球密度分布法による等濃度形状（第1報）*

—理論展開と2次元への適用—

石坂 尚也** 井越 昌紀**

Equi-Density Surface Based on Sphere Density Method

Naoya ISHIZAKA and Masanori IGOSHI

Equi-density surface like MetaBall is widely used in Computer Graphics so far. In this paper, we describe Sphere Density Method, a new equi-density method to represent shapes for industrial design. It uses skeleton for the base shape to control the result shape. Though the skeleton is restricted to a closed shape, it can include not only planes but also surfaces like NURBS. Therefore Sphere Density Method can generate a shape using the solid models represented by B-reps in any CAD system as a skeleton.

And we can constrain a part of the shape by the Sphere Density Method while manipulate the other part of the shape. Constraining the shape is the important advantage of this method to use in industrial design area.

Key words: Sphere Density Method, Equi-Density Surface, Implicit Surface, Metaball, Industrial Design

1. 序 論

現在、工業製品の外形デザインの初期工程は、紙の上に描くイラストで開始される。1つのイラストは形状のある方向からのビューを描いており、デザイナーは複数の視点からの形状を描くことで形状全体のイメージを膨らませている。この後にイラストから3次元のモックアップモデルを作成するが、この過程において、コンピュータ上で3次元の形状を表示しつつ3次元で直接デザインやデザイン変更ができれば、効率があがるとともに、より使う状況に即した環境でのデザインを行うことができると考えられる。このような観点で、意匠設計をコンピュータ支援するためのさまざまな研究がなされてきた。

現在産業界では、3次元CADシステムが重要な役割を果たしており、製品を開発する上で必須のものとなって来ている。しかしこれらのシステムは主に意匠設計が終了したあとでの製品を設計するための支援システムであり、操作体系は、形状を自由に變形することよりもむしろ、イラストや必要とされる拘束条件に合わせた形状を作成することに重点がおかれている¹⁾。このような目的のために、これらのシステムでは主にB-reps表現でつなぎ合わせたNURBS曲面を用いて形状を表現している。この形状表現を用いたシステムでは、形状の表面を近似した制御多面体を操作し形状を設計していくため、形状を局所的に詳細に設計していくのに優れている。またB-reps表現は複雑な形状を複数の単純な曲面のつなぎ合わせで表現できる利点がある。反面、全体的な形状の變形に弱く、1つの曲面パッチを変更すると滑らかにつながっている周りの曲面パッチを変更する必要が生じる。また、曲面パッチ間に新たな丸みを持たせようとすると、ぼかし面などの高度な処理が必要になるし、後でこの丸みの大きさを変化させることも困難である。

このような3次元CADシステムとは別に、3次元CG用のモデリングソフトウェアが開発され、映画やテレビ、宣伝などに広く用いられている。これらのシステムでは形状を大域的に

操作することができる。しかしこれらのシステムの最終目的は2次元の画像であるため、モデリングされた形状データが平面の集合で構成されていて粗かったり、閉じていなくても良かった。また、形状に拘束を加えることが難しく、例えば形状のある場所が厳密に円筒面を成すような操作を行うことが難しい。これらの理由から、既存の3次元CGシステムを用いて工業製品のモデルを作成することは困難である。

工業製品の形状モデリングでは、その製品が使われる環境から形状に対するさまざまな拘束が生じるし、要求される加工精度で滑らかでなければならない。このような観点から、意匠設計におけるモデリングを3次元で行うための理想的なシステムは以下の機能を含むことが必要であると考えている。

(1)円筒などの解析曲面の厳密な表現

(2)形状の幾何的連続性の制御

(3)柔軟な局所的、大局的形状操作

既存のデザイン工程から類推されるこれらの機能に加え、本研究では、形状デザインにおいては既存の形状の一部や、別々にデザインした部品、形状のデザイン要素であるフィーチャーなどを、設計する形状に組み入れることができる機能が必要であると考えている。そのために次の機能も要求される。

