小特集

トロイダル磁場閉じ込めにおけるアルヴェン固有モードに関する物理的課題

6. ヘリカルプラズマのアルヴェン固有モード線形解析

中 島 徳 嘉, 中 村 祐 司¹⁾

(核融合科学研究所, ¹⁾京都大学大学院エネルギー科学研究科)

Linear Theories of Alfvén Eigenmodes in a Helical Plasma

NAKAJIMA Noriyoshi and NAKAMURA Yuji¹⁾

National Institute for Fusion Science, Toki 509-5292, Japan

¹⁾Graduate School of Energy Science, Kyoto University, Uji 611-0011 Japan

(Received 6 April 1999)

Abstract

Shear Alfvén continuum and Toroidicity-induced shear Alfvén Eigenmodes (TAE) are analyzed in regard to possible three-dimensional equilibrium in CHS experiments and theoretical expected LHD equilibria. In the analysis of CHS plasma, theoretical results consistent with experimental ones are obtained. Wide spectral gaps are suggested for LHD plasmas.

Keywords:

shear Alfvén continuum, TAE, local mode analysis, global mode analysis

6.1 はじめに

立体磁気軸配位で低磁気シアを持つ W7-AS において, Global shear Alfvén Eigenmodes (GAE) が観測されて以来, ヘリカル系における MHD 固有モードと高速イオンの相互作用が研究対象として脚光を浴びようになってきた。さらに, 平面磁気軸配位で比較的高磁気シアを持つ CHS においても, Toroidicity-induced shear Alfvén Eigenmodes (TAE) が観測され, 同様な磁場配位を持つ大型ヘリカル装置 (LHD) においても, その可能性が濃厚となってきた。ここでは, ねじれアルヴェン連続スペクトラムおよび TAE の初歩的な線形理論解析の結果を, 6.2 において, CHS の実験に関連して中島が, 6.3 において, LHD の実験に関連して中村が述べる。

6.2 CHS 実験における TAE の線形理論解析

CHS 実験において, TAE が観測される代表的な MHD 平衡に基づいて, 線形理論解析を行った。6.2.1

において, 短波長の極限での局所モード解析 (local mode analysis) の結果を, 6.2.2 において, 実験で観測されている長波長での大域モード解析 (global mode analysis) の結果を述べる。

6.2.1 局所モード解析 (local mode analysis)

摂動の非圧縮性を仮定した場合の TAE の局所モード解析は, 次のバレーニグ方程式 [1, 2] :

$$B \nabla \left[\frac{|k_{\perp}|^2}{B^2} B \cdot \nabla \xi_s \right] + \frac{2\mu_0}{B^4} B \times \kappa \cdot k_{\perp} B \\ \times \nabla P \cdot k_{\perp} \xi_s + \mu_0 \rho_m \omega^2 \frac{|k_{\perp}|^2}{B^2} \xi_s = 0 \quad (1)$$

をカバーリング空間 $(\phi, \eta = \theta, \alpha = \zeta - \theta/\epsilon)$ で解いて解析できる $[\eta]$ の定義域は, $-\infty < \eta < +\infty$ 。ここで, (ϕ, θ, ζ) は適当な磁気座標系 (数値計算では, プーザー座標系を用いた), $|k_{\perp}|$ はアイコナル近似に由来する磁力線に垂直方向の波数 [アイコナル $S = S(\phi, \alpha)$ に対し

author's e-mail: nakajima@nifs.ac.jp, nakamura@energy.kyoto-u.ac.jp

て, $k_\perp = \nabla S$, κ は磁気曲率である. 上記のバルーニング方程式の固有関数 ξ_s は η の関数であるが, 固有値 ω^2 と同様, 磁気面のラベル ψ , アイコナル近似に由来する径方向波数 $\theta_k = (\partial S / \partial q) / (\partial S / \partial \alpha)$, $q = 1/t$, および, 磁気面上の磁力線のラベル α をパラメータとする:

$$\xi_s = \xi_s(\eta | \psi, \theta_k, \alpha), \quad \omega^2 = \omega^2(\psi, \theta_k, \alpha) \quad (2)$$

ψ, θ_k , および, α をパラメータとして, 安定側 [$\omega^2 > 0$] で (1) 式を解くことにより, 短波長極限でのねじれアルヴェン連続スペクトラムおよび離散固有値 (TAE) を解析できる. 軸対称系のような二次元系においては, 磁力線のラベル α 依存性が消えるため, α 依存性の強さが三次元性の強さ, すなわち, トロイダルモード結合の強さを反映することになる.

