微小振動子における空気抵抗減衰の近似解析*

— 円柱モデルによる解析 —

山川博司** 保坂 寛** 小林郁太郎** 板生 清***

Approximate Analysis for Airflow Damping of Microoscillator
— Analysis by Cylinder Model —

Hiroshi YAMAKAWA, Hiroshi HOSAKA, Ikutaro KOBAYASHI and Kiyoshi ITAO

A method for calculating airflow damping of rectangular microoscillator using the analytical solution of the cylindrical beam, called cylinder model, is proposed. In order to verify the effectiveness of the analysis, theoretical values of the airflow damping calculated by the method was compared with the numerical solutions obtained by a commercially available fluid analysis software. The results showed that the values of the airflow damping calculated by the cylinder model was close to the numerical value for the rectangular beam over the wide range of Q (Reynolds number for vibrating fluid). Moreover, comparing to experimental values presented in a past research, it was shown that the calculated values by the cylinder model was closer to the measured value than those by the bead-model, sphere-model and Sader's model. From the above results, it was confirmed that proposed method was validated for calculating airflow damping of the rectangular microoscillator.

Key words: airflow damping, rectangular beam, micro cantilever, quality factor

1. 緒 言

弾性梁振動子は、電氣的共振回路や他の形状の振動子に比べ、高い共振周波数、高い周波数安定性、低い剛性を持たせることが可能なため、加速度計、ジャイロ、プローブ顕微鏡、プローブメモリ、ガスセンサなど各種の振動センサに利用されている。これらの振動センサでは、振動子の共振周波数と減衰比が性能の支配要因となるため、それらを正確に見積もることが必要である。共振周波数は、振動子のヤング率、密度、形状により決定するため、比較的容易に計算できる。一方減衰比は、これらに加え、内部摩擦、支持点損失、空気抵抗が影響し、格段に評価が複雑になるため、オーダ推定さえ難しい場合が多い。近年は MEMS 技術により振動子の微小化が進んでおり、これらでは空気抵抗が減衰の支配力となるため、その評価が特に重要となっている。空気抵抗はナビエストークス方程式を解くことで得られるが、非線形項を含む偏微分方程式のため、一般に 3 次元境界条件で解析解を求めることは難しい。数値解析によれば計算が可能であるが、弾性体と流体の運動を同時に 3 次元非定常問題として解かねばならず、流体解析ソフトを用いたとしても非常に手間が掛かる。このため振動子に働く空気抵抗を簡便に計算する方法が望まれていた。

一方センサに用いられる振動子は、多くの場合、梁の大きさと振動振幅がともに小さい、梁形状は直方体または円柱状、梁は細長く周囲流れは 2 次元流で近似できるなどの特徴をもっている。これらに注目すると、流体力の近似解を求めることが出来る。Kokubun らは、直方体梁を球の連鎖で置き換えたビーズモデルを提案し、振動する単一球に

働く流体力の解析解を用い、圧力と空気抵抗の関係が理論と実験で一致することを示している¹⁾。Blom らも、直方体梁を単一球で置き換える近似を行い、やはり空気抵抗が理論と実験で一致することを示している²⁾。しかしこれらはいずれも球の半径を決定するのに実験値が必要であり、計算だけで空気抵抗を求めることが出来ない。これに対して著者らのグループは、ビーズモデルをもとに梁の空気抵抗をビーズを構成する球連鎖の流体力から求める方法を考案し、計算だけで減衰比を求める方法を提案した³⁾。しかし本来連続な梁を隙間のあるビーズで置き換えていることから、梁の形状や振動条件によっては誤差が大きくなるという問題があった。Sader⁴⁾は円柱梁の解析解を用いて梁の空気抵抗を計算だけで求める方法を報告しているが、厳密解や実測値との比較を行っていないため適用範囲が明確でないこと、特殊関数をそのまま用いるため計算が複雑であることなどの問題がある。

本論文では、近似解の精度を高めるため、Sader と同様に、梁を円柱で置き換える解析法を提案し、導出した理論式を簡単な近似式で表し、厳密解や実測値および従来の方法との比較を行う。次章以降で、まず、2 次元流・低レイノルズ数領域における円柱周囲流れの解析解を多項式近似し、これと梁の運動方程式を連立させ、減衰比を簡単な式で表す。また、多項式の次数と精度との関係を把握し、より簡単な近似式を導出する。次いで、導出した近似式について、数値解析結果やビーズモデルとの精度の比較、レイノルズ数と精度との関係の把握、実験値によるビーズモデルや sphere モデル、Sader モデルとの精度の比較を行い、提案する手法の有効性を示す。

* 原稿受付 平成 17 年 8 月 12 日

** 正 会 員 東京大学 (東京都文京区本郷 7-3-1)

*** 正 会 員 東京理科大学 (東京都新宿区楊場町 1-21)

2. 流体力の基礎式

非圧縮性粘性流体における運動方程式は、次式のスโตークス方程式と連続の式で与えられる。

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} - \rho_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho_a (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