(4)外部から入力した形状を組み合わせた形状、またはそれらを基にした形状の作成

本研究ではこれらの機能を持つシステムの核となる形状表現として、メタボール²⁾に代表される、陰関数で表現された等濃度形状に着目している³⁾⁴⁾。この手法では複雑な形状を複数の単純な基本形状に基づいた等濃度面で表現し、形状を大域的に操作するのに優れている⁵⁾⁷⁾。生成される形状は十分滑らかであるし、形状に穴を開ける操作も容易に行える。CSGの手法と相性が良く、木構造を用いて単純な形状を複雑に組み合わせることができる⁸⁾⁹⁾。反面、既存の手法では、解析曲面を厳密に表現するのが難しい。また、形状操作に慣れが必要である。これは、形状に対する操作が間接的であり、形状の基本骨格に関するものと、形状の表面の制御に関するものとを的確に操作することが難しかったからである。

筆者らの目指す最終的な形状表現手法は、等濃度形状の利点、

* 原稿受付 平成14年4月21日

** 正会員 東京都立大学大学院（東京都八王子市南大沢1-1）

つまり大局的な操作性や穴あけ操作が容易に行え、CSG との相性の良さなどを生かしつつ、NURBS 曲面を組み合わせた B-reps の操作性なども包含できる手法である。

本論文では、これらの機能性を旨とし、より汎用性を増した新しい等濃度形状の手法である球密度分布法を提案する。そしてまず初めの段階として本手法を 2 次元に適用する。またこの手法を拡張して、形状の一部が所望の形状になるように形状拘束を行う手法についても述べる。

2. 等濃度形状

本論文では以下の陰関数式に基づく 3 次元形状を等濃度形状と呼ぶ。等濃度形状は、複数のスケルトンとよぶ基本要素の組み合わせによって定義される。スケルトンはそれぞれ独自の表面濃度をもち、これらが寄与する濃度の総和の等濃度面として表現される。つまり、式(1)を満たす点 $\mathbf{p}$ の集合 S である。

$$S: \sum_{i=1}^n D_i \cdot f_i(t_i(\mathbf{p})) - D_0 = 0 \quad (1)$$

ここで n はスケルトンの個数、 D_i は各スケルトンの表面濃度、 $t_i(\mathbf{p})$ は各スケルトンによって決まる $\mathbf{p}$ における濃度パラメータ、 f_i は各スケルトンの影響関数である。そして D_0 は形状のできる濃度値を表す¹⁰⁾。

各スケルトンの影響関数を総称して $f(t)$ とすると、 $f(t)$ は、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $0 \leq f(t) \leq 1$ となり、 $f(0)=1$ 、 $f(1)=0$ である。そして $0 \leq t \leq 1$ の範囲で単調減少の関数である。

また、従来のスケルトンは、点や線や直方体などの単純な形状をしており、それらからの最短距離で計算される濃度パラメータをもつ²⁾⁹⁾¹¹⁾¹²⁾。

この等濃度形状を支配する大きな要素は影響関数と濃度パラメータである。筆者らは以前に、影響関数について、形状の連続性の操作や局所操作などを行える汎用的な Bernstein 影響関数を提案している¹⁰⁾。

本論文では、影響関数の濃度パラメータについて、従来のスケルトンからの最短距離を用いた手法とは異なり、多様なスケルトンを受け入れる新しい手法である球密度分布法を提案する。この手法は 2 または 3 次元の区別なく用いることができるが、今回はまず初めの段階として、本手法の理論を展開し、2 次元に手法を適用して形状例を示している。

3. 球密度分布法

3.1 球密度分布法

本論文では、以下の用語を定義し、使用する。これらは手法の理解を容易にするために用いているが、物理学での意味とは異なる。

密度分布：任意の点 $\mathbf{p}$ の周りに配置した球の持つ、 $\mathbf{p}$ からの距離を関数としたスカラー値の分布。

質量：密度分布をある領域で積分したスカラー値

球密度分布法は、閉じた（内部と外部が区別できる）任意のスケルトンを入力として形状を作成する。スケルトンが与えられ、任意の点 $\mathbf{p}$ を中心とした球（2 次元の場合、円）を考え、スケルトン内部に入っている球の部分 (V_{in}) の質量を基に、その点の濃度値を計算する。濃度値がある一定値を取る点の集合が形状となる（図 1(a)）。

