小特集

トロイダル磁場閉じ込めにおけるアルヴェン固有モードに関する物理的課題

4. トカマクプラズマのアルヴェン固有モード線形理論

福山 淳 小関 隆久¹⁾
(京都大学大学院工学研究科, ¹⁾日本原子力研究所)

Linear Theory of Alfvén Eigenmodes in Tokamak Plasmas

FUKUYAMA Atsushi and OZEKI Takahisa¹⁾
Graduate School of Engineering, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan
¹⁾*Japan Atomic Energy Research Institute, Ibaraki 311-0193, Japan*

(Received 7 April 1999)

Abstract

Theoretical and numerical studies on the linear stability of Alfvén eigenmodes in tokamak plasmas are reviewed. The behavior of various Alfvén Eigenmodes (AE), such as Toroidicity-induced AE (TAE), ellipticity-induced AE, non-circular AE, kinetic TAE, beta-induced AE, and energetic particle mode are described. Alfvén eigenmodes are excited when the destabilization by fast ions overcomes numerous stabilization mechanisms, such as continuum damping, Landau damping of electrons and fast ions, collisional damping of trapped electrons, and radiative damping due to kinetic Alfvén waves. Features of several TAE linear stability codes are tabulated. The NOVA-Kcode is described at some length and its computational results are compared with analytical predictions and experimental results.

Keywords:

tokamak plasma, Alfvén eigenmode, linear stability, energetic ion, kinetic effects, numerical code

4.1 はじめに

トカマクプラズマ中のアルヴェン固有モードは、核融合反応、中性粒子ビーム加熱、イオンサイクロトロン波加熱等によって生成される高速イオンによって励起され、高速イオンの閉じ込めに大きな影響を与える可能性があるため、最近10年間に理論的、実験的研究が精力的に進められてきた。

圧縮性アルヴェン波は固有モード周波数の下限がプラズマ半径に依存し、トカマクプラズマ中では数 MHz 程度となるため、高速イオンによって励起されることはない。一方、ねじれアルヴェン波は磁力線方向の波数 $k_{\parallel}$ に比例するアルヴェン周波数

$$\omega_A \equiv k_{\parallel} v_A = k_{\parallel} \frac{B}{\sqrt{\mu_0 m_i n_i}} \quad (1)$$

付近の周波数で伝播できるため、固有モード周波数が高速イオンの反磁性ドリフト周波数以下となって励起される可能性がある。ここで B は静磁界強度、 μ_0 は真空の透磁率、 n_i はイオン密度、 m_i はイオン質量である。多くの場合、ねじれアルヴェン波は伝播周波数領域内にあるアルヴェン共鳴[1-4]

$$\omega = \omega_A \quad (2)$$

において強く吸収されるため、不安定にはなりにくい。しかしながらトカマクプラズマ中では、ねじれアルヴェン波は伝播できるがアルヴェン共鳴がないか、あっても遠く離れているため吸収が弱く、固有モードが容易に励起されるという状況が現れる。

corresponding author's e-mail: fukuyama@nucleng.kyoto-u.ac.jp

ねじれアルヴェン波は、電磁流体近似の範囲ではアルヴェン共鳴で振幅が対数的に発散し、吸収が生じるが、イオンの有限ラーモア半径効果や電子の有限質量効果を取り入れるとアルヴェン共鳴付近で運動論的アルヴェン波 (KAW) への線形モード変換がおきる[5-8]。有限 β ($\beta > m_e/m_i$) のプラズマでは、短波長の運動論的アルヴェン波はアルヴェン共鳴を越えて伝播し、電子のランダウ減衰によって吸収される。したがってアルヴェン固有モードの線形安定性を解析するためには、運動論的アルヴェン波との結合を考慮に入れる必要がある。

トカマクプラズマ中のアルヴェン固有モードの周波数は、プラズマの密度分布、電流分布によって定まるアルヴェン周波数の空間分布に敏感に依存する。さらにその成長率/減衰率は、高速イオンの分布やバルクの電子やイオンの温度分布にも依存する。そのため、固有モードの線形安定性を解析するためには、これらの空間分布を考慮にいった数値解析が必要であり、多くの解析コードが開発されてきた。これらの解析コードにはさまざまなモデルが用いられ、それぞれ特質をもっている。

次節ではまずトカマクプラズマ中のアルヴェン固有モードを説明する。4.3節では高速イオンによる励起機構を、4.4節ではさまざまな減衰機構を概観する。4.5節ではアルヴェン波固有モードの線形安定性解析コードの現状を紹介し、4.6節では NOVA-K コードを用いた具体的な解析結果を示す。最後に4.7節でまとめと今後の課題を述べる。

4.2 トカマクにおけるアルヴェン固有モード

トロイダル磁界が一様な円柱プラズマにおいては、トロイダル方向とポロイダル方向のモード番号をそれぞれ n, m 、安全係数を $q(r)$ とすると、磁力線に平行な方向の波数

$$k_{\parallel} = \frac{m}{r} \frac{B_{\theta}}{B} - \frac{n}{R} \frac{B_{\phi}}{B} \sim \frac{m - nq(r)}{q(r)R} \quad (3)$$

は r だけの関数となり、第1章で調べたように $\omega_A = k_{\parallel} v_A$ が最小となる半径付近に局在した Global Alfvén Eigenmode (GAE) が現れる。

トカマクではトロイダル磁界が $1/R$ で変化するため、同じ磁気面上でも v_A がポロイダル角によって変化する。また磁気面の Shafranov シフトが r に依存していると、磁気面間隔がポロイダル角によって変化するため、径方向微分に θ 依存性が現れる。これらは $\cos \theta$ の依存性をもつので、ポロイダルモード番号 m のモードは $m \pm 1$ のモードと結合する。この結合は2つのモード、例

えば m と $m+1$ のモードが同じアルヴェン周波数 ω_A^2 をもつ場合に特に強く現れる。すなわち

$$k_{\parallel m} = -k_{\parallel m+1} \quad (4)$$

より、安全係数が

$$q(r_m) = \frac{m+1/2}{n} \quad (5)$$

となる半径で結合が生じ、Fig.1(a)に示すようにアルヴェン周波数が

$$\omega_m = \frac{v_A(r_m)}{2q(r_m)R_0} \quad (6)$$

Fig. 1 Radial profiles of (a) the Alfvén resonance frequency and (b) the poloidal harmonics for the $n = 1$ TAE with $m = 1$ and $m = 2$ [12].