ここで、 p , μ , ρ_a , $\mathbf{v}$ はそれぞれ、流体の圧力、粘度、密度、速度である。式 (1) の左辺は圧力を、右辺第 1 項は粘性力、第 2 項は振動慣性力、第 3 項は定常慣性力を表す。流れの代表的な長さを d 、速さを v とすると、粘性力と定常慣性力および振動慣性力の比は、

$$\frac{\text{定常慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho_a v d}{\mu} = Re \quad (3)$$

$$\frac{\text{振動慣性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho_a \omega d^2}{\mu} = \Omega \quad (4)$$

で表わされる。 Re , Ω は無次元の値で、 Re はレイノルズ数、 Ω は振動レイノルズ数と呼ばれる。これらが小さい流れは、粘性力が慣性力より卓越していることを意味する。ここで、材料をシリコン（ヤング率 $E=155\text{GPa}$ 、密度 $\rho_b=2300\text{kg/m}^3$ ）とし、長さ L 、幅 $b=L/10$ 、厚さ $h=L/100$ の直方体梁が振動振幅 $a=L/1000$ で微小振動する場合について Re , Ω を見積もる。幅、厚さ、振動振幅の比率は、一般的な直方体梁のスケールファクタを考慮して決めた比率である。梁の 1 次固有角振動数を ω_1 とすると、梁先端での速度 v は、

$$v = a\omega_1 \approx 8.3 \times 10^{-2} \text{ m/s} \quad (5)$$

となるので、空気の密度を $\rho_a = 1.18\text{kg/m}^3$ 、粘度を $\mu = 1.81 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ とすると、レイノルズ数 Re と振動レイノルズ数 Ω は、

$$Re = \frac{\rho_a v b}{2\mu} \approx 270 [m^{-1}] \cdot L \quad (6)$$

$$\Omega = \frac{\rho_a \omega b^2}{4\mu} \approx 1.35 \times 10^4 [m^{-1}] \cdot L \quad (7)$$

となる。これより、長さ $100\mu\text{m}$ 以下のマイクロカンチレバーにおいては、 $Re \ll 1$ であり、式 (1) の定常慣性項が無視できることがわかる。ただし Ω は Re より 2 桁大きく、無視できない。この場合、式 (1) は、

$$\nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} - \rho_a \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (8)$$

のスโตークス方程式に近似可能となる。

微小振動する直方体梁の空気抵抗を求めるには、直方体梁の周囲流について式 (8) より解析解を求め、直方体梁が受ける抗力を求めればよいが、直方体梁の周囲流に関する解析解が求められていないため、解析解が求められている球や円柱を用いて直方体梁の空気抵抗を近似的に求める方法を考える。流れの中に置かれた薄い直方体梁周りの流線は、 $Re \gg 1$ の場合は粘性力が小さいため図 1(a) のように変化が急峻になるが、 $Re \ll 1$ の場合は粘性力が大きい図 1(b) のように変化が緩やかになる。この場合の流線は図 1(c) の円柱における流線に似ている。流線が似ていると、式 (8) の右辺第 1 項と第 2 項の比が同程度になるので、流れの基準長さが等しければ左辺の値も同程度となり、両者の圧力は近い値となる。そこで、直方体梁が受ける流体力を円柱が受ける流体力で近似的に表わすことを考える。

Fig.1 Relationship between Reynolds number and streamline

Fig.2 Schematic diagram of cylinder model fitting to rectangular beam

3. 空気抵抗減衰の理論解析

図 2 のように直方体梁を直径 b の円柱梁とみなし、円柱梁の理論式より直方体梁の空気抵抗を近似的に求める。座標系を図 3 のようにとり、半径 R の無限長円柱が静止流体中で振動変位 $a = \varepsilon R e^{i\omega t}$ で微小振動する場合を考える。流れの速度を $\mathbf{u}$ とすると、その r , θ 成分は、流れ関数 ψ を用いて

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (9)$$

で表わされる。円柱表面では流体は円柱と同じ速度をもつので、 $r=R$ において、

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r i \varepsilon \omega R e^{i\omega t} \cos \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = i \varepsilon \omega R e^{i\omega t} \sin \theta \quad (10)$$

が成り立つ。また、式 (8) のスโตークス方程式を、円柱座標系で表わし、式(10)を用いると次式を得る。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) - \rho_a \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \theta} \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \left(-\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) + \rho_a \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r}$$

両式より圧力 p を消去すると流れ関数 ψ に関する方程式が得られる。これを $r=R$, $r=\infty$ における境界条件を用いて解くことにより、流れ関数 ψ が次式のように求まる⁶⁾。

$$\psi = \varepsilon \omega R^2 f(\sigma) \sin(\theta) e^{i\omega t} \quad (12)$$

$$f(\sigma) = \frac{c_1}{\sigma} + c_4 \left[\text{ker}_1(\sigma \sqrt{\Omega}) + i \cdot \text{kei}_1(\sigma \sqrt{\Omega}) \right] \quad (13)$$

ここで、

$$\Omega = \frac{\rho_a \omega R^2}{\mu} \quad (14) \quad \sigma = \frac{r}{R} \quad (15)$$