(1) 式で与えられるバルーニング方程式を用いた短波長極限の局所モード解析と, 有限波長モードによるねじれアルヴェン連続スペクトラムの解析との関連を調べるため, (1) 式を Shrödinger 型に変換する. $\hat{\xi}_s = |k_\perp| \xi_s$ と変数変換すると, (1) 式は, Shrödinger 型に変換できる:

$$\frac{\partial^2 \hat{\xi}_s}{\partial \eta^2} + \left\{ \Omega^2 \left[\frac{\langle B^2 \rangle}{B^2} \right]^2 - U(\eta) \right\} \hat{\xi}_s = 0 \quad (3)$$

ここで, ポテンシャル $U(\eta)$ は, 次式で与えられる:

$$U(\eta) = \frac{1}{2|k_\perp|^2} \frac{\partial^2 |k_\perp|^2}{\partial \eta^2} - \left[\frac{1}{2|k_\perp|^2} \frac{\partial |k_\perp|^2}{\partial \eta} \right]^2 - \frac{2\mu_0}{B^4 |k_\perp|^2} \mathbf{B} \times \kappa \cdot \mathbf{k}_\perp \mathbf{B} \times \nabla P \cdot \mathbf{k}_\perp, \quad (4)$$

また, Ω は局所アルヴェン時間 τ_A で正規化された周波数であり, $\Omega = \omega \tau_A$, また, $\tau_A = \sqrt{\mu_0 \rho_m} (J + t I) / (t \langle B^2 \rangle) \sim r / (B \theta / \sqrt{\mu_0 \rho_m}) [2\pi J / \mu_0 (2\pi I / \mu_0)]$ は, 磁気面外 (内) のポロイダル (トロイダル) 電流である. $|k_\perp|^2$ は, $(\eta - \theta_k)^2 |\nabla \psi|^2$ の永年項を含み, (4) 式第 3 項の分子は永年項に対して一次であるため, $\eta \rightarrow \pm \infty$ の極限でのポテンシャルは,

$$U(\eta)_{\text{asympt}} = \frac{1}{|\nabla \psi|^2} \frac{\partial^2 |\nabla \psi|^2}{\partial \eta^2} \quad (5)$$

となる. (5) 式で与えられるポテンシャルを持つ Shrödinger 方程式を $\xi_s = |\nabla \psi|^{-1/2} \hat{\xi}_s$ と変数変換すれば, (1) 式に対応する式として,

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \left[\frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \xi_s \right] + \mu_0 \rho_m \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \omega^2 \xi_s = 0 \quad (6)$$

を得る. 独立変数を, (ψ, η, α) から (ψ, θ, ξ) に変換すれば, (6) 式は, (低ベータ近似での) ねじれアルヴェン連続スペクトラムの解析に用いられる式そのものである[3]. 配位空間 (ψ, θ, ξ) において, (6) 式を Lagrange 方程式とする Lagrangian を構成し, その結果得られる行列の determinant が 0 であるという条件から, 摂動 ξ_s の持つ有限波長のモードが作るねじれアルヴェン連続スペクトラムを求めることができる. (1) 式のカバーリング空間での漸近方程式から (6) 式が得られるということは, 次のように理解できる. (1) 式, または, (3) 式のバルーニング方程式を解いて求まる離散固有値 (TAE) は, 遠方で減衰する (4) 式のポテンシャルの第 3 項が, その主要な生成項であるため, (5) 式で与えられる遠方のポテンシャルはねじれアルヴェン連続スペクトラムのみを記述することになる. さらに, 有限波長のモードが作るねじれアルヴェン連続スペクトラムを記述できる (6) 式は, その極限として, 短波長極限での連続スペクトラムを表現できなければならないからである. したがって, (1) 式から求められるねじれアルヴェン連続スペクトラム (正確には, ねじれアルヴェン連続スペクトラムの上限および下限と考えられる) は, (6) 式において短波長の極限のフーリエモード数を持った摂動のすべてのモード結合を考慮した場合に対応し, それゆえ, (6) 式で, 摂動のフーリエモード数を長波長から短波長へと増やしていった場合のねじれアルヴェン連続スペクトラムのエンベロープ (スペクトラルギャップの上限および下限) を構成すると考えられる.