このような球密度分布法は 2 次元画像にフィルターをかけ

Fig.1 Parameters of Sphere Density Method

る処理によく似ているが、本手法の新しい点は、フィルターの結果をピクセルやボクセルの集合としてみるのではなく、形状とその周辺の濃度分布として捉えたところにある。

球密度分布法の式を以下に示す。

形状の基になる閉じたスケルトン内部の領域： V_{sk}

任意の点 $\mathbf{p}$ を中心とする半径 r_0 の球内部の領域： V_{sp}

$\mathbf{p}$ から見た密度分布： $\rho(r)$

ただし任意の点 $\mathbf{x}$ について、点 $\mathbf{p}$ からの距離を $r=|\mathbf{x}-\mathbf{p}|$ とし、 $r \leq r_0$ について考える。図 1(b) にこれらのパラメータの関係を示す。

V_{sp} の質量：

$$W_{sp} = \iiint_{V_{sp}} \rho(r) dv \quad (2 \text{ 次元の場合は 2 重積分}) \quad (2)$$

ただし dv は、微小領域である。

スケルトン内部に入っている球の領域：

$$V_{in} = \{V_{sk} \cap V_{sp}\} \quad (3)$$

球のスケルトン内部に入っている部分の質量：

$$W_{in} = \iiint_{V_{in}} \rho(r) dv \quad (2 \text{ 次元の場合は 2 重積分}) \quad (4)$$

ここで、

$$t_{sp} = 1 - \frac{W_{in}}{W_{sp}} \quad (5)$$

とおく。 t_{sp} は、球の全質量に対するスケルトンの外に出ている球の部分の質量比である。この t_{sp} を用いて、このスケルトンのみでできる等濃度形状 S は次の式で示される。

$$S: D_1 \cdot f(t_{sp}) - D_0 = 0 \quad (6)$$

ただし D_1 はスケルトンの中心濃度、関数 f は Bernstein 影響関数¹⁰⁾であり、

$$0 \leq f(t_{sp}) \leq 1 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (7)$$

である。また、 D_0 は形状ができる濃度値であり、等濃度形状を定義する上で $D_0 \neq 0$ かつ $D_0 \neq D_1$ でなければならないから、

$$0 < D_0 < D_1 \quad (D_1 \text{ が正の場合}) \quad (8)$$

となる。

本稿における検証形状の例ではすべて $D_1=1$ 、 $D_0=0.5$ を用いた。また、影響関数としては最も簡単な $f(t)=1-t$ を用いている。ただし、式(1)に球密度分布法のスケルトンを導入する場合は、他のスケルトンとの組み合わせの場合の形状連続性を考慮して $f(t)$ を決める必要がある。

図 2 に、スケルトンと、それによって得られた形状を示す。密度分布関数 ρ は、 $\rho(r)=1-(r/r_0)^2$ を用いており、これによって、3.2 節に示すように、スケルトンが直線分の集合であるため、曲率連続の形状となっている。そして、任意の点を中心

Fig.2 Shape derived from Sphere Density Method

として配置する円の大きさを図2(a)の左上に示している。また、図2(a)の細い折れ線は基のスケルトン形状であり、太線がそれによってできた形状を示している。そして、図2(b)は、太線で示した形状の周りの濃度場 $D_1 \cdot f(t_{sp})$ の等高線を、0.1 から 0.9 まで 0.2 刻みで示したものである。太線で示した形状は図2(b)の太線と同じもので、濃度値が $0.5(=D_0)$ の位置にできている。

ここで、この手法の重要な性質として、形状がスケルトンの形には依存するが、その分割数には依存しないことが挙げられる。NURBS 曲面などのパラメトリック曲面では、制御多面体をその形を変えないまま細かく分割すると形状が変化するが、球密度分布法では、スケルトンが同じ形を保っている限り、それを細かく分割しても形状は変化しない。これによりスケルトンのある一部だけ制御点を増やして、微妙に形状を操作することが容易に行える。

3.2 球内の密度分布関数 (2次元の場合)