Fig.3 Coordinate diagram about an oscillating cylinder in the fluid

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \frac{\text{ker}_0(\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(\sqrt{\Omega})}{\text{ker}_0^2(\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0^2(\sqrt{\Omega})} \left[-\text{kei}_1(\sqrt{\Omega}) + i \cdot \text{ker}_1(\sqrt{\Omega}) \right] + \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \frac{\text{ker}_0(\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_0(\sqrt{\Omega})}{\text{ker}_0^2(\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0^2(\sqrt{\Omega})} \left[\text{kei}_1(\sqrt{\Omega}) + i \cdot \text{ker}_1(\sqrt{\Omega}) \right] + i \quad (16)$$

$$c_4 = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \frac{\text{ker}_0(\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_0(\sqrt{\Omega})}{\text{ker}_0^2(\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0^2(\sqrt{\Omega})} - i \cdot \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \frac{\text{ker}_0(\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(\sqrt{\Omega})}{\text{ker}_0^2(\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0^2(\sqrt{\Omega})} \quad (17)$$

であり, ker_0 , kei_0 , ker_1 , kei_1 はそれぞれ 0 階と 1 階のケルビン関数 (特殊関数) である.

一方, 振動する円柱が流体から受ける単位長さ当たりの流体力 F は,

$$F = - \int_0^{2\pi} (-p \cos \theta + \tau_{rr} \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) R d\theta \Big|_{r=R} \quad (18)$$

で表わされる. ここで, τ_{rr} , $\tau_{r\theta}$ はストレステンソルである. 式 (9), (12) を用いて τ_{rr} , $\tau_{r\theta}$ を計算すると,

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 2\mu \varepsilon \omega e^{i\omega t} \cos \theta \cdot \frac{1}{\sigma} \left(\frac{df(\sigma)}{d\sigma} - \frac{1}{\sigma} f(\sigma) \right) \quad (19)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = \mu \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) = \mu \varepsilon \omega e^{i\omega t} \sin \theta \cdot \frac{1}{\sigma} \left(-\sigma \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} + \frac{df(\sigma)}{d\sigma} - \frac{1}{\sigma} f(\sigma) \right) \quad (20)$$

となる. 一方, 式 (11) より,

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho_a r \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial r} + \mu r \left(-\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad (21)$$

となるので, 式(12)を用いて上式を計算し両辺を θ で積分すると

$$p = p_0 + \mu \varepsilon \omega e^{i\omega t} \sin \theta \cdot \frac{1}{\sigma} \left(\sigma^2 \frac{d^3 f(\sigma)}{d\sigma^3} + \sigma \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} - 2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma} + \frac{2}{\sigma} f(\sigma) - i\Omega \sigma^2 \frac{df(\sigma)}{d\sigma} \right) \quad (22)$$

を得る. ここで, $r=R$ すなわち $\sigma=1$ のとき, $f(\sigma)=i$, $df(\sigma)/d\sigma=i$ であることを考慮すると,

$$\tau_{rr} \Big|_{\sigma=1} = 2\mu \varepsilon \omega e^{i\omega t} \cos \theta \cdot (i - i) = 0 \quad (23)$$

$$\tau_{r\theta} \Big|_{\sigma=1} = -\mu \varepsilon \omega e^{i\omega t} \sin \theta \cdot \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} \Big|_{\sigma=1} \quad (24)$$

$$p \Big|_{\sigma=1} = p_0 + \mu \varepsilon \omega e^{i\omega t} \cos \theta \cdot \left(\frac{d^3 f(\sigma)}{d\sigma^3} + \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} + \Omega \right) \Big|_{\sigma=1} \quad (25)$$

となる. よって, 流体力 F は以下の式で表わせる.

$$F = - \int_0^{2\pi} (-p \cos \theta + \tau_{rr} \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) R d\theta \Big|_{r=R} = \mu \varepsilon \omega R e^{i\omega t} \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 \theta \cdot \left(\frac{d^3 f(\sigma)}{d\sigma^3} + \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} + \Omega \right) - \sin^2 \theta \cdot \frac{d^2 f(\sigma)}{d\sigma^2} \right] d\theta \Big|_{\sigma=1} = \mu \varepsilon \omega R \pi e^{i\omega t} \left(\frac{d^3 f(\sigma)}{d\sigma^3} + \Omega \right) \Big|_{\sigma=1} = \mu \varepsilon \omega R \Omega \pi e^{i\omega t} (1 + 2ic_1) \quad (26)$$

ここで, c_1 の実数部と虚数部を $\Re[c_1]$, $\Im[c_1]$ で表わし,

$$k_1 = -1 + 2\Im[c_1] \quad k_2 = 2\Re[c_1] \quad (27)$$

とおくと,

$$F = \mu \pi \varepsilon R \omega \Omega e^{i\omega t} (-k_1 + i \cdot k_2) = -\rho_a \pi R^2 k_1 \cdot \varepsilon R \omega^2 e^{i\omega t} + i \cdot \rho_a \pi R^2 \omega k_2 \cdot \varepsilon R \omega e^{i\omega t} \quad (28)$$

となる. 式 (28) の右辺第 1 項は加速度による流体からの抗力を表わし, 第 2 項は速度による流体からの抗力を表わしている. 単位長さ当たりの減衰係数 C は, 流体力 F と円柱の速度 $\varepsilon R \omega e^{i\omega t}$ の比で得られるが, 円柱の速度と 90 度位相がずれている成分 (k_1 の項) は, 付加質量として働き, 減衰力とならないため, F の円柱速度と同位相成分 (k_2 の項) のみを考慮すると次式を得る.

$$C = \Re[F / i\omega \varepsilon R e^{i\omega t}] = \mu \pi \Omega k_2 \quad (29)$$

梁の振幅は長手方向の位置で変化するため, 周囲流は梁断面内だけでなく長手方向成分をもつ 3 次元流となる. しかし低次の振動モードでは振幅の変化は緩やかで, 流れはほぼ断面内の 2 次元流とみなすことができる. このとき, 梁の単位長さに働く流体力は, 上で求めた無限長円柱に働く流体力で近似できる.