付近で上下に分離して、アルヴェン共鳴が生じない周波数ギャップが現れる[9]。この周波数ギャップの中には減衰の弱い固有モードが存在し、Toroidicity-induced Alfvén Eigenmode (TAE) と呼ばれている[10,11]。

4.2.1 低 n モード

まず n が小さく、1つの周波数ギャップに局在する TAE を考えよう[11,12]。スカラーポテンシャルを

$$\Phi(r, \theta, \varphi, t) = \exp(in\varphi - i\omega t) \sum_m \phi_m(r) e^{-im\theta} \quad (7)$$

と展開し、低 β 電磁流体方程式に代入すると、

$$\mathcal{L}_m \phi_m + \bar{\epsilon}(r) \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{d^2}{dr^2} (\phi_{m+1} + \phi_{m-1}) = 0 \quad (8)$$

を得る。ここで演算子 $\mathcal{L}_m$ は

$$\mathcal{L}_m = \frac{d}{dr} \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) \quad (9)$$

で定義され、結合係数 $\bar{\epsilon}(r)$ は磁場の不均一性と Shafranov シフト Δ の小半径依存性に由来し

$$\bar{\epsilon}(r) \simeq 2 \left(\frac{r}{R} + \Delta' \right) \quad (10)$$

と表される[13]。ここで Δ' は Shafranov シフトの径方向微分を表す。一つの周波数ギャップだけに着目して m と $m+1$ の成分だけを考えると、次のような形の固有値方程式が得られる。

$$\mathcal{L}_m \phi_m + \bar{\epsilon}(r) \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{d^2}{dr^2} \phi_{m+1} = 0 \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_{m+1} \phi_{m+1} + \bar{\epsilon}(r) \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{d^2}{dr^2} \phi_m = 0 \quad (12)$$

固有値方程式を解いて求められる TAE 固有関数 ($n=1, m=1$ and 2) の一例を Fig. 1(b) に示す[12]。周波数ギャップが現れる $q=3/2$ 付近でポテンシャル $\phi_m \sim (r/m)E$ がピークをもつことがわかる。

4.2.2 高 n モード

トロイダルモード番号 n の大きなモードについては、 m が1変化しても共鳴点の位置 r_m はあまり変化しないので、Fig. 2 に示すように、 m の異なる固有関数が重なり合う。そのため、各周波数ギャップごとに生じる複数のモード間結合を考慮に入れ、式(8)の形をした多数の連立方程式を解く必要がある。複数の周波数ギャップにまたがって径方向に広がった TAE 固有関数の例は Fig. 5 に示されている。

n が十分大きい場合には、バルーニング変換を用いて一次元問題に帰着することができる。ゆるやかに変化するバルーニング座標 η を導入し、バルーニング変換

Fig. 2 Schematic plots of several TAE harmonics $\phi_m(r)$, their global envelope and the Alfvén resonance frequency [14].

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_m e^{i(m\theta - n\varphi)} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{\Phi}_m(\eta) e^{-i(m-nq)\eta} \quad (13)$$

を行うと、($s \equiv (r/q)(dq/dr)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Phi &= \frac{dq}{dr} \frac{\partial}{\partial q} \Phi \rightarrow s \frac{q}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Phi} = i \frac{nq}{r} s \eta \tilde{\Phi}, \\ k_{\parallel} \Phi &\rightarrow i \frac{1}{qR} \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Phi}, \end{aligned} \quad (14)$$

と置き換えることによって、方程式 $\mathcal{L}_m \Phi = 0$ は

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (1 + s^2 \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Phi} + \frac{\omega^2}{v_A^2 / q^2 R^2} (1 + s^2 \eta^2) \tilde{\Phi} = 0 \quad (15)$$

と変換される。 v_A に含まれる磁界の不均一性や有限 β の効果を取り入れると、高 n TAE に対するバルーニング方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 + s^2 \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\Phi} + \Omega^2 (1 + 4\epsilon \cos \eta) (1 + s^2 \eta^2) \tilde{\Phi} \\ + \alpha (\cos \eta + s \eta \sin \eta) \tilde{\Phi} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

を得る[10]。ここで $\Omega = \omega / (v_A / qR)$, α は規格化された圧力勾配 $-q^2 R d\beta / dr$ を表す。この方程式は $\Omega = 0$ の場合には通常理想 MHD バルーニングモード方程式に帰着する。

式(16)はやはり周波数ギャップ内に固有モードをもつ。簡単のために有限 β 効果を無視して $\alpha = 0$ とおくと、その周波数は

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1+2\epsilon(1-s^2\pi^2/8)} \quad (\text{for } s \ll 1),$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{1-2\epsilon(1-\pi^2/72s^4)} \quad (\text{for } s \gg 1) \quad (17)$$

と近似できる[10]. したがって磁気シア s が弱い場合には周波数はギャップの下端にあり、磁気シアの増加とともに増加して、最終的にはギャップの上端に達する.

4.2.3 Core Localized Mode

式(16)の有限 β 効果を取り入れると、 α の増加とともに高 n TAE の周波数は低下し、周波数ギャップの下端に達すると強い吸収を受ける[15]. α の上限 α_c は、当初

$$\alpha_c = \begin{cases} s^2/(1+s) & \text{for } s < 1 \\ s+1-\sqrt{2s+1} & \text{for } s > 1 \end{cases} \quad (18)$$

と評価され、磁気シアの弱い中心部では α_c が小さく、TAE は励起されにくいと考えられた[15]. しかしながら、数値計算の結果、プラズマ中心部の周波数ギャップに局在した高 n TAE が存在することが示され[16], 理論解析が再検討された. その結果 s が $\epsilon=r/R$ に比べて小さい場合には、より詳細な解析が必要であることが明らかになった[17].