さて, α 依存性がない場合には, ポロイダルモード結合によりねじれアルヴェン連続スペクトラム中にスペクトラルギャップと, そのギャップ内に離散固有値 (TAE) が存在する. i 番目のスペクトラルギャップおよびその内部の離散固有値 (TAE) は, フーリエモード (m, n) を持つ摂動とフーリエモード $(m+i, n)$ を持つ摂動との結合により生ずる. スペクトラルギャップは, $(2m+i)/2n = 1/t$ を満足する磁気面付近に作られ, 磁気面ごとの局所アルヴェン時間 τ_A で正規化したギャップ中心の周波数は, $\Omega = \omega \tau_A = (i/2)$ となる. 三次元系の場合, ポロイダルモード結合とトロイダルモード結合が共存するため, トロイダルモード結合のポロイダルモード結合に対する影響が重要な研究対象となる. CHS の実験で観測される TAE モードは, その周波数の大きさから,

トカマクの場合のようにポロイダルモード結合で作られる最も周波数の低い第一スペクトラルギャップ内の離散モードと考えられる。CHSの実験に対応するMHD平衡に対して、(1)式を用いた場合の低周波数領域に対する解析は、

(1)ねじれアルヴェン連続スペクトラム中の最も周波数の低い第一スペクトラルギャップは、トカマクのポロイダルモード結合で作られる第一スペクトラルギャップに相当する周波数領域にある。

(2)その第一スペクトラルギャップ($i=1$)の構造、すなわち、ギャップの上限、および、下限、および、そのギャップ内部の離散固有値(TAE)の α 依存性は径方向の全領域にわたって弱い、すなわち、短波長の極限で、スペクトラルギャップの上限、下限、および、その内部の離散固有値(TAE)に対するトロイダルモード結合の影響は弱い。

という結果を示している。

トロイダルモード結合の第一スペクトラルギャップおよび離散固有値(TAE)に対する影響が弱いという短波長解析で得られた結果が、長波長モードに対しても成立すると仮定して、(6)式を用いて、第一スペクトラルギャップ付近の周波数領域での有限波長を持つ摂動によるねじれアルヴェン連続スペクトラムの解析を行った。このことは、トロイダルモード結合の効果を無視することではなく、下記のモードの選択から理解できるように、スペクトラルギャップの構成に直接関与するモードのみを選択するということである。つまり、直接スペクトラルギャップを作らないが、平衡の持つ主要フーリエモード(例えば、CHSでは $(m_{eq}, n_{eq}) = (2, 8)$)とのトロイダルモード結合を通してスペクトラルギャップの内部構造、すなわち、個々のフーリエモードの作る連続スペクトルの構造(例えば、 $(m, n) = (2, -1)$ モードの作る連続スペクトラムの構造)に影響を与え得るフーリエモードは計算に含まれていない。このようなフーリエ成分の効果は、この説の最後で若干ふれる。

CHSは平衡のトロイダル周期数 $M=8$ の装置であるから、 $1+[M/2]=5$ 個の独立したモードファミリーを持つ[4]。トロイダルモード数 $n_i=1, 2, 3$ に対応するモードファミリーは、それぞれ、 $N_i=1, 2, 3$ と識別され、以下に示されるトロイダルモード数が含まれる：

$$\begin{aligned}
 N_i=1: n &= \dots, -9, -7, -1, 1, 7, 9, \dots \\
 N_i=2: n &= \dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots \\
 N_i=3: n &= \dots, -11, -5, -3, 3, 5, 11, \dots
 \end{aligned} \quad (7)$$

このうち、CHS実験においては、 $N_i=1$ と $N_i=2$ の2つのモードファミリーが観測されている。すなわち、 $N_i=1$ としては、 $(m, n) = (2, 1)$ モードが $r_N \sim 0.3$ 付近に、 $N_i=2$ としては、 $(m, n) = (4, 2)$ モードが $r_N \sim 0.5$ 付近で観測されている(r_N は正規化した動径方向座標)。

Fig. 1に、 $N_i=1$ モードファミリーに対するねじれアルヴェン連続スペクトラムの動径方向分布を示す。周波数は、磁気軸上でのアルヴェン時間 $\tau_A(\psi=0)$ で正規化

Fig. 1 Radial profile of the shear Alfvén continuum for $N_i = 1$ mode family. The vertical axis indicates the square of the eigenfrequency Ω^2 normalized by the Alfvén transit time at the magnetic axis. The horizontal axis denotes the normalized average minor radius. The broken curves show the shear Alfvén continuum without both poloidal and toroidal mode couplings. The corresponding Fourier modes (m, n) near the magnetic axis are also shown in the left hand side of the figure.