一方, 梁の運動方程式は変位を w , 外力を F_0 とすると

$$\rho_b S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = F_0 \quad (30)$$

となる. ρ_b , S , E , I はそれぞれ梁の密度, 断面積, ヤング率, 慣性 2 次モーメントである. ここで, C は梁の長手方向成分 z によらないので, 固有振動モードは無減衰の固有モード ϕ_n (n はモード次数) に一致する. そこで, $w_n(t)$ を時間の関数として

$$w(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \phi_n(z) \quad (31)$$

とおいて式 (30) に代入し, さらに両辺に ϕ_n をかけて梁の全長に渡って積分すると, 次式の 1 自由度方程式を得る.

$$m_n \ddot{w}_n + c_n \dot{w}_n + k_n w_n = f_n \quad (32)$$

$$m_n = \rho_b S \int_0^L \varphi_n^2 dz \quad c_n = C \int_0^L \varphi_n^2 dz \quad k_n = m_n \omega_n^2 \quad f_n = \int_0^L F_0 \varphi_n dz \quad (33)$$

これより、 n 次モードの減衰比は、

$$\zeta_n = \frac{c_n}{2m_n \omega_n} = \frac{C}{2\rho_b S \omega_n} = \frac{\pi \rho_a b^2}{8\rho_b S} \cdot k_2 \quad (34)$$

となり、減衰係数 C または k_2 の値がわかれば、空気抵抗減衰比を求めることができる。しかし、式 (27) の k_2 は c_1 で決まり、 c_1 は式(16)のように特殊関数を含むので、簡単な数値計算で求めることはできない。よって、適当な条件をつけて特殊関数の近似式を導出する。文献 7) の特殊関数に関する公式を用いると以下となる。

① $\Omega < 1$ の場合

$x = \sqrt{\Omega}$ とし、 $x < 1$ の場合の $\ker_0(x)$, $\ker_1(x)$, $\ker_2(x)$ に関する近似式を x の 6 次項まで導出すると次式を得る。

$$\ker_0(x) \doteq A + \frac{\pi}{16}x^2 - \frac{1}{64}(A + \frac{3}{2})x^4 - \frac{\pi}{9216}x^6 \quad (35)$$

$$\ker_1(x) \doteq -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(A+1)x^2 + \frac{\pi}{256}x^4 - \frac{1}{2304}(A + \frac{11}{6})x^6 \quad (36)$$

$$\ker_2(x) \doteq -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \left(A - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) x + \frac{1}{16} \left(A + \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4} \right) x^3 - \frac{1}{384} \left(A - \frac{\pi}{4} + \frac{5}{3} \right) x^5 + \frac{1}{x} \right] \quad (37)$$

$$\ker_3(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \left(A + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) x - \frac{1}{16} \left(A - \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4} \right) x^3 - \frac{1}{384} \left(A + \frac{\pi}{4} + \frac{5}{3} \right) x^5 - \frac{1}{x} \right] \quad (38)$$

ここで、 $A = \ln 2 - \gamma - \ln x$, $\gamma = \text{Euler's const} \doteq 0.5772$ である。式 (16), (27) より

$$k_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{x} \left[\frac{\ker_0(x) + \ker_1(x)}{\ker_0^2(x) + \ker_1^2(x)} \cdot \ker_2(x) + \frac{\ker_0(x) - \ker_1(x)}{\ker_0^2(x) + \ker_1^2(x)} \cdot \ker_3(x) \right] \quad (39)$$

であるので、上式に、式 (35) ~ (38) を代入し、 Ω の関数として 3 乗項まで表わすと

$$k_2 \doteq \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{4A}{\Omega} - \left(\frac{A^2}{4} + \frac{A}{2} + 0.498 \right) \Omega + \frac{\pi}{184} \Omega^2 - \frac{1}{64} \left(\frac{A^2}{24} - \frac{13}{576} A + 0.166 \right) \Omega^3}{A^2 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{8} \Omega + \left(\frac{A^2}{32} + \frac{5}{64} A + 0.082 \right) \Omega^2 - \frac{\pi}{1728} \Omega^3} \quad (40)$$

となる。ここで、理論式をできるだけ簡単な式で表わすために、有効な次数を検討する。ケルビン関数の厳密値を用いて計算した k_2 の値と式 (40) を用い Ω の最大累乗指数を変えて計算した場合の k_2 の値を図 4 に示す。これより、 $0 < \Omega < 1$ の領域では、 Ω^2 までの項を考慮すれば、ほぼ正確な値が得られることがわかる。さらに、 $0 < \Omega < 0.1$ の領域では、 $1/\Omega$ と $\ln \Omega$ の項および定数項を考慮すればよく、この場合次式に示す簡単な式で表わすことができる。

$$k_2 \doteq \frac{6.283 + (1.854 - 8. \ln \Omega) \frac{1}{\Omega}}{(\ln \Omega)^2 - 0.464 \ln \Omega + 2.467} \quad (41)$$