式(16)を $\epsilon \sim s$ のオーダーまで正確に導くと、 α の上限値は

$$\alpha_c = \frac{3\epsilon(1+\epsilon)+2s^2-3\epsilon s}{1+\epsilon+s} \quad (19)$$

で与えられ、 s が非常に小さくても $\alpha \leq 3\epsilon$ ならば、局在した TAE が存在することが示された[17]. この中心部に局在した TAE は Core Localized Mode (CLM) と呼ばれている. CLM の空間構造の例を Fig. 6 に示す[18]. その後の解析で、CLM には周波数の低い偶パリティモードと周波数の高い奇パリティモードが存在し[19], $s < \epsilon$ の場合にはさらに多くの TAE が現れることが示されている[20].

4.2.4 運動論的アルヴェン固有モード

イオンの有限ラーモア半径効果や電子の有限質量効果はアルヴェン固有モードの解析に2つの影響を及ぼす. 一つは TAE のモード構造を変化させ、周波数ギャップに局在していたモードを外向きに伝播させる[21]. 4.4 節で示すように、これによって放射減衰とよばれる TAE の新たな吸収機構が現れる. 二つ目は新たなアルヴェン固有モードである運動論的アルヴェン固有モード(KTAE)を生み出す[22,23].

運動論的効果を取り入れると、 ϕ_m に対する方程式は

$$\left(\mathcal{L}_m + \bar{\rho}^2 \frac{d^4}{dr^4} \right) \phi_m + \bar{\epsilon}(r) \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{d^2}{dr^2} (\phi_{m+1} + \phi_{m-1}) = 0 \quad (20)$$

の形になる、ここで

$$\bar{\rho}^2 \equiv \rho_i^2 \left(\frac{3}{4} \frac{\omega^2}{v_A^2} + \tau k_{\parallel m}^2 \right) \quad \text{and} \quad \tau \equiv \frac{T_e}{T_i} (1-i\delta) \quad (21)$$

と定義され、 $\rho_i = (m_i T_i)^{1/2} / Z_i e B_0$ はイオンのサイクロトロン半径を、 τ は電子の慣性効果を表している. δ は電子の散逸効果を表し、有限抵抗率[5]やトカマクにおける捕捉粒子と通過粒子との衝突効果[22]等を含んでいる.

$\bar{\rho}$ の効果によって現れる KTAE は Fig. 3 に示すように、周波数ギャップの上端より上の領域と下端より下の領域に複数のモードとして現れる[22,23]. 上側のモードは減衰が弱いので実験的にも観測されているが、下側のモードは、電磁流体近似で現れる最も周波数の高いモード以外は強い減衰を受ける. 上側のモードは両側のアルヴェン共鳴の間に KAW が局在するのに対して、下側のモードはアルヴェン共鳴の外側に伝播していくため減衰が強くなるからである.

4.2.5 非円形断面に起因するアルヴェン固有モード

円形断面トカマクでのトロイダル磁界や磁気面中心の変位に基づく不均一性は、 $\cos\theta$ に比例するため、 ϕ_m と ϕ_{m+1} の間に結合が生じた. 非円形断面のトカマクでは、楕円変形によって $\cos 2\theta$ の依存性が、三角形変形では $\cos 3\theta$ の依存性が現れる. 楕円度を x , 三角形度を δ とすると、 ϕ_m と ϕ_{m+2} , ϕ_m と ϕ_{m+3} の間には、それぞれ x , δ に比例する結合係数で結合が生じる. ϕ_m と $\phi_{m \pm \ell}$ の結合に対しては

$$k_{\parallel m} = -k_{\parallel m+\ell} \quad (22)$$

の条件から、安全係数が $q(r_m) = (m+\ell/2)/n$ となる半径で周波数ギャップが現れ、その中心周波数は

Fig. 3 Schematic structure of KTAE frequencies. The hatched region denotes the region where KAW is propagative.

$$\omega_m = \ell \frac{v_A(r_m)}{2q(r_m)R} \quad (23)$$

で与えられる。トロイダル効果に起因する TAE の周波数の ℓ 倍の周波数をもつ新しいアルヴェン固有モードが現れる。楕円変形に基づく固有モードは Ellipticity-induced Alfvén eigenmode (EAE) [24, 25], 三角形変形にもとづく固有モードは Non-Circular Alfvén Eigenmode (NAE) [26] と呼ばれている。これらのモードは周波数が高いため不安定にはなりにくいが、結合係数 $\kappa - 1$ 等が ϵ に比べて大きいので、周波数ギャップが広く、固有モードが現れやすい。

4.2.6 TAE より低い周波数の固有モード

EAE や NAE とは逆に TAE よりも低い周波数のアルヴェン固有モードの存在も指摘されている。Chu らは圧縮性イオン音波との結合によって、音速を C_s として、 $k_{\parallel} C_s$ 以下の周波数ではアルヴェン共鳴がなくなり、周波数ギャップが現れることを示した [27]。このモードは Beta-induced Alfvén Eigenmode (BAE) と呼ばれ、実験で観測されている低周波数モードとの関係が論じられている [28]。

また、通常はアルヴェン共鳴による吸収が大きいため周波数ギャップ以下の周波数では固有モードは存在しないが、高速イオンによる励起が十分大きいと強い吸収に打ち勝って、固有モードが励起され得る [29, 30]。このモードの周波数は

$$\omega = \left(k_{\parallel} \pm \frac{1}{qR}\right) v_{\parallel}^F, \text{ or } \omega = \omega_d^F \text{ or } \omega = \omega_s^F$$

で与えられ、Energetic Particle Mode (EPM) と呼ばれている。ここで $v_{\parallel}^F$, ω_d^F , ω_s^F はそれぞれ非捕捉高速イオンの磁力線方向の速度、捕捉高速イオンの ∇B ドリフト周波数および捕捉周波数である。このモードは高速イオンの圧力勾配 α^F がある臨界値を超えた場合に不安定となる。