3.1 節で述べた式において、密度分布 ρ は2つの機能を持つ。

1 つ目は形状の幾何的連続性を操作する機能であり、2 つ目は形状がスケルトンからどの程度離れるかを局所的に操作する機能である。

1 つ目の機能である形状の連続性の変化は、 $r=0$ と $r=1$ における ρ の値や微分値を変化させることで行う。スケルトンの形によっては濃度場の勾配が 0 となる特異点が生じる。形状上の特異点では、 ρ を操作しても連続性を制御することはできないが、それらは容易に表示できるし、スケルトンを操作することで除去することができる。

形状の特異点以外の場所において、現在までに行っている 2 次元での解析では、スケルトンが直線分の集合で定義される場合は、 $\rho(r) = 1$ を用いた場合、形状は接線連続となる。

また、 $\rho(r) = 1 - (r/r_0)^2$ を用いた場合、濃度場の勾配が 0 でない場所においては濃度場 (式(6)における $D_1 \cdot f(t_{sp})$) が任意の方向に沿って 2 階微分値まで連続になる。そのため、それによってできる形状は曲率連続になる (付録 A)。これにより、スケルトンが直線分だけではなく曲線分を含んでいる場合に、それらを折れ線で近似して計算したとしても、曲率連続の形状が得られる。

上の 2 次式の ρ の場合に、濃度場の 2 階微分値が連続かどうかを調べるためには、以下の 4 点を検査すればよい。これら以外の場所では、容易に 2 階微分値が連続であることがわかる。

- ・ ある点 p を中心とした円にスケルトンの直線が掛かる場合
- ・ p を中心とした円にスケルトンの頂点が掛かる場合
- ・ p が直線の真上にある場合
- ・ p がスケルトンの頂点の真上にある場合

これらを図3に示す。

Fig.3 Checking Points

Fig.4 Shapes of Different ρ

これらの点において、 p の移動による交差部分の質量の変化が 2 階微分値まで 0 であることが証明できれば、これらの点において濃度値が 2 階微分値まで連続となり、曲率連続の形状となる。

筆者らはこれらの 4 種類の点について、数式解析ソフトウェア (MathCAD) を用いて解析し、質量の変化が 2 階微分値まで 0 であるとの結果を得ている。

これら以外の密度分布関数に関して、形状が曲率連続になるための関数の一般的な条件については現在研究中である。

図4は、 $\rho(r) = 1$ (定数) および、 $\rho(r) = 1 - (r/r_0)^2$ とした場合の、図2と同じスケルトンと r_0 からできる形状を示している。円の大きさは左上に示している。ここで、図4(a) (定数の場合) は接線連続の形状である。図4(b) (2次式の場合) は図2と同じ曲率連続の形状である。また、(a)(b)の左下にある網掛けの部分は、このコーナー付近の形状を、平均曲率に比例する長さで法線方向にオフセットしたものである。

(a)の形状は(b)の形状と大きさはあまり変わらないが、(a)では(b)に比べ、直線部からコーナー部に入る位置において大きな曲率の変化がある。例えば図の点線の円で示した位置において、(a)は接線連続、(b)は曲率連続となっている。

密度分布 ρ の 2 つ目の機能として、密度分布関数 ρ が球の中心付近で大きく減少するように変化させることで、必要とする精度で形状をスケルトンに近づける操作を行える。前節で述べたように、球密度分布法ではスケルトンを細かく分割しても得られる等濃度形状は変化しない。これはスケルトンを任意に分割できる利点がある反面、NURBS 曲面のような、スケルトンを細かくすることによって得られる形状をスケルトンに近づけていくという操作ができない欠点がある。そこで本方式では密度分布を変化させることにより、得られる形状がスケルトンに近づくように操作を行うこととした。これにより細かくしたスケルトンに形状を限りなく近づけて詳細を表現することが可能となる。スプライン曲線などを用いて密度分布 ρ を表現している場合は、濃度を計算する位置によって制御パラメータを操作することで、スケルトンと形状との距離を部分的に変化させることができる。

図5は折れ曲がったスケルトンに対して密度分布 ρ を変化さ

せた例である。図5(a)と図5(b)は同じスケルトンであり、細い線がスケルトン、太い線が形状を示している。また、 r_0 の大きさを左上に示している。そして(a)と(b)は ρ が異なり、

$$\text{図5(a)の密度分布: } \rho(r) = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \quad (9)$$

$$\text{図5(b)の密度分布: } \rho(r) = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^6 \left(1 + 6 \cdot \frac{r}{r_0}\right)$$