されており, イオンの質量密度分布として, $\rho_m = \rho_{m0}(1 - \psi/\psi_{\text{edge}})[\psi/\psi_{\text{edge}} - r_N^2]$ を用いた. 波線は, ポロイダルおよびトロイダルモード結合がない場合のスペクトルに対応する. 計算に用いられた摂動のモード数は,

$$\begin{aligned} (m,n) &= (1, -1), \dots, (5, -1) \\ (m,n) &= (7, -7), \dots, (21, -7) \\ (m,n) &= (8, -9), \dots, (27, -9) \\ (m,n) &= (13, -15), \dots, (44, -15) \\ (m,n) &= (14, -17), \dots, (49, -17) \end{aligned} \quad (8)$$

の123モードである. Fig. 2に, $N_f=2$ モードファミリーに対するねじれアルヴェン連続スペクトラムの動径方向分布を示す. Fig. 1との違いは, 計算に用いられた摂動のフーリエモード数だけである. この場合は,

Fig. 2 The same figure as Fig. 1 for $N_f = 2$ mode family.

$$\begin{aligned} (m,n) &= (2, -2), \dots, (8, -2) \\ (m,n) &= (6, -6), \dots, (19, -6) \\ (m,n) &= (9, -10), \dots, (30, -10) \\ (m,n) &= (12, -14), \dots, (41, -14) \\ (m,n) &= (15, -18), \dots, (52, -18) \end{aligned} \quad (9)$$

の126モードである. スペクトラムギャップの形成に直接関与する負のトロイダルモード数($n < 0$)のみが用いられてることに注意. Fig. 1とFig. 2の比較, および, 類似の計算から, 次のことがわかる.

- (1) トロイダルモード結合の効果を無視して得られるねじれアルヴェンのスペクトラムギャップの構造は, 長波長ではモードファミリーに応じて全く異なる (例えば, 実験で観測されている $n = -1$, または, $n = -2$ を持つモードのみでギャップを構成した場合). しかしながら, トロイダルモード結合の効果を考慮し, 短波長モードを含めると, 短波長解析から得られるギャップ構造がモードファミリーによらないことからわかるように, モードファミリーによる違いはなくなる.
- (2) 同一モードファミリーに属し異なるトロイダルモード数を持つモードは, 短波長解析の結果から予想されるように, スペクトラムギャップのエンベロップ (上限および下限) を構成し, モード数の増大とともに対応する周波数は短波長解析のそれと良い一致を示す. この結果, ポロイダルモード結合のみの作るスペクトラルギャップと比較すると, 異なるトロイダルモード数を持つモードが作る連続スペクトラムが存在するため, ギャップの幅が動径方向に狭くなる.
- (3) 局所アルヴェン時間 τ_A で正規化した第一ギャップの中心周波数は, $\Omega_c^2 = 1/4$ であるから, 磁気軸のアルヴェン時間 $\tau_A(0)$ で正規化した第一ギャップの中心周波数 Ω_{c0}^2 は,

$$\Omega_{c0}^2 = \Omega_c^2 \left[\frac{\tau_A(0)}{\tau_A} \right]^2 \sim \frac{1}{4} \frac{\rho_m(0)}{\rho_m} \left[\frac{\epsilon}{\epsilon(0)} \right]^2 \quad (10)$$

となり, 磁気軸のアルヴェン時間 $\tau_A(0)$ で正規化した第一ギャップの周波数は, 動径方向に増大する.

- (4) $N_f = 1$ モードファミリーでは, $r_N \sim 0.2$ 付近に $(m,n) = (2, -1)$ モードと $(m,n) = (3, -1)$ モードとが, また, $N_f = 2$ モードファミリーでは, $r_N \sim 0.4$ 付近に $(m,n) = (4, -2)$ モードと $(m,n) = (5, -2)$ モードとがスペクトラルギャップを構成している.

$N_f=3$ モードファミリーも $N_f=1$ モードファミリーと同様の振る舞いを示す。というのは、 $(m,n)=(7,-3)$ モードと $(m,n)=(8,-3)$ モードとが $(m,n)=(2,-1)$ モードと $(m,n)=(3,-1)$ モードと同一の磁気面でスペクトルギャップを形成するからである。しかしながら、実験的には、 $n=3$ のモードは観測されていない。

全体としての構造、すなわち、スペクトラムギャップのエンベロップ（ギャップの上限および下限）は、短波長解析から予想されるようにトロイダルモード結合の影響を受けない、つまり、同一モードファミリーに属する異なるトロイダルモード数を持つモードがポロイダルモード結合で作る連続スペクトラム構造の重ね合わせのような形でスペクトラムギャップの上限および下限は構成されていると考えられるが、短波長解析では解析できない個々のフーリエモードの作る連続スペクトルの内部構造は、トロイダルモード結合の影響を受ける可能性がある。トロイダルモード結合の影響をより詳しく調べるため、直接スペクトラルギャップを作らないが、平衡の持つ主要フーリエモードとのトロイダルモード結合を通して、個々のフーリエモードの作る連続スペクトルの構造に影響を与え得る摂動のフーリエモードを含めた場合を考察した結果、特に、長波長モード（ $N_f=1$ では、 $n=-1$ 、 $N_f=2$ では、 $n=-2$ モード）の作る連続スペクトラルギャップが、プラズマ周辺で影響を受けやすいことがわかった。トロイダルモード結合のより詳細な解析は、今後の課題である。