4.3 高速粒子による励起

NBI 加熱や ICRF 波加熱によって生成された高速イオンおよび核融合反応により発生した α 粒子が速度空間あるいは実空間において局在していると、さまざまな微視的不安定が引き起こされる。NBI 加熱や ICRF 波加熱の場合には、ビーム入射角やサイクロトロン共鳴条件で定まる特定のピッチ角をもつ高速イオンが生成されるため、定常分布関数は速度非等方性を持ち、不安定の原因となり得る。しかしながら、 α 粒子加熱の場合には、定常分布関数はほぼ等方であるので、速度空間不安定は

生じない。その場合に問題となるのは、実空間における勾配がもたらすドリフト運動による不安定である [31, 32]。

アルヴェン波の場合、高速イオンが不安定化に寄与するためにはまず共鳴条件を満たすことが必要で、磁力線方向の位相速度 $\omega/k_{\parallel} \sim v_A$ よりもイオンの速度 $v_{\parallel}$ が大きくなくてはならない。さらに反磁性ドリフト速度

$$v_{dF} = \frac{T_F}{e_F B} \frac{d \ln n_F}{dr} \quad (24)$$

が波のポロイダル方向の位相速度 $\omega r/m$ よりも大きいこと、いいかえると

$$\omega * F_m \equiv \frac{m}{r} \frac{T_F}{e_F B} \frac{d \ln n_F}{dr} > \omega \quad (25)$$

が必要である。ここで T_F , e_F , n_F はそれぞれ、高速イオンの実効温度、電荷、密度である。

波の安定性に対する高速イオンの影響を調べるために、ここでは高速イオンの応答を誘電率に対する寄与の形で導いてみよう [33]。イオンサイクロトロン周波数よりも十分低い周波数帯であるので、分布関数 $f_F(t, r, \epsilon)$ に対するドリフト運動論的方程式

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v_{\parallel} \nabla_{\parallel} + (v_d + v_E) \cdot \nabla + \frac{e_F}{m_F} (v_{\parallel} E_{\parallel} + v_d \cdot E) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \right] f_F = 0 \quad (26)$$

から出発する。ここで $\epsilon = m_F v^2/2$, $v_d = v_d \sin \theta \hat{r} + v_d \cos \theta \hat{\theta}$, $v_d = (m_F/e_F B R) (v_{\perp}^2/2 + v_{\parallel}^2)$, $v_E = E \times B/B^2$ である。

得られた摂動分布関数にドリフト速度をかけて速度積分を実行すると誘起電流を求めることができ、曲率ドリフトのポロイダル角依存性を考慮に入れて誘電率テンソルの形で整理することができる。簡単のため、ドリフト運動との共鳴を無視し、高速イオンの電気感受率 χ^F の反エルミート部分のみを計算すると、ポロイダルモード番号 m の成分に対して

$$\chi_{mm}^F = \begin{pmatrix} (P_{m-1,m} + P_{m+1,m}) & i(P_{m-1,m} - P_{m+1,m}) & 0 \\ -i(P_{m-1,m} - P_{m+1,m}) & (P_{m-1,m} + P_{m+1,m}) & 0 \\ 0 & 0 & R_{m,m} \end{pmatrix} \quad (27)$$

と表される。係数 $P_{m,m'}$, $R_{m,m'}$ は定常分布関数の形に依存するが、マクスウェル速度分布で近似すると

$$P_{m,m'} = i \frac{\omega_{pF}^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{\omega * F_{m'}}{\omega} \right) \frac{\rho_F^2}{R^2} \sqrt{\pi} x_m \left(\frac{1}{2} + x_m^2 + x_m^4 \right) e^{-x_m^2}$$

$$R_{m,m'} = i \frac{\omega_{pF}^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{\omega * F_{m'}}{\omega} \right) \sqrt{\pi} 4 x_m^3 e^{-x_m^2}$$

となる [33]。ここで ω_{pF} は高速イオンのプラズマ周波

数, $x_m = \omega / |k_{\parallel m}| v_{TF}$, $\rho_F = v_{TF} / \omega_{cF}$, $v_{TF} = \sqrt{2T_F/m_F}$ である. $P_{m,m'}$ に含まれる $(\omega_{cF}^2/2\omega^2) (\rho_F^2/R^2)$ の因子は $\beta_{Fc}^2/\omega^2 R^2$ と書き表すこともできる. $P_{m,m'}$ は磁場勾配ドリフトによる ϕ_m と $\phi_{m\pm 1}$ との結合によって現れ, $R_{m,m'}$ はランダウ減衰を表している.

Fu, Van Dam[12] はマクスウェル速度分布の場合, 低 n TAE の成長率が

$$\frac{\gamma}{\omega_0} \sim \frac{9}{4} \left[\beta_F \left(\frac{\omega_{*F}}{\omega_0} - \frac{1}{2} \right) F \left(\frac{v_A}{v_F} \right) - \beta_c \frac{v_A}{v_e} \right] \quad (28)$$

と近似でき, 数値解析の結果とよく一致することを示した. ここで $F(x) = (1 + 2x^2 + 2x^4) \exp(-x^2)$ である. 高 n TAE[34,35], KTAE[30,36], EPM[30] に対しても, 高速イオンによる励起の解析が行われている.

高速イオンのドリフト軌道幅は大きいので, 局在した TAE との相互作用は有限軌道幅の影響を強く受ける. バナナ幅を Δ_b , TAE の空間局在幅を Δ_m とすると, 高速イオンによる励起は Δ_m/Δ_b の因子だけ減少する[37]. 具体的に高 n TAE[35], 低 n TAE[38] について計算された結果, モード番号 n が増加するにつれて ω_{*F} が増加してより不安定になるが, ある限界値を超えると有限軌道幅の効果によって励起が弱くなることが示されている.