を用いている。図5(b)の ρ はBernstein影響関数¹⁰⁾を用いて、密度が中心付近で大きく減少するようにパラメータを設定した例であり、曲率連続の形状が得られる密度分布の1つである。中心付近で大きく減少し、曲率連続の形状が得られる多項式は多々あるが、ここでは2次の多項式との形状の違いがはっきりと現れる7次の多項式を用いた。

このような、形状のある部分をスケルトンに近づける操作を行う方法として、密度分布を変化させる方法以外にも、陽に球の半径 r_0 を変化させる方法も考えられる。しかし球密度分布法を一般的な等濃度形状の手法(式(1))に組み込む場合に、 r_0 を変化させる方法ではスケルトンの影響する範囲が r_0 に依存して変化してしまう。これに対し密度分布を変化させる手法ではスケルトンの影響する範囲は変化しないため、3次元の格子を用いて形状全体を近似的に計算する場合に、操作の前と後で格子の大きさを変えることなく、統一的に計算が行える利点がある。また、 r_0 を大きくとっておき、図5(b)の ρ のように0に近い領域を大きくとれば、形状の周辺の広い領域で濃度場に勾配ができ、ニュートン法などの各種計算においてより便利になる。ただし r_0 を大きくしすぎると計算領域が増加し、より多くの計算時間が費やされることになるため、 r_0 を適切に定めることが必要である。

4. 形状に対する拘束

設計生産分野での形状モデリングが映画やアニメーション分野のそれと異なるのは、形状の一部が所望の位置や距離、形をとるように拘束を行うことが必要である点である。

筆者らは等濃度形状に関して、各スケルトンの濃度場に対する影響をあらわす影響関数を変化させることで、形状に対する拘束を行えることを示した¹⁰⁾。しかし拘束は半径方向に1価の形状に限定されており、設計生産分野での多様な形状拘束条件を満たすには力不足であった。

Fig.5 Shapes of Different ρ

そこで、任意の拘束条件を満たしたB-reps表現の形状を球密度分布法のスケルトンとして入力し、等濃度形状の一部がそのスケルトンの拘束条件を満たしている部分を含まないようにできれば、拘束を満たした等濃度形状を作成することができる。

ここで、3節で述べた球密度分布法の基本手法では、形状がスケルトンの凹側にできる。そのため、上記の形状拘束を行う場合、形状にスケルトンの一部を包含させるような手法の拡張が必要である。(得られる形状が包含するスケルトンの部分を、以後は拘束スケルトンと呼ぶ。)そこで同一スケルトンに対して2種類の濃度場を考え、それらを拘束スケルトン周辺で遷移させる操作を行うことにより、これを実現する。1つ目の濃度場は、3.1節で用いた濃度パラメータ t_{sp} (式(5))で表される。もう1つは、 D_0 濃度面が完全にスケルトンと一致する新たな濃度場である。これらを拘束スケルトンの周辺で1つ目の濃度場から2つ目の濃度場に遷移させることで、拘束スケルトンに近ければ近いほどそこで計算される濃度パラメータはスケルトンに一致する新たな濃度場の値に近くなる。逆にそこから離れるにしたがって t_{sp} に近づき、拘束スケルトンからある距離以上離れると完全に t_{sp} になるようにする。このような濃度場を遷移させる計算を行うことで、 D_0 濃度面、つまり形状が拘束スケルトンを包含するようになる。この手法の式を以下に示す。

拘束スケルトンを包含した形状 S_c は、

$$S_c : D_1 \cdot f(t_c) - D_0 = 0 \quad (10)$$

で与えられる。ただし、

$$t_c = (1 - T) \cdot t_{sp} + T \cdot t_{sk} \quad (11)$$

である。ここで、 t_{sp} は基の球密度分布法の濃度パラメータである。そして、 t_{sk} は、 D_0 濃度面が完全にスケルトンに一致する新たな濃度パラメータであり、 T は2つの濃度場を遷移させる遷移パラメータである。式(11)の各パラメータはすべて点 p の関数であるが、簡単のために“(p)”の記述を省いている。