Fig.4 Relationship between Ω and k_2 calculated with equation(40) in case of $0 < \Omega < 1$

② $\Omega > 1$ の場合

$x = \sqrt{\Omega}$ とし、 $x > 1$ の場合の漸近展開式より、 $1/x$ の 3 次項まで考慮すると $\ker_0(x)$, $\ker_1(x)$, $\ker_2(x)$, $\ker_3(x)$ は次式のように表わされる。

$$\ker_0(x) = N_0(x) \cos[\varphi_0(x)] \quad \ker_1(x) = N_0(x) \sin[\varphi_0(x)] \quad (42)$$

$$N_0(x) \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x/\sqrt{2}} \cdot \left[1 - \frac{1}{8\sqrt{2}x} + \frac{1}{256x^2} - \frac{1}{128\sqrt{2}x^3} \right] \quad (43)$$

$$\varphi_0(x) \doteq -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8\sqrt{2}x} + \frac{1}{16x^2} + \frac{33}{512\sqrt{2}x^3}$$

$$\ker_2(x) = N_1(x) \cos[\varphi_1(x)] \quad \ker_3(x) = N_1(x) \sin[\varphi_1(x)] \quad (44)$$

$$N_1(x) \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x/\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \frac{3}{8\sqrt{2}x} + \frac{9}{256x^2} + \frac{63}{2048\sqrt{2}x^3} \right] \quad (45)$$

$$\varphi_1(x) \doteq -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{5\pi}{8} - \frac{3}{8\sqrt{2}x} + \frac{3}{16x^2} - \frac{225}{512\sqrt{2}x^3}$$

式(39)の k_2 を式 (42) ~ (45) を用いて計算し、 Ω の関数として $1/\Omega^2$ の項までを表わすと、次式を得る。

$$k_2 = \frac{4}{\sqrt{\Omega}} \frac{N_1(\sqrt{\Omega})}{N_0(\sqrt{\Omega})} \cdot \cos \left[\varphi_1(\sqrt{\Omega}) - \varphi_0(\sqrt{\Omega}) + \frac{3}{4}\pi \right] \quad (46)$$

$$\doteq \frac{\frac{4}{\sqrt{\Omega}} + \frac{3}{2\sqrt{2}\sqrt{\Omega}} + \frac{9}{64\sqrt{2}\sqrt{\Omega}} + \frac{63}{512\sqrt{2}\sqrt{\Omega}}}{1 - \frac{1}{8\sqrt{2}\sqrt{\Omega}} + \frac{1}{256\Omega} - \frac{1}{128\sqrt{2}\sqrt{\Omega}}} \times \cos \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\Omega}} + \frac{1}{8\Omega} + \frac{9}{64\sqrt{2}\sqrt{\Omega}} \right] \quad (47)$$

ケルビン関数の厳密値を用いて計算した k_2 の値と式 (47) を用い $1/\Omega$ の最大累乗指数を変えて計算した場合の k_2 の値を図 5 に示す。これより、 $\Omega > 10$ の領域では $1/\Omega$ の項までを、 $\Omega > 100$ の領域では $1/\sqrt{\Omega}$ の項までを考慮すればほぼ正確な値が得られることがわかる。式 (47) の余弦関数を級数展開し近似すると $\Omega > 100$ の場合は、

$$k_2 \doteq \frac{4}{\sqrt{2\Omega}} \quad (48)$$

となる。

③ $0.1 < \Omega < 100$ の場合

Ω が 1 に近いとき、 k_2 の値は、式 (40) ($\Omega \leq 1$), 式(47) ($\Omega \geq 1$)で得られるが、 k_2 の値を正確に求めるためには、 Ω の累乗指数を高くとる必要があるため、近似式が複雑にな

Fig.5 Relationship between Ω and k_2 calculated with equation(47) in case of $\Omega \gg 1$

る.よって,より簡単な式で k_2 の値を求めるため,ケルビン関数の厳密値から求めた k_2 の値を用いてカーブフィットにより近似式を求めることを考える.図6の○印はケルビン関数の厳密値を用いて式(39)より計算で求めた k_2 の値である.また, $\Omega < 0.1$, $\Omega > 100$ の領域における×印は式(41),(48)を用いて求めた k_2 の値であり,両式との接続を滑らかにするため含める.これらの値について Ω の累乗関数をカーブフィットにより求めた結果,

$$k_2 = 2.122 \cdot \Omega^{-0.887} + 2.441 \cdot \Omega^{-0.484} \quad (49)$$

を近似曲線として得た式(49)による k_2 の値を図6の実線で示す.以上のことから, Ω の各領域における k_2 の近似式と減衰係数 C は以下のように表わせる.