4.4 安定化機構

高速イオンによる不安定化が, さまざまな安定化機構に基づく減衰を上回ると, アルヴェン固有モードが励起される. 励起に必要な高速イオンの圧力勾配等のしきい値を評価するためには, それらの安定化機構を正確に評価する必要がある. TAE の初期の解析[12,15,33]では, 電子のランダウ減衰だけを安定化機構としてしきい値を評価し, 実験で観測される値に比べてかなり低い値を導いた. その後, 安定化機構の解析的あるいは数値的研究が進展し, 実験値をかなりよく再現できるようになってきている.

電磁流体近似では, アルヴェン共鳴における共鳴吸収が支配的な減衰機構であり, 連続スペクトル減衰 (continuum damping) とよばれている. その減衰率は, 散逸機構の詳細 (例えば衝突周波数の大きさ等) には依存せず, 一定である. 高 n TAE の場合には Fig. 2 に示したように, アルヴェン共鳴による吸収を受ける両端の ϕ_m の continuum damping が全体の減衰率を決める. Rosenbluth 他は ϕ_m の連立方程式を解く方法で[14,39,40], また Zonca 他はパルレーンク方程式を解く方法で[41,42], 高 n TAE の減衰率を解析的に評

価している. 低 n TAE に対しても, 密度が減少して ω_A が増大する周辺部での continuum damping が評価されている[13].

運動論的吸収機構としては, 当初から取り入れられていた電子のランダウ減衰[12,34], 高密度領域で大きな高速イオンのランダウ減衰[43], 捕捉電子による衝突減衰[35,44,45]に加えて, 放射減衰 (radiative damping) の重要性が Mett 他によって指摘され

Fig. 4 Radial structure of TAE harmonics including the effect of KAW propagating (a) to the left for $m = 2$ and (b) to the right for $m = 3$ [21].

た[21,23,46]. 運動論的アルヴェン波の効果を取り入れると、波の偏波が影響を受けて磁力線方向の電界が大きくなる効果と、伝播特性が変化して Fig. 4 に示すように周波数ギャップから外に向かって伝播する効果が現れる。外に向かって伝播する KAW はやがて電子ランダウ減衰で吸収されるが、TAE の減衰率を大幅に増加させる。この効果を放射減衰とよび、その減衰率は近似的に

$$\frac{\gamma}{\omega} \simeq -\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{ms\rho_s}{\sqrt{2}r} \right)^{2/3} \quad (29)$$

で与えられる[21]. ここで $\rho_s^2 = \rho_i^2(3/4 + T_e/T_i)$ である。したがって高 m モードほど放射減衰は大きくなるのがわかる。

一方、運動論的效果によって初めて現れる KTAE は、磁力線方向の電界が大きいため電子のランダウ減衰は強いが、周波数ギャップの内側に向かって伝播するので空間的に局在し、放射減衰の影響は小さい。そのため、KTAE の減衰率は TAE よりも小さいが、周波数が高いので高速イオンによる不安定化も小さいので、注意深い解析が必要である。

4.5 線形安定性解析コード

以上のように TAE および KTAE の線形安定性を解析するためには、高速イオンによる不安定化、さまざまな減衰機構、運動論的效果に加えて、プラズマの平衡配位を正確に取り入れる必要がある。そのため、多くの数値解析コードが開発され、解析結果が実験と比較されている。ここでは、主な解析コードの特徴を Table 1 に示す。なお、広く実験との比較が行われている NOVA-K コードについては、次節で詳しく説明する。

解析コードの特徴を大きく分類すると

- (1) 時間解析方法：複素周波数 (ω) $\longleftrightarrow$ 初期値問題 ($\partial/\partial t$)
線形問題であるので時間微分を複素周波数で表すか、初期値問題として解析するか。
- (2) 空間解析方法：フーリエ展開 $\longleftrightarrow$ バルーン変換
フーリエ展開を用いる方法では電界のフーリエ成分に対する連立方程式を解き、バルーン変換を用いる方法ではバルーン方程式(16)と振幅の径方向依存性を記述するさらに高次の方程式を解く。
- (3) 運動論的效果：流体的 $\longleftrightarrow$ 摂動的 $\longleftrightarrow$ 非摂動的
摂動的方法では運動論的效果を含まない電磁流体方程式を解いて固有関数を求め、その固有関数を用いて成長率を評価するのに対して、非摂動的方法では運動論的效果を含めて固有関数を求める。
- (4) 有限軌道幅効果：なし $\longleftrightarrow$ 有限ラーモア半径効果 (FLR) $\longleftrightarrow$ 有限軌道幅 (FOW)
粒子軌道効果を取り入れないか、有限ラーモア半径効果のみを取り入れるか、それとも高速イオンのバナナ軌道の幅も取り入れるか。

4.6 NOVA-K コードによる TAE 解析

TAE の研究は、C.Z. Cheng らにより、実形状のトロイダルプラズマに対して計算可能な理想 MHD 安定性解析コード NOVA を用いて、ねじれアルヴェン周波数ギャップとその中に孤立した固有関数が存在することを数値解析に示したこと[10,11]に始まる。NOVA-K[47,65]は、NOVA に高エネルギー粒子による運動論的效果を組み入れた計算コードであり、摂動法によって α 粒子などの高速粒子による成長率とランダウ

Table 1 Features of TAE linear stability codes.

Name	References	Principal Author	Time Dep.	Spatial Dep.	Kinetic Effects	Particle Orbit
NOVA	[10]	Cheng	ω	Fourier	MHD	None
NOVA-K	[47,16,18]	Cheng, Fu	ω	Fourier	Perturbative	FOW
CASTOR	[48,49,50,52]	Kerner	ω	Fourier	MHD	None
CASTOR-K	[51]	Kerner	ω	Fourier	Perturbative	FOW
Gyro-Fluid	[53,54,55,56]	Spong	$\partial/\partial t$	Fourier	Non-perturb.	FLR
PENN	[57,58,59,60]	Jaun	ω	Fourier	Non-perturb.	FOW
TASK/WM	[61]	Fukuyama	ω	Fourier	Non-perturb.	None
HINST	[62,63]	Cheng	ω	Ballooning	Non-perturb.	FOW
2DWKB	[64]	Zonca	ω	Ballooning	Non-perturb.	FOW