式(11)の t_{sk} を決めるにあたり、次の条件を設定した。

- ・ 2つの濃度場の領域が、遷移部分において一致すること。

理由：拘束した領域周辺における形状変化を少なくするため。

この条件を満たす t_{sk} として、本論文ではスケルトンからの最短距離を基にした濃度場を用いた。次式に示す t_{sk} では、スケルトンから点 p への符号付最短距離が $-r_0$ から r_0 まで変化したときに、 t_{sk} のとりうる範囲が0から1の間になるように変換を行っている。

$$t_{sk} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{sk}}{r_0} + 1 \right) \quad (12)$$

ここで、 r_{sk} は、スケルトンから点 p への符号付最短距離であり、スケルトンの内側を負の値とする。また、 r_0 は3節で用いた任意の点を中心として配置する球の半径と同じものである。式(12)のように r_0 を用いて正規化することで、 $0 < t_{sk} < 1$ の範囲は $0 < t_{sp} < 1$ の範囲と等しくなる。

t_{sk} と濃度場との関係を図6に示す。

Fig.6 Density Field of t_{sk}

次に、式(11)の遷移パラメータ T を決めるにあたり、次の条件を設定した。

- ・ 拘束スケルトン周辺で、濃度場が曲率連続で推移すること。
理由：拘束スケルトンに一致した形状の部分と、その周辺とが滑らかに接続するため。

この条件を満たすためには、 T を拘束スケルトンからの最短距離 r_c の関数と見て、濃度場の遷移が始まる場所($T=0$)と終わる場所($T=1$)における T の微分値を適切に定める必要がある。 $T=0$ における微分値は、遷移が始まる境界上にある形状および濃度場の連続性に影響し、 $T=1$ における微分値は、遷移が終了する位置、つまり拘束スケルトン上における濃度場と、拘束スケルトンから離れる瞬間の位置における形状の連続性に影響する。このため、曲率連続で濃度場を遷移させ、滑らかな形状を得るためには、 $T=0$ における1階、2階微分値および $T=1$ における1階、2階微分値が0になるようにする必要がある。

そこで、この条件を満たすように遷移パラメータ T を表現した。また、 r_c を r_0 で正規化して u とした。この関数は $T(0)=1$ かつ $T(1)=0$ であり、 $u=0$, $u=1$ において1階、2階微分値が0になる最も簡単な多項式である。

$$u = \frac{r_c}{r_0} \text{ として}$$

$$T(u) = \begin{cases} -6u^5 + 15u^4 - 10u^3 + 1 & (0 \leq u \leq 1) \\ 0 & (u > 1) \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 r_c は拘束スケルトンから点 p までの符号なし最短距離であり、 r_0 は3節で用いたものと同じものである。図7に、拘束スケルトン周辺における濃度の遷移領域の範囲の例を示す。図の実線はスケルトン、太い実線は形状が通るべき拘束スケルトンであり、図の左下がスケルトン内部である。太い破線は遷移が始まる場所 ($T=0$)、細い破線は位置の比較のために示した $t_{sk}=0$ および $t_{sk}=1$ の境界であり、遷移が始まる境界と重なっている。

5. 形状の計算

等濃度形状を計算する場合、その基本となるのは任意の点 p における濃度値の計算である。パラメトリック曲線・曲面と異なり、形状表面に沿ったパラメータが存在しないため、形状を近似的に直線、平面の集合で表現する場合は、任意の点 p の濃度値を基に2または3次元の格子を用いて計算を行う¹¹⁾。

提案した球密度分布法の形状計算において、任意の点の濃度値はその点を中心とした球のスケルトン内部にある部分の質量を基に計算を行う。しかし任意の密度分布 ρ を持つ球と、任意の形状のスケルトンとの交差部分の質量を、解析的に求めるのは不可能である。そこで近似的に質量を計算することになる。本論文でのサンプル形状を計算するのに用いた手法では、2次