(i) $\Omega < 0.1$ の場合

$$k_2 \doteq \frac{6.283 + (1.854 - 8 \cdot \ln \Omega) \frac{1}{\Omega}}{(\ln \Omega)^2 - 0.464 \ln \Omega + 2.467} \quad (50)$$

$$C \doteq \mu \pi \frac{6.283 \Omega + (1.854 - 8 \cdot \ln \Omega)}{(\ln \Omega)^2 - 0.464 \ln \Omega + 2.467} \quad (51)$$

(ii) $0.1 \leq \Omega \leq 100$ の場合

$$k_2 = 2.122 \cdot \Omega^{-0.887} + 2.441 \cdot \Omega^{-0.484} \quad (52)$$

$$C = \mu \pi (2.122 \cdot \Omega^{0.113} + 2.441 \cdot \Omega^{0.516}) \quad (53)$$

(iii) $\Omega > 100$ の場合

$$k_2 \doteq \frac{4}{\sqrt{2\Omega}} \quad (54)$$

$$C \doteq \mu \pi 2\sqrt{2\Omega} \quad (55)$$

図7は,式(50),(52),(54)を用いて Ω に対する k_2 の値を連続表示させた関係図である.上式で得られる k_2 または C の値と式(34)より空気抵抗減衰比 ζ が求まる.

以上,円柱モデルを用いて直方体梁の空気抵抗減衰比を求める近似式を導いたが,先行研究では,直方体梁を球の連鎖とみなしたビーズモデルを考案し空気抵抗減衰比を求める近似式を導いている.ビーズモデルに関する詳細は付録に記すが,次章以降では,円柱モデルの理論値とともにビーズモデルの理論値も示しながら,数値解析結果や実測値との比較を行う.

Fig.6 Result of curve fitting for k_2 values calculated from exact values of Kelvin functions in case of $0.1 \leq \Omega \leq 100$

Fig.7 Relationship between Ω and k_2 calculated with equation(50), (52) and (54)

Fig.8 Display of streamline for vibrating rectangular beam calculated by fluid analysis software

4. 数値解析結果および実測値との比較

円柱モデルやビーズモデルの近似の妥当性を評価するため,市販の2次元流体解析ソフトウェアを用いた数値解析により空気抵抗減衰比を算出した.

4.1 円柱梁の空気抵抗減衰比

図8は,流体解析ソフトウェアを用いて,幅0.1mm,厚さ0.01mmの直方体梁をレイノルズ数0.01で微小振動させ,振動の中心位置に梁がきたときの梁から見た流体の流れ線である.流れ線の形が図1(b)に似ていることから第2章で示した仮定が成り立つことがわかる.よって,低レイノルズ数の流れにおいては,円柱モデルの

Fig.9 Comparison between theoretical value of the cylinder model and calculated value from result of the fluid analysis software for cylindrical cantilever beam

理論式を直方体梁に適用可能であると考ええる。

長さ L 、直径 $2R=L/10$ の円柱が振動振幅 $a=L/1000$ で微小振動する場合の空気抵抗減衰比を理論解析と流体解析で求め比較した。ただし上記振幅で $Re>0.1$ となる場合は、 $Re=0.1$ となる振動振幅 a を与えた。理論解析、流体解析ともシリコンの無限長円柱が平行に微小振動しているものとし、梁の寸法、材料の諸定数を与えて解析した。円柱梁の長さ $\times$ 直径の比が一定である場合、振動レイノルズ数 Ω は円柱梁の長さ $\times$ に比例して大きくなる。振動レイノルズ数 Ω に対する空気抵抗減衰比の理論解析値（実線）と流体解析ソフトウェアの解析結果より算出した空気抵抗減衰比の結果（●印）を図9に示す。両者はよく一致し、第3章で導出した円柱モデルの理論式は正しいといえる。

4.2 直方体梁の空気抵抗減衰比

4.2.1 振動レイノルズ数と空気抵抗減衰比の関係

直方体梁の空気抵抗減衰比を、①円柱モデルの理論式を用いて算出した場合、②ビーズモデルの理論式を用いて算出した場合、③流体解析ソフトウェアの解析結果より抗力を算出した場合、について求めた。円柱の場合と同様長さ L 、幅 $b=L/10$ 、板厚 $h=L/100$ の直方体梁が振動振幅 $a=L/1000$ で微小振動しているものとし、もし $Re>0.1$ となる場合は、 $Re=0.1$ となる振動振幅 a を与え、梁の寸法、材料の諸定数を与えて解析した。直方体梁の理論値は、円柱モデルの理論式に直方体梁の固有振動数と断面積が与えられて計算される。振動レイノルズ数 Ω に対する空気抵抗減衰比の関係を図10に示す。 Ω が小さい領域では慣性力より粘性力が優位となり、表面積の大きさが影響してくると考えられる。表面積は、円柱モデルでは直方体梁に近いが、ビーズモデルでは球間に隙間があるので面積が円柱モデルより大きくなる。よって、ビーズモデルの空気抵抗減衰比は円柱モデルより大きくなり、円柱モデルの空気抵抗減衰比が直方体梁での値に近くなったと考えられる。

4.2.2 レイノルズ数と空気抵抗減衰比の関係

求めた理論式は、レイノルズ数 Re が非常に小さく、定常慣性項が無視できるという仮定のもとで導出された近似式であるため、レイノルズ数が大きくなると近似式が適用できなくなると考えられる。よって、レイノルズ数に対する理論式の適用範囲を明確にするため、流体解析ソフトウェアを用いてレイノルズ数と空気抵抗減衰比の関係を調べた。直方体梁の寸法を一定とし、振動振幅を変化させた場合の