ウ減衰など様々な減衰率を評価できる。ここで、理想 MHD モデルから決まる TAE 固有関数は、 α 粒子や減衰機構によって影響を受けないと仮定している。NOVA-K では、高エネルギー粒子による寄与分を考慮した運動方程式を線形化し、エネルギー原理を用いて TAE などの高エネルギー粒子による安定性を求めている。線形化運動方程式は、

$$\omega^2 \rho \xi = \nabla \delta P + \mathbf{B} \times \nabla \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{B} \times \nabla \mathbf{B} \quad (30)$$

で表され、ここで、 ω はモード周波数、 ρ は質量密度、 ξ は変位ベクトル、摂動磁場は $\delta \mathbf{B} = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})$ である。また、摂動プラズマ圧力テンソル δP は、断熱成分 δP_t と波と粒子の相互作用等を含んだ非断熱成分 δP_k からなる。式 (30) と ξ^* の内積をとり、全プラズマ領域で積分することによって次の二次形式を得る。

$$\delta W_f + \delta W_k - \omega^2 \delta K = 0 \quad (31)$$

ここで、 δW_f と δK は理想 MHD 方程式から決まり、 $\delta W_k = \int d^3x \xi^* \cdot \nabla \delta P_k$ と表される [38]。理想 MHD 固有周波数 ω_0 と運動論の効果による変化量 $\delta \omega$ (すなわち TAE 成長率) の比は次式で示される。

$$\frac{\delta \omega}{\omega_0} = \frac{\delta W_k(\xi_0, \omega_0)}{2\omega_0^2 \delta K(\xi_0)} \quad (32)$$

ここで、 ξ_0 は理想 MHD の固有関数である。ポロイダル断面を径方向にはキュービックスプラインを用い、ポロイダル方向にはフーリエ展開を用いて摂動量を表しており、計算機資源の範囲内で低 n から中間 n 数までの計算が可能である。

NOVA-K コードを用いて、TFTR や JT-60 で観測された様々な TAE の解析が行われた。TAE の解析は、(1)MHD 平衡に基づくねじれアルヴェン周波数ギャップの解析、(2)(1)で求めた周波数ギャップ中の TAE 固有関数の同定、(3)(2)で求めた TAE 固有関数に対する高エネルギー粒子による成長率、および様々な減衰効果の評価、(4)不安定となった TAE による高速イオンの損失に分けられる。これらは、(1)から順を追って解析することが必要であり、NOVA-K では、(1)~(3)の段階までの解析が可能である。

TFTR の DT 実験における周波数ギャップと TAE 固有関数の解析から、典型的な 2 つの固有モードを得ている [16]。すなわち、グローバルな構造を持った TAE (Fig. 5) とプラズマ中心付近に局在化した TAE (Core Localized Mode: CLM) (Fig. 6) である。TAE はトロイダル効果と有限な磁気シア s によって生じるため、

中間トロイダルモード数 ($n \sim 5$) を考えた場合、通常のトカマク放電 (中心の安全係数 q が 1 程度、表面の q が 4 程度の単調増加する q 分布) では、ポロイダルモード数 m (~ 20) に対応する多くの有理面が存在する。このため、多数の m と $m+1$ によるギャップが空間的に近接してして作られ、それに対応するピークを持ったグローバルな構造の TAE が形成される。このため、半径方向に開いたギャップ構造であれば高 n モードでもグローバルモードとなる。当初、高 n TAE を高 n バルニンク方程式をもとに解析 [15] が行われたが、半径方向に局在化した変位モデルが不適切であることが指摘され、NOVA-K などの本来低 n モード解析コードの高 n モード解析への拡張が行われた。

一方、プラズマ中心付近は、 q 分布が平坦 (小磁気シア領域) で逆アスペクト比が小さくなっており ($s \sim \epsilon \sim 0.1$, ここで ϵ は逆アスペクト比, r/R)、隣接するギャ

Fig. 5 (a) The radial displacement of a $n = 3$ TAE mode as a function of plasma minor radius. (b) The $n = 3$ Alfvén resonance frequency, where $\omega_A = v_A(0)/q_a R$ [16].

ップを構成するモード間結合が弱いため, Fig. 6 のような単一のモード結合 ($m=4$ と 5) による TAE が現れる. CLM は変位の幅が小さいため, 高エネルギー粒子との相互作用が小さいことが予想されるが, 高エネルギー粒子が多く存在するプラズマ中心付近にあるため容易に励起されるモードである. このため CLM について詳しく調べられ, 存在できる圧力限界 α_c 式(19)があること等が解析的に示された[17,18,20]. JT-60 において, TAE のトロイダルモード数をつずつ上げながら現れる現象について NOVA-K を用いた解析が行われ, CLM のような構造のモードが, q 分布の変化によってより高いトロイダルモードが順に不安定化することが示された[66].

JT-60 の負磁気シア実験で, 内部輸送障壁(ITB)が形成されるような閉じ込めの良いプラズマにおいて, TAE が発生し難いことが観測された[67]. ねじれアル

ヴェン周波数ギャップは, およそ $[v_A(r)/2q(r)R]^2$ の周波数に存在するため, $1/n_e(r)q(r)^2$ に比例する. このため, 凹状電流分布を持った負磁気シア放電の場合は q 分布が減少, 増加をするが, 密度分布は単調減少するため, NOVA-K の解析により, Fig. 7 のように径方向にギャップが開きにくくなり[68], 特にプラズマ中心付近でギャップが狭くなり, TAE が存在しにくくなる. さらに, JT-60の実験のように, ITB による高い密度勾配が q の最小値より若干内側で形成されると, TAE は ITB の内側では存在しにくくなり, 不安定成長率が減少することが確認された[67]. また, ねじれアルヴェン

Fig. 6 (a) The radial displacement of a $n = 5$ TAE mode as a function of plasma minor radius. (b) The $n = 5$ Alfvén resonance frequency, where $\omega_A = v_A(0)/q_a R$ [16].