6.2.2 大域モード解析 (global mode analysis)

解析は、マックスプランクプラズマ物理研究所で開発された CAS3D3 コード[5]を用い、マックスプランクプラズマ物理研究所で行われた。CAS3D3 コードは、エネルギー原理に基づいた摂動の非圧縮性を仮定しない理想 MHD 線形安定性解析コードである。比熱比の値を変えることにより、非圧縮性の計算も可能である。ここでは、遅い磁気音波の作る連続スペクトラムおよび離散モードの影響を除くため、非圧縮に対応する計算を行った。Fig. 3 に、 $N_f=1$ の場合のねじれアルヴェンスペクトラムの動径方向分布を示す。用いられた MHD 平衡は、先の解析のものと同一であり、用いられた摂動のフーリエモードは、右肩に示されている。縦軸の固有値 Ω^2 は、コード内部の規格化因子で規格化されており、横軸は、 r_N^2 である。このスペクトラムの動径方向分布の求め方は、安定側の考察すべき周波数範囲内で固有値を求め、対応する固有関数を構成するフーリエモードの中から最大振幅を持つモードを探し出し、その最大振幅が存在する磁

Fig. 3 Radial profile of shear Alfvén continuum and discrete mode (TAE) for $N_f = 1$ mode family. The vertical axis indicates the square of the eigenfrequency Ω^2 normalized by the factors in the CAS3D3 code. The horizontal axis denotes the square of normalized average minor radius.

Fig. 4 Radial profile of discrete mode (TAE) for $N_f = 1$ mode family, whose frequency corresponds to one near the lower bound of the 1st spectral gap, located at $r_N^2 = 0.04$.

気面に固有値をプロットして得られており、色の違いは、最大振幅を持つフーリエモードの違いを表している。各色に対応するフーリエモードは、右肩に示されている。例えば、 $(m,n)=(2,-1)$ および $(m,n)=(3,-1)$ モードは、それぞれ、赤色と緑色に対応しており、先の、ねじれア

ルヴェン連続スペクトラムの解析と一致して $r_N^2 \sim 0.04$ ($r_N \sim 0.2$) 付近でギャップを構成している。Fig. 4 は、ギャップの下限近傍の離散固有値に対応する固有関数(変位の動径方向成分) $\xi \cdot \nabla \psi$ [横軸は r_N^2] を示しており、図中の数字は、ポロイダルモード数を示す。Fig. 3 と比較すればわかるように、固有関数の $(m, n) = (2, -1)$ フーリエ成分の $r_N^2 \sim 0.41$ 付近の鋭いピークは、 $(m, n) = (2, -1)$ のフーリエ成分のねじれアルヴェン連続スペクトラムとの交差によるものであり、同一モードファミリーに属し異なるトロイダルモード数 ($n = -7$) を持つモードが作るねじれアルヴェン連続スペクトラムとは、このような鋭いピーク構造を作っていない。さらに、 $(m, n) = (3, -1)$ フーリエ成分も、同一モードファミリーに属し異なるトロイダルモード数 ($n = -7$) を持つモードが作るねじれアルヴェン連続スペクトラムとは鋭いピーク構造を作っていない。この事実は、計算に用いられた摂動のフーリエモード数が、少ないという問題点はあるが、短波長解析の場合の離散固有値同様、トロイダルモード結合が弱いという事実の現れだと考えられる。得られた周波数を換算すると、イオンをプロトン一種として、140 kHz 程度であり、実験結果と矛盾はないように考えられる。なお、Fig. 3 において、第一スペクトラルギャップの上限および下限付近、また、ギャップ内部に多数の離散固有値らしきものが見えるが、固有関数の収束が不十分な場合の固有値が含まれていることに注意されたい。

6.3 LHD 実験における TAE の線形解析

まず非軸対称トーラスプラズマの低モード数ねじれアルヴェン連続スペクトルについて議論し、ヘリオトロロンにおいても TAE モードに対応する広いスペクトルギャップが存在しうることを示す。そしてステラレータ展開法に基づく巨視的安定性解析コードを用いて、ヘリオトロロンプラズマにおける理想 TAE モードの存在とその空間構造を示す。

6.3.1 非軸対称トーラスプラズマにおける低モード数ねじれアルヴェン連続スペクトル

ここでは非軸対称トーラスプラズマ中の低モード数ねじれアルヴェン連続スペクトルを得るため、C.Z. Cheng と M.S. Chance が軸対称トカマクに対して行った手法を拡張する[3]。

