦続行列は位相 βl の三角関数で表されるので、式の簡単化のために、次のように表す。

$$s = \sin \beta l, \quad c = \cos \beta l \quad (2.22)$$

式 (2.22) を用いると図 2.10 に示す回路の縦続行列は次のように求まる。

$$\begin{pmatrix} c & jsR_0 \\ \frac{js}{R_0} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c - \frac{s^2}{c} & jR_0 \left(s - \frac{s}{4c^2} \right) \\ \frac{j4s}{R_0} & c - \frac{s^2}{c} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c^2 - 5s^2 & jR_0 \left(3sc - \frac{5s}{4c} \right) \\ j \frac{1}{R_0} \left(6sc - \frac{s}{c} \right) & c^2 - 2s^2 + \frac{s^2}{4c^2} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

図 2.10 に示す回路は非対称であるから、反復パラメータが求まる。図 2.11 には反復位相を示している。この回路の特長は通過帯域が二つに分かれていることである。これは縦続行列の B と C とが異なる多項式となっていることを示していて、単位素子と基本ループ回路との特性が異なることを示している。なお、この回路の位相は二つの回路の位相を加えた位相に等しく、合わせて 360° となっている。

図 2.10 単位素子と基本ループ回路とが接続した回路
Fig.2.10 A connecting circuit of unit element and basic loop circuit.

図 2.11 図 2.10 に示す回路の反復位相
Fig.2.11 Iterative phase in pass band for the circuit shown in Fig.2.10

8. むすび

LC 梯子形回路の周期構造を用いると反復位相が求まり、反復位相が $n\pi$ の角周波数で共鳴および固有振動が求まる。一方、前講義シリーズ「回路理論における伝送と振動」で示したように、周期構造を少し崩した対称回路の LC 梯子形回路では、影像位相が $n\pi$ のところで影像位相も影像抵抗も不連続となるため、影像位相が $n\pi$ の角周波数で共鳴が消え、両端を同時に接地したり、開放したりしたときに固有振動のみが求まる。

入出力ポートを閉じて固有振動を得たい場合には、位相が $n\pi$ の角周波数で共鳴が得られる必要があるため、その角

周波数で連続になる条件を求め、本文に示したように、周期構造を有するように反復接続する条件を得た。また、単位素子は偏微分方程式から得られる回路素子のため、単位素子も位相が $n\pi$ の角周波数で共鳴が得られることが示された。

参考文献

- [1] 大栗博司:素粒子論のランドスケープ, 数学書房 (2012).
- [2] 永井信夫:新しい概念による回路理論と量子力学への応用, (自費出版), 正文社 (2013).
- [3] A. Matsumoto (ed.): Microwave Filters and Circuit, Academic Press (1970).

永井 信夫 1961 年北海道大学・理・数学科卒。同年同大応用電気研究所助手, 1972 年助教授, 1980 年教授, 1992 年電子科学研究所教授, 2001 年同大を停年退職, 2002 年北星学園大学教授, 2008 年同大退職。分布定数回路理論およびデジタル信号処理の研究に従事し, それらの理論を量子力学に応用している。工博。

任 捷 1996 年北海道大学大学院工学研究科博士課程修了。2010 年 11 月・2011 年 3 月, 同大情報科学研究科博士研究員。回路理論の応用に関する研究に従事。博士(工学)。

谷萩隆嗣 1966 年東工大・理工・電子卒。1971 年同大学院・博・電子修了。工博。同年千葉大・工・電子・講師, 1974 年助教授, 1984 年教授, 2008 年同大を停年退職, 同年信号処理技術研究所・所長。デジタル信号処理の研究に従事。1997 年信号処理学会会長および Journal of Signal Processing 総編集長。著書, 「デジタル信号処理の理論 (全 3 巻)」, 「デジタル信号処理ライブラリー (全 10 巻)」(コロナ社) など。