Fig. 7 (a) The Alfvén resonance frequency for $n = 5$ as a function of the minor radius for equilibrium with hollow current profile for JT-60 parameters. (b) Poloidal harmonics of the eigenfunction with $n = 5$ [68].

周波数ギャップの解析から、プラズマ断面の楕円度や三角度に起因するギャップとその中に固有モード (EAE と NAE) が存在することが早くから指摘されていた[25,26]. JT-60 の ICRF 加熱による実験で、TAE の各々 2 倍、3 倍の周波数を持つモードに対し、NOVA-K によるギャップ構造と固有関数の解析により、EAE と NAE であることが初めて確認された[69].

TAE の安定性を解析するには、ギャップ内に存在する複数の TAE 固有モードに対して、各々成長率と減衰率を評価することが必要である。NOVA-K を使った初期の解析では、成長率とイオンや電子のランダウ減衰のみから評価していたため、実験結果を十分説明できなかった。その後、有限ラーモア半径や有限軌道幅の効果をコードに組み入れ[38]、放射減衰の効果[18]を含めた評価を行い、実験結果を説明できる精度になってきている。これら、解析精度の向上により、TFTR での α 粒子のみによる TAE の励起に成功している。当初、TFTR の DT 実験では α 粒子による成長率が小さいため、実験的に α 粒子による TAE を実証することができなかった。そこで、プラズマ中心付近に広い低シア領域を作り幅の広い CLM を生成し成長率を上げると同時にシアによる減衰効果を下げ、さらに、プラズマを十分加熱した後 NBI を切ってビームによる減衰効果を下げて、 α 粒子による TAE の励起を予測した[18]。その後、この予測に基づいて α 粒子加熱のみによる TAE の観測に成功し、NOVA-K による計算の有効性が確認された。

NOVA-K は、初期の研究段階から TAE の解析に使われ、現在でも信頼できるコードの一つとして TFTR や JT-60 の実験解析、ITER での予測計算に用いられている。NOVA-K は、実形状プラズマに対し q 分布や密度分布を正確に取り入れて、ねじれアルヴェン周波数ギャップや TAE の解析、成長率と減衰率の正確な評価が可能であり、線形安定性解析に有効な手段となっている。一方、NOVA-K では理想 MHD モデルに基づくため、TAE 固有周波数がねじれアルヴェン周波数と交差する点で特異点となり固有関数が求まらなくなるため、連続スペクトル減衰のある TAE を正確に評価することは困難である。また、高 n モードでの数値解析にも限界がある。今後、他の解析手法の発展やそれらとのクロスチェックなどが必要とされるであろう。

4.7 ま と め

トカマクにおいて現れるさまざまなアルヴェン固有モードの線形安定性について解析が進み、実験との定量的

な比較が行われるようになってきた。最近の進展には ITER の物理 R & D 活動が大きく寄与しており、その成果は[70]にまとめられている。

ITER プラズマにおける多層モデルによる解析[71]は、 $6 < n < 60$ の範囲で TAE が不安定となることを示した。これは $m = nq$ の増加とともに高速イオンのドリフト周波数が高くなり不安定化項は増大するが、 m が大きくなりすぎると有限軌道幅の効果で不安定化項が減少を始めるためである。より詳細なモデルの開発とそれによる解析が行われているが、明確な結果はまだ得られていないといってよい。これは、ITER プラズマにおける TAE が安定・不安定の境界近くにあり、温度や密度の平衡分布に大きく依存するためである。また多様なモードの存在が系統的な解析を困難にしているためでもある。

今後は、ベンチマークテスト等による解析コードの信頼性の向上、内部輸送障壁が形成された負磁気シア配位のような複雑な配位の系統的な解析、イオンサイクロロン波加熱等の場合に顕著に現れる速度空間非等方性等の導入を実現し、さらに詳しい実験結果との比較を進めていくことが必要であろう。

参 考 文 献

- [1] C. Uberoi, Phys. Fluids **15**, 1673 (1972).
- [2] A. Hasegawa and L. Chen, Phys. Rev. Lett. **32**, 454 (1974).
- [3] L. Chen and A. Hasegawa, Phys. Fluids **17**, 1399 (1974).
- [4] K. Appert *et al.*, Phys. Fluids **17**, 1471 (1974).
- [5] A. Hasegawa and L. Chen, Phys. Rev. Lett. **35**, 370 (1975).
- [6] A. Hasegawa and L. Chen, Phys. Fluids **19**, 1924 (1976).
- [7] H. Weisen *et al.*, Phys. Rev. Lett. **63**, 2476 (1989).
- [8] T.H. Stix, *Waves in Plasmas* (American Institute of Physics, New York, 1992).
- [9] C.E. Kieras and J.A. Tataronis, J. Plasma Phys. **28**, 395 (1982).
- [10] C.Z. Cheng, L. Chen and M.S. Chance, Ann. Phys. (N.Y.) **161**, 21 (1985).
- [11] C.Z. Cheng and M.S. Chance, Phys. Fluids **29**, 3695 (1986).
- [12] G.Y. Fu and J.W. Van Dam, Phys. Fluids B **1**, 1949 (1989).
- [13] H.L. Berk, J.W. Van Dam, Z. Guo and D.M. Lindberg, Phys. Fluids B **4**, 1806 (1992).
- [14] M.N. Rosenbluth, H.L. Berk, J.W. Van Dam and D.M.