Fig.10 Comparison among theoretical value of the bead model and theoretical value of the cylinder model and calculated value from result of the fluid analysis software for rectangular cantilever beam

Fig.11 Relationship between Re and airflow damping ratio(ζ) for some length of rectangular cantilever beam

空気抵抗減衰比を求めた。この場合、振動レイノルズ数 Ω は一定のまま、レイノルズ数 Re が変化することになる。直方体梁の寸法を $L=1, 10, 100\text{mm}$ 、 $b=L/10$ 、 $h=L/100$ とした場合のレイノルズ数に対する空気抵抗減衰比を図11に示す。図11より、 Re が小さい領域では空気抵抗減衰比はほぼ一定で、 Re が大きくなると空気抵抗減衰比は変化するのわかるが、変化の度合いは Ω に依存している。これは、式(1)の右辺第2項の振動慣性力と第3項の定常慣性力における大小関係が影響していると考えられる。つまり、 Ω が小さい場合は Re の影響が現れやすく、 Ω が大きくなるにつれて Re の影響が現れにくくなると考えられる。そこで、 Ω と Re の比で考える。非定常流でよく用いられる無次元数にストローハル数

$$St=fR/\nu \quad f: \text{振動周波数} \quad (56)$$

があり、その逆数は Ω と Re を用いて、

$$St^{-1}=2\pi Re/\Omega \quad (57)$$

で表わすことができる。そこで、図11の特性を St^{-1} を横軸とし、 $Re \ll 1$ のときの空気抵抗減衰比を ζ_0 としたときの対数尺度での変化率 α

$$\alpha=(\log_{10} \zeta_0 - \log_{10} \zeta)/\log_{10} \zeta_0 \quad (58)$$

を縦軸として、まとめて表わしたのが図12である。全てのグラフが重なり、 ζ の誤差が St で決まることがわかる。これより、 $St^{-1} \leq 10^{-1}$ であれば、定常慣性項の影響は小さく、式(50)～(55)が適用可能であるといえる。

Fig.12 Relationship between Sr^{-1} and logarithmic ratio(α) for rectangular cantilever beam

Table 1 Dimension of the beams used experiment and measured resonant frequency f_{exp} and calculated result for Q and measured damping ratio ζ_{exp}

Exp.	Length(mode) (μ m)	f_{exp} (kHz)	Q	ζ_{exp} ($\zeta \approx 1/2Q$)
1	300 (1)	7.4	1.2	1.47×10^{-2}
2	250 (1)	11.1	1.8	1.25×10^{-2}
3	200 (1)	18.0	2.9	9.43×10^{-3}
4	150 (1)	29.5	4.8	6.33×10^{-3}
5	300 (2)	47.4	7.7	5.55×10^{-3}
6	250 (2)	69.4	11.3	4.46×10^{-3}
7	200 (2)	109.8	17.8	3.44×10^{-3}
8	150 (2)	183.0	29.8	2.50×10^{-3}

Width $b=40 \mu$ m Thickness $h=1.1 \mu$ m

4.3 実測値と理論値の比較

直方体梁の空気抵抗減衰比について、円柱モデルやビーズモデルの理論解析法の有効性を検証するため、過去の文献に発表されているマイクロカンチレバーの振動減衰に関する実測値との比較を行った。文献 8)では、幅 $b=40 \mu$ m、厚さ $h_1=1 \mu$ m のシリコンに厚さ $h_2=0.1 \mu$ m の金を塗布した長さ $L=150, 200, 250, 300 \mu$ m のマイクロカンチレバーについて、1 次から 3 次モード振動の Q 値が測定され、sphere モデル²⁾による理論値と Sader⁴⁾による理論値との比較がなされており、sphere モデルの値が実測値に近いと報告している。表 1 に試料の寸法と 2 次モードまでの測定固有振動数、振動レイノルズ数、空気抵抗減衰比 ($\zeta \approx 1/2Q$) を示す。 ζ を除くこれらの値をもとに、ビーズモデルと円柱モデルの理論式を用いて空気抵抗減衰比を計算し実測値と比較した。測定された空気抵抗減衰比 ζ_{exp} と各々の方法で計算された理論値 ζ との関係を図 13 に示す。両者の値が近いほど図中の実線に近づく関係となる。これより、全体的に円柱モデルの理論値が実測値に近い値となっているのがわかる。さらに詳しく調べるため、横軸を Q とし、理論値と測定値との比率 ζ/ζ_{exp} で表わした結果を図 14 に示す。sphere モデルでは、1 次モードにおける実測値をもとに理論値を算出しているため、2 次モードの結果しか記していない。その他のモデルでは、実測値を必要とせず、数値計算のみで理論値を算出できる。文献 8)の報告どおり、sphere モデルでは実測値に近い値が得られており、また Sader の方法は高次モードになるにつれ差が大きくなる傾向が確認できる。ビーズモデルでは、 $1.8 \leq Q \leq 7.7$ で実測値に近いが、それより小さい領

(a) Comparison of ζ_{exp} and ζ for each beam used experiment.