Fig.7 Density Transition Area

元空間を座標軸に沿って均一なピクセルに分割し、ピクセルごとに交差部分の質量を計算して近似的に濃度値を求める。3次元空間中の曲面を用いる場合にはボクセルを用いることになる。この手法の計算は以下の順序で行う。

- (1) スケルトンを近似したピクセルモデルを作成する。このピクセルモデルは計算を開始するとき一度だけ作成すれば良い。
 - (2) ある点 p が与えられると、 p を中心とした半径 r_0 の球内部と交差しているピクセルを列挙する。列挙されたピクセルそれぞれに対して、 p からピクセルの中心までの距離によって ρ で重み付けした質量を足し合わせる。精度は少し下がるが、 ρ はあらかじめピクセル幅に沿って区分的に表現しておくことで、 ρ を直接用いるよりも計算が高速になる。
 - (3) 足し合わせた質量を式(5)の W_{in} として用いて濃度値を計算する。
- この手法におけるピクセルの大きさを小さくすることで、より精度の良い濃度値が得られる。

6. 評価例

6.1 曲線からの形状生成

球密度分布法に用いるスケルトンは、閉じていれば直線や平面の集合に限らず、曲線や曲面の集合を用いることもできる。図8に、曲線をスケルトンに用いた例として、NURBS曲線で表現したスケルトンから生成した形状の例を示す。スケルトンを細線で示し、それによってできる形状を太線で示している。このスケルトンでは、解析曲線の例として左上に半円を置き、そこからNURBS曲線をつなげ、左下には直角のエッジを配置している。また、生成時に用いた r_0 の円を図の右上に示す。そして円の密度分布 ρ は式(9)の $\rho(r) = 1 - (r/r_0)^2$ を用いている。

この形状は、5節の手法を用いて近似的に計算したものである。スケルトン全体は約 450×360 のピクセル、円の中に入るピクセル数は約 11,300 である。また、Pentium4® (2.8GHz) のPCを用いて、形状の生成に3.8秒を要している。また、同じ形状でピクセルの大きさを2倍にした場合は1.4秒、2分の1にした場合は19.1秒を要した。形状を生成する上で、計算時間に支配的なのは濃度値を計算する点の数と、1点あたりの濃度値計算時間である。現在の実装では、形状と重なるピクセルに比例した数で濃度値を計算するため、ピクセルの大きさを2分の1にすると、計算する点の数が2倍になる。また、ピクセルを小さくするとそれだけ円の中に入るピクセル数が多くなり、

Fig.8 Shape derived from Sphere Density Method

濃度値の計算に時間が掛かる。そのため、計算時間と表示品質との兼ね合いでピクセルの大きさを定める必要がある。

6.2 形状拘束

図9は、図8と同じスケルトン、 ρ 、 r_0 において、形状が指定のスケルトンの一部を包含するように形状拘束を行った例である。図の左上の破線で囲んだ場所、つまり、左上の1/4円および左下の直角のエッジを形状が完全に含むように拘束を行っている。

この形状の計算にも5節の手法を用い、計算時の分割数やピクセル数は図8と同じである。この図では形状の表示に4.6秒を要している。

7. 結 論

本論文では意匠形状設計を支援するため、コンピュータ内の新しい形状表現手法である球密度分布法を提案した。そしてまず初めの段階として2次元に手法を適用し、近似形状の計算手法を提案した。球密度分布は以下の特徴を持つ。

- ・ 閉じたスケルトンであれば、NURBS曲線などを含む任意のスケルトンを入力として形状が生成できる。
- ・ 球の密度分布関数 ρ を操作することで、2つの操作が行える。1つ目として、形状の幾何的連続性を制御することができ、これによって曲率連続の形状を得ることができる。2つ目として、形状の一部がスケルトンから所望の距離内に来るように局所操作を行うことができる。
- ・ 形状が、指定したスケルトンの一部を完全に含むように操作することができる。これにより、形状に対する拘束条件を保ったまま、拘束されていない場所を操作し、形状バリエーションを作成することができる。

これらの性質により、提案した球密度分布法はコンピュータを用いた意匠形状設計支援のための形状表現手法として、従来の等濃度形状の特徴とB-repsの特徴を、接続性を制御しつつ任意に組み合わせることを可能とし、意匠初期設計の段階から詳細設計まで連続して使えるモデルとすることができる。