ねじれアルヴェン連続スペクトルに対する線形化された理想 MHD 固有モード方程式は(6)式で与えられる。変分原理に基づき固有値 ω^2 を決定するために用いられる Lagrangian 汎関数 $\mathcal{L}(\omega^2)$ は(6)式の左辺に $\oint \mathcal{J}$

$d\theta d\xi \xi_s^*$ を作用させることで得られ

$$\mathcal{L}(\omega) = \oint d\theta d\xi \left[-\frac{|\nabla \psi|^2}{\mathcal{J} B^2} \left(\frac{\partial \xi_s^*}{\partial \theta} + \epsilon^{-1} \frac{\partial \xi_s^*}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial \theta} + \epsilon^{-1} \frac{\partial \xi_s}{\partial \xi} \right) + \mathcal{J} \rho_m \omega^2 \frac{|\nabla \psi|^2}{B^2} \xi_s^2 \right] \quad (11)$$

となり、 $\mathcal{J}$ は磁力線が直線で表される適当な磁気座標のヤコビアンである。 $\xi_s = \sum_{m,n} a_{mn} \exp[i(m\theta - n\xi)]$ のようにフーリエ展開するとこの変分問題は行列の固有値問題

$$\sum_{n',n'',m'} a_{m'n'}^* L_{m'n';m,n} a_{mn} = 0 \quad (12)$$

$$L_{m'n';m,n} = \oint d\theta d\xi \left\{ \left[-\frac{|\nabla \psi|^2}{\mathcal{J} B^2} (m' - n'q)(m - nq) + \rho_m \omega^2 \frac{\mathcal{J} |\nabla \psi|^2}{B^2} \right] \times \exp[i((m - m')\theta - (n - n')\xi)] \right\} \quad (13)$$

となる。簡単のため平衡量 $g(\psi, \theta, \xi)$ と $h(\psi, \theta, \xi)$ を

$$\begin{cases} g(\psi, \theta, \xi) \equiv \frac{|\nabla \psi|^2}{\mathcal{J} B^2} = \sum_{k,l} g_{k,l}(\psi) \exp[i(k\theta - l\xi)] \\ h(\psi, \theta, \xi) \equiv \rho_m \frac{\mathcal{J} |\nabla \psi|^2}{B^2} = \sum_{k,l} h_{k,l}(\psi) \exp[i(k\theta - l\xi)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{k,l}(\psi) \\ h_{k,l}(\psi) \end{cases} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{cases} g(\psi, \theta, \xi) \\ h(\psi, \theta, \xi) \end{cases} \exp[-i(k\theta - l\xi)] d\theta d\xi \quad (14)$$

ように定義すると、行列 $L_{m'n';m,n}$ は

$$L_{m'n';m,n}(\omega^2) \propto \sum_{k,l} [-(m' - n'q)(m - nq)g_{k,l} + \omega^2 h_{k,l}] \delta_{k,m'-m} \delta_{l,n'-n} \quad (15)$$

となる。

(12)式が自明でない解を持つには、行列 $L_{m'n';m,n}$ の行列式がゼロでなければならないので、固有値 ω^2 は

$$f(\omega^2) \equiv \det[L_{m'n';m,n}(\omega^2)] = 0 \quad (16)$$

から求められ、求根問題となる。

(15)式において $k=l=0$ 以外のフーリエ係数がゼロも

しくは無視（トカマクプラズマの円柱近似に対応）できる場合、行列 $L_{m',n';m,n}$ の対角成分以外はゼロとなり、モードカップリングがない、または無視することに対応している。この時(16)式より固有値は

$$\omega^2 = (m - nq)^2 g_{0,0} / h_{0,0} \quad (17)$$

となる。この時異なったモード数 (m, n) に対して異なった固有値が得られる。

次に、(15)式において平衡量が $l \neq 0$ の成分を持たない場合（軸対称）もしくは、 $l \neq 0$ 成分によるトロイダルモードカップリングが無視できる場合を考える。この

場合、異なったトロイダルモード数を持つ振動のハーモニックスは互いにカップルしないため、振動のトロイダルモード数を指定することができるが、ポロイダルハーモニックスは平衡量を通じて互いにカップルするため、互いに独立ではなくなる。この時、行列 $L_{m',n';m,n}$ はトロイダルモード数 n を持つ振動モードに対して

$$L_{m',n';m,n}^{(n)} = \sum_k [-(m' - nq)(m - nq)g_{k,0} + \omega^2 h_{k,0}] \delta_{k,m-m'} \quad (18)$$