(b) Enlarged graph of Area 1

Fig.13 Comparison of measured damping ratio ζ_{exp} and calculated damping ratio ζ .

Fig.14 Ratio of calculated ζ to measured ζ_{exp} as a function of Q for each beam used experiment.

域や大きい領域では実測値との差が大きくなる傾向がみられる。一方、円柱モデルでは、 Q の範囲全体にわたって実測値との差が小さく、理論値と実測値が近いことがわかる。これらの傾向は、図 10 の結果とほぼ一致する。円柱モデルでは、実測値を必要とせず、数値計算のみで sphere モデルと同等以上の精度が得られていることから、直方体梁の空気抵抗減衰比を円柱モデルの理論式より算出する手法の有効性が確認された。

5. 結 言

直方体梁の空気抵抗減衰比を円柱モデルの理論式を用いて簡単な数値計算のみで算出する方法を考案し、流体解析ソフトウェアを用いた数値解析法および従来の理論解析法と比較検討した。主な結果を以下に記す。

- (1) 微小振動する直方体梁の空気抵抗減衰比は、無限長円柱梁の理論式より求めることができ、その近似式は、式 (34) および (50) ~ (55) で与えられる。
- (2) 円柱梁の空気抵抗減衰比について、円柱モデルの理論値と流体解析ソフトウェアによる数値解析結果を比較したところ、両者の値はほぼ一致した。
- (3) 直方体梁の空気抵抗減衰比について、理論値と流体解析ソフトウェアによる数値解析結果とを比較したところ、ビーズモデルの理論値が、振動レイノルズ数 $\Omega \leq 1$ の領域において、数値解析結果との差が大きかったのに対し、円柱モデルの理論値は、振動レイノルズ数 Ω の広範囲にわたって、数値解析結果に近い値となった。
- (4) 流体解析ソフトウェアによる数値解析結果より、ストローハル数と円柱モデルの理論値との関係として、 $St^{-1} \leq 10^{-1}$ の範囲内で (1) 項の理論式が補正なしで適用可能であることがわかった。
- (5) マイクロカンチレバーに関する過去の文献の実測値と円柱モデルおよび従来の解析法による理論値とを比較した結果、円柱モデルの理論値が実測値に近い値となっており、数値計算のみで、実測値を必要とする sphere モデルと同等以上の精度が得られることを確認した。

以上の結果から、直方体梁の空気抵抗減衰比を円柱モデルの理論式より算出する近似解析法の有効性が確認された。本研究の成果により、任意サイズの直方体梁の空気抵抗減衰比を、実測値を必要とせず、梁の寸法と材料の諸定数を入力することにより、数値計算のみで求めることが可能となる。また、流体解析ソフトウェアを用いて解析するよりも簡便で手間と時間が節約できる。本研究の成果は、AFM や MEMS などのマイクロ振動子の設計や材料の内部摩擦精密測定において役立つものと考えられる。

付 録 ビーズモデルによる理論解析

先行研究では、図 A-1 に示すように長さ L 、幅 b 、厚さ h の直方体梁を直径が幅 b と同一長である球の連鎖とみなし

Fig.A-1 Schematic diagram of bead model fitting to rectangular beam

たビーズモデルを考え、単一球に働く流体力の解析解を用いて、その和を梁にかかる流体力として近似する方法を考案した。梁の n 次固有角振動数を ω_n とすると、正弦振動する単一球に働く流体力の速度比例成分 β_1 は、

$$\beta_1 = 3\pi\mu b + \frac{3}{4}\pi b^2 \sqrt{2\rho_a \mu \omega_n} \quad (\text{A-1})$$

で与えられる⁵⁾。式 (9) を考慮し、円柱モデルの場合と同様に、式 (30) ~ (33) を用いて固有角振動数 ω_n で振動する梁の運動方程式から空気抵抗による減衰比 ζ_b を求めると、

$$\zeta_b = \frac{\beta_1}{2\rho_b h b^2 \omega_n} \quad (\text{A-2})$$

を得る

参 考 文 献

- 1) K. Kokubun, M. Hirata, H. Murakami, Y. Toda and M. Ono: A bending and stretching mode crystal oscillator as a friction vacuum gauge, *Vacuum*, **34**, (1984)731.
- 2) F. R. Blom, S. Bouwstra, M. Elwenspoek, J.H.J. Fluitman: Dependence of the quality factor of micromachined silicon beam resonators on pressure and geometry, *J. Vac. Sci. Technol.*, **B10**, 1 (1992) 19.
- 3) 保坂 寛, 板生 清: 振動減衰のマイクロダイナミクス, *精密工学会誌*, **60**, 2 (1994)225.
- 4) John Elie Sader: Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope, *J. Appl. Phys.*, **84**, 1 (1998) 64.
- 5) ランダウ, リフシッツ: 流体力学1, 東京図書, (1970) 102.
- 6) S. M. Richardson: FLUID MECHANICS, Hemisphere Publishing Corp., (1989) 101.
- 7) 多谷虎男: ベッセル関数と弾性波動理論, 山海堂, (1986) 391.
- 8) Christian Bergaud, Liviu Nicu and Augustin Martinez: Multi-Mode Air Damping Analysis of Composite Cantilever Beams, *Jpn. J. Appl. Phys.*, **38**, (1999) 6521.