今後の課題としては、まず第1に、本手法の3次元へ適用する場合の、高速な計算手法の確立が挙げられる。本手法は自由度が高い反面、形状を計算するのに多くの計算時間が必要である。今回の2次元の例ではピクセルを用いたが、3次元の場合の計算はボクセルを用いるため、より多くのメモリー容量と計算時間が必要となる。

Fig.9 Constrained Shape

付録 A

式(6)を一般化し、

$$F(x,y,z) = D_1 \cdot f(t_{sp}) - D_0 \quad (A1)$$

とおく。ただし任意の点 $\mathbf{p}$ の座標成分を (x,y,z) とする。そして、

$$F(x,y,z) = 0 \quad (A2)$$

という陰関数曲面について考えると、この陰関数曲面の任意の点 $\mathbf{p}$ における平均曲率 h は、

$$h = -\text{div} \mathbf{N} \quad (A3)$$

と計算できる¹³⁾。ここで、 $\mathbf{N}$ は $\mathbf{p}$ における F の勾配を正規化したベクトル、つまり、

$$\mathbf{N} = \frac{(F_x, F_y, F_z)}{|\nabla F|} \quad (A4)$$

であり、点 $\mathbf{p}$ において、 $|\nabla F|$ が0でない場合に平均曲率 h が定義される。式(A4)を式(A3)に代入すると、式(A5)が得られる。

$$h = -\frac{F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}}{|\nabla F|} + \frac{F_x^2 \cdot F_{xx} + F_y^2 \cdot F_{yy} + F_z^2 \cdot F_{zz}}{|\nabla F|^3} \quad (A5)$$

ここで、 F_x 、 F_y 、 F_z が点 $\mathbf{p}$ において連続であれば、 $|\nabla F|$ は連続となる。よって式(A5)より、さらに F_{xx} 、 F_{yy} 、 F_{zz} が連続であれば、平均曲率 h は点 $\mathbf{p}$ において連続となる。

参 考 文 献

- 1) 有泉 徹, 3次元 CAD による設計の改革術, 日刊工業新聞社, (1996).
- 2) H. Nishimura, A. Hirai, T. Kawai, T. Kawata, I. Shirakawa and K. Omura, Object Modeling by Distribution Function and a Method of Image Generation, Journal of papers IEICE Japan'85, Vol.J68-D(4), (1985).
- 3) 先田 和弘, 井越 昌紀, 濃度空間モデルによる意匠形状設計, 精密工学会誌, 61,6, (1995).
- 4) 先田 和弘, 井越 昌紀, 濃度空間モデルの逆変換による意匠形状操作, 日本機械学会論文集 (C編) 64, 626, (1998).
- 5) A. P. Witkin and P. S. Heckbert, Using particles to sample and control implicit surfaces, SIGGRAPH '94 Proceedings, (1994).
- 6) B. Wyvill, K. van Overveld, Warping as a Modeling Tool for CSG/Implicit Models, 1997 International Conference on Shape Modeling and Applications, (1997).
- 7) Marie-Paule Cani-Gascuel, Layered Deformable Models with Implicit Surfaces, Graphics Interface'98, (1998).
- 8) D. Dekkers, K. van Overveld and R. Golsteijn, Combining CSG modeling with soft blending using Lipschitz-based implicit surfaces, Technical Report, Eindhoven University of Technology, Computer Graphic Group, (1997).
- 9) B. Wyvill, A. Guy and E. Galin, Extending the CSG Tree, Implicit Surface'98 Conference, (1998).
- 10) 石坂 尚也, 井越 昌紀, 等濃度形状のための Bernstein 影響関数, 精密工学会誌, 69,4, (2003).
- 11) J. Bloomenthal(Editor), Introduction to Implicit Surfaces, Morgan Kaufmann Publishers, (1997).
- 12) J. Bloomenthal and C. Lim, Skeletal Methods of Shape Manipulation, Shape Modeling International, (1999).
- 13) 儀我 義一, 陳 蘊剛, 動く曲面を追いかけて, 日本評論社, (1996).