のようになる。したがって(16)式は

$$\begin{vmatrix} -(1-nq)^2 g_{0,0} + \omega^2 h_{0,0} & -(1-nq)(2-nq)g_{1,0} + \omega^2 h_{1,0} & \cdots \\ -(1-nq)(2-nq)g_{1,0} + \omega^2 h_{1,0} & -(2-nq)^2 g_{0,0} + \omega^2 h_{0,0} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

となり、非対角成分がポロイダルモードカップリングを表している。軸対称トカマクにおいて、主要なポロイダルモードカップリングはプラズマ柱をトーラスに曲げた効果 (toroidicity) によるため、このポロイダルモードカップリングにより連続スペクトルの間に開いたギャップに現れる離散固有モードは“Toroidicity-induced shear Alfvén Eigenmode” (TAE モード) と呼ばれる。しかし、どんなポロイダルモードカップリングも連続スペクトルにギャップを開け、そこに離散固有モードを生じさせる可能性を持つ。例えば“Elongation-induced shear Alfvén Eigenmode” (EAE) や“Non-circularity-induced shear Alfvén Eigenmode” (NAE) などの例がある。

同じように、平衡量がトロイダル方向に変化している非軸対称トーラスプラズマにおいては、トロイダルモードカップリングによって連続スペクトルギャップが開く可能性がある。したがって一般的な非軸対称トーラスプラズマでは、ポロイダルモードカップリングもトロイダルモードカップリングも考慮する必要がある。通常の三次元 MHD 平衡では、トロイダル方向に周期数 M の周期性があり、(15)式の l が M の倍数のフーリエ係数のみゼロでない。したがって、トロイダルモード数が M の倍数だけ異なる振動モード間のトロイダルモードカップリングを考慮すればよい。言い換えると、振動モードをいくつかの“mode family”に分離することができる。

例えば、トロイダルモード数 N の振動モードは $(N \pm jM)$ モード (j は整数) とモードカップリングを起こす。そこでこの互いにモードカップリングを起こしうる振動

モードの集合を $n = N$ mode family と呼ぶ。主要なモードカップリング ($j = 1$) のみを考えると、 $n = N$ mode family に対する行列 $|L_{m',n';m,n}|$ はブロック行列

$$\begin{vmatrix} d_{N-M,N-M} & d_{N-M,N} & 0 \\ d_{N,N-M} & d_{N,N} & d_{N,N+M} \\ 0 & d_{N+M,N} & d_{N+M,N+M} \end{vmatrix}, \quad (20)$$

となる。ここでブロック要素行列 $d_{n',n}$ の要素は $(d_{n',n})_{m',m} = L_{m',n';m,n}$ である。

非軸対称トーラスプラズマの例として、リップルトカマクが考えられる。この場合、トロイダル方向の周期数 M はトロイダルコイルの数（通常のトカマク装置では $M \sim 20$ ）に対応し、平衡量のトロイダルリップル成分 $g_{0,M}$ と $h_{0,M}$ がトロイダルモードカップリングに寄与し、スペクトルギャップを作る。したがってこのギャップの中に“Ripple-induced shear Alfvén Eigenmode” (RAE) が存在する可能性がある。このトロイダルモードカップリングによるギャップは $\omega/\omega_A \sim qM/2$ 付近に現れるが、 M は通常大きいので、RAE の周波数は非常に高く実際にはあまり重要ではないだろう。

一方、ヘリカル系プラズマは、リップルトカマクよりも非軸対称性が強い。例えば、平衡量においてヘリカル成分 $g_{L,M}$ と $h_{L,M}$ が支配的であるような場合には(20)式中の

$$(m - nq)((m + L) - (n + M)q)g_{L,M} + \omega^2 h_{L,M}$$

のような行列成分が、ヘリカルモードカップリングにより、スペクトルギャップを作る。このような場合、このスペクトルギャップの間に離散固有モード Helicity-induced shear Alfvén Eigenmode が現れると考えられる。N. Nakajima らは $L=2$ ヘリオトロンに対して、高モード数 HAE が存在することを示した[6]。 $L=2$ ヘリオトロンの典型的な M は10程度である。これらのプラズマでは平衡量のヘリカル成分はかなり大きいので、連続スペクトルに広いギャップが現れるであろう。 $M \sim 10$ はリップルトカマクに比べると小さいが、アルヴェン周波数と比べるとまだ十分に大きい。したがって非軸対称性の強いこれらのプラズマにおいても、周波数がアルヴェン周波数に近い TAE の方が HAE よりも危険であると考えられる。ほかに Wendelstein VII AS ($M=5$) や TJ-II ヘリアック ($M=4$) のように M 値が小さい配位もあるが、これらのプラズマは一般に磁気シアが弱く、TAE よりも “Global shear Alfvén Eigenmode” (GAE) と呼ばれるモードが重要となると考えられる。実際に、W7-AS (W-VII AS) では GAE が実験的に観測されており、ステラレータ近似に基づく理論解析との比較が行われている。しかし、ステラレータ近似は $M \gg 1$ の場合妥当であるため、 $M=5$ の W7-AS における GAE の定量的解析にはさらに詳細な検討が必要であろう。