- Lindberg, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 596 (1992).
- [15] G.Y. Fu and C.Z. Cheng, *Phys. Fluids B* **2**, 985 (1990).
- [16] G.Y. Fu *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2336 (1995).
- [17] G.Y. Fu, *Phys. Plasmas* **2**, 1029 (1995).
- [18] G.Y. Fu *et al.*, *Phys. Plasmas* **3**, 4036 (1996).
- [19] H.L. Berk *et al.*, *Phys. Plasmas* **2**, 3401 (1995).
- [20] J. Candy, B.N. Breizman, J.W. Van Dam and T. Ozeki, *Phys. Lett. A* **215**, 299 (1996).
- [21] R.R. Mett and S.M. Mahajan, *Phys. Fluids B* **4**, 2885 (1992).
- [22] J. Candy and M.N. Rosenbluth, *Phys. Plasmas* **1**, 356 (1994).
- [23] H.L. Berk, R.R. Mett and D.M. Lindberg, *Phys. Fluids B* **5**, 3969 (1993).
- [24] R.L. Dewar *et al.*, *Phys. Fluids* **17**, 930 (1972).
- [25] R. Betti and J.P. Freidberg, *Phys. Fluids B* **3**, 1865 (1991).
- [26] R. Betti and J.P. Freidberg, *Phys. Fluids B* **4**, 1465 (1992).
- [27] M.S. Chu *et al.*, *Phys. Fluids B* **4**, 3713 (1992).
- [28] A.D. Turnbull *et al.*, *Phys. Fluids B* **5**, 2546 (1993).
- [29] L. Chen, *Phys. Plasmas* **1**, 1519 (1994).
- [30] F. Zonca and L. Chen, *Phys. Plasmas* **3**, 323 (1996).
- [31] M.N. Rosenbluth and P.H. Rutherford, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1428 (1975).
- [32] A.B. Mikhailovskii, *Sov. Phys. JETP* **41**, 890 (1975).
- [33] Y.M. Li, S.M. Mahajan and D.W. Ross, *Phys. Fluids* **30**, 1466 (1987).
- [34] L. Chen *et al.*, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1988 (Proc. 12th Int. Conf. Nice, 1988, IAEA, Vienna)* **2**, 77 (1989).
- [35] G.Y. Fu and C.Z. Cheng, *Phys. Fluids B* **4**, 3722 (1992).
- [36] B.N. Breizman and S. Sharapov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **37**, 1057 (1995).
- [37] H.L. Berk, B.N. Breizman and H. Ye, *Phys. Lett. A* **162**, 475 (1992).
- [38] G.Y. Fu, C.Z. Cheng and K.L. Wong, *Phys. Fluids B* **5**, 4040 (1993).
- [39] M.N. Rosenbluth, H.L. Berk, J.W. Van Dam and D.M. Lindberg, *Phys. Fluids B* **4**, 2189 (1992).
- [40] M.S. Chu *et al.*, *Phys. Plasmas* **1**, 1214 (1994).
- [41] F. Zonca and L. Chen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 592 (1992).
- [42] F. Zonca and L. Chen, *Phys. Fluids B* **5**, 3668 (1993).
- [43] R. Betti and J.P. Freidberg, *Phys. Fluids B* **4**, 1465 (1992).
- [44] N.N. Gorelenkov and S.E. Sharapov, *Phys. Scr.* **45**, 163 (1992).
- [45] J. Candy and M.N. Rosenbluth, *Plasma Phys. Control. Fusion* **35**, 957 (1993).
- [46] X.D. Zhang, Y.Z. Zhang and S.M. Mahajan, *Phys. Fluids B* **5**, 1257 (1993).
- [47] C.Z. Cheng *et al.*, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1992 (Proc. 14th Int. Conf. Würzburg, 1992, IAEA, Vienna)* **2**, 51 (1993).
- [48] S. Poedts *et al.*, *Plasma Phys. Control. Fusion* **34**, 1397 (1992).
- [49] G.T.A. Huysmans, J.P. Goedbloed and W. Kerner, *Phys. Fluids B* **5**, 1545 (1993).
- [50] G.T.A. Huysmans *et al.*, *Phys. Plasmas* **2**, 1605 (1995).
- [51] W. Kerner *et al.*, *Nucl. Fusion* **38**, 1315 (1998).
- [52] W. Kerner *et al.*, *J. Comp. Phys.* **142**, 271 (1998).
- [53] D.A. Spong *et al.*, *Phys. Fluids B* **4**, 3316 (1992).
- [54] D.A. Spong *et al.*, *Phys. Plasmas* **1**, 1503 (1994).
- [55] D.A. Spong *et al.*, *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1994 (Proc. 15th Int. Conf. Seville, 1994, IAEA, Vienna)* **3**, 567 (1995).
- [56] D.A. Spong *et al.*, *Nucl. Fusion* **35**, 1687 (1995).
- [57] A. Jaun, K. Appert, J. Vaclavik and L. Villard, *Comput. Phys. Commun.* **92**, 153 (1995).
- [58] A. Jaun, J. Vaclavik and L. Villard, *Phys. Plasmas* **4**, 1110 (1997).
- [59] A. Jaun, A. Fasoli and W.W. Heidbrink, *Phys. Plasmas* **5**, 2952 (1998).
- [60] A. Jaun *et al.*, *Proc. 17th IAEA Conf. Fusion Energy, IAEA-CN-69/THP2/23* (1998).
- [61] A. Fukuyama and T. Tohnai, *Proc. 5th TCM Alpha Particles in Fusion Research* (1997) p. 81.
- [62] C.Z. Cheng, N.N. Gorelenkov and C.T. Hsu, *Nucl. Fusion* **35**, 1639 (1995).
- [63] N.N. Gorelenkov, C.Z. Cheng and W.M. Tang, *Phys. Plasmas* **5**, 3389 (1998).
- [64] G. Vlad, F. Zonca and F. Romanelli, *Nucl. Fusion* **35**, 1651 (1995).
- [65] C.Z. Cheng, *Phys. Report* **211**, 1 (1992).
- [66] G.Y. Fu *et al.*, *Nucl. Fusion* **36**, 1759 (1996).
- [67] H. Kimura *et al.*, *Proc. 16th Int. Conf. Fusion Energy, Montreal, 1996 (IAEA Vienna 1997)* Vol. **3**, p. 295.
- [68] T. Ozeki *et al.*, *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, A371 (1997).
- [69] G.Y. Kramer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2594 (1998).
- [70] F. Romanelli *et al.*, *ITER Physics Basis, Chapter 5, Nucl. Fusion No. 6* (1999).
- [71] J. Candy and M.N. Rosenbluth, *Nucl. Fusion* **35**, 1069 (1995).