6.3.2 LHD ヘリオトロンのねじれアルヴェン連続スペクトル

ここでは、非軸対称トーラスプラズマの例として、LHD ヘリオトロンのねじれアルヴェン連続スペクトルを示す。LHD は $L=2/M=10$ ヘリオトロン装置であり、ヘリカルコイルの巻線中心の主半径は $R_c = 3.9$ m, 平均プラズマ小半径は $a_p = 0.5 \sim 0.6$ m である。

LHD プラズマの三次元平衡は VMEC コードで計算した。ここでは簡単のため固定境界条件を課して平衡計算を行った。VMC の固定境界計算ではプラズマの最外殻磁気面の形状が入力として必要となるが、これは KMAG コードで磁力線追跡を行い求めた。KMAG コードでは必要な磁場ベクトルを有限サイズの外部コイルから Biot-Savart 則を用いて計算している。

真空磁気軸の位置とヘリカルコイル中心 $R_c = 3.9$ m との相対的距離を $\Delta_v = R_{axis}(\beta=0) - R_c$ と定義すると、LHD の標準配位は $\Delta_v = -15$ cm であるが、ここでは、後で示すように広いスペクトルギャップを持つ $\Delta_v = 0$ の配位に対して解析を行う。この配位では、磁気軸の位置 R_{axis} は最外殻磁気面の中心の位置 $R = R_0(a)$ よりトーラス外側にある ($R_0(a) < R_{axis}$)、すなわち磁気軸が

Fig. 5 The shear Alfvén continuum for (a) $N_t = 1$ mode family. The broken curves correspond to the shear Alfvén continuum without both poloidal and toroidal mode couplings.

最外殻磁気面より相対的に外側にシフトしていることに注意しなければならない。この配位の回転変換は、 $\epsilon_{axis} \sim 0.45$ ($q_{axis} \sim 2.2$)、 $\epsilon_{edge} \sim 0.94$ ($q_{edge} \sim 1.1$) であり、磁気シアの正負が逆ではあるが、トカマクプラズマの q 値の範囲と同様である。

このLHDの真空磁場配位に対する連続スペクトルをFig. 5に示す。この計算では、PEST座標を用い、 $n = N$ モードファミリーとして、 $n = N \pm 3M$ までのトロイダルモード数を持つ摂動モードを考慮したが、 $n = N \pm 2M$ までとれば十分であった。またプラズマの質量密度 ρ_m は空間一様を仮定した。Fig. 5の実線は、 $n=1$ モードファミリーの連続スペクトルを表しており、破線はトロイダルモードカップリングもポロイダルモードカップリングも無視した時の $n=1$ スペクトルを、各ポロイダルモード数に対してプロットしている。平衡量のフーリエ係数は用いた座標系の角度の定義に依存するため、カップリングを無視した場合のスペクトル構造も用いた座標系に依存するが、このスペクトル構造はモードカップリングの影響を見るためのよい比較対象となる。

Fig. 5から、この平衡配位では $n=1$ モードファミリーに対してかなり広いスペクトルギャップが現れることがわかる。 $m=1$ モードと $m=2$ モードとのポロイダルモードカップリングは主に平衡量 ((14)式) の $m/n = 1/0$ フーリエ成分によって起きる。トーラスプラズマではプラズマをトーラスに曲げた効果が磁場強度に逆アス

Fig. 6 (a) the poloidal cross section, and (b) the rotational transform of finite β equilibrium with $\beta_0 = 3\%$.

ペクト比 (a_p/R_c) 程度の $m/n = 1/0$ フーリエ成分を作るため、逆アスペクト比程度のスペクトルギャップが現れると期待される。しかし、Fig. 5 に示される $m=1$ モードと $m=2$ モードとのポロイダルモードカップリングは、逆アスペクト比 ($a_p/R_c \sim 0.13$) から期待されるものよりも強い。これは、磁気軸が最外殻磁気面より外側にシフトしているため、(14) 式中の $m/n = 1/0$ 成分が $|\nabla\phi|^2$ の寄与により大きくなるのが原因である。

これらの解析からわかるようにモードカップリングによって生じた一連のギャップの中心の周波数はプラズマ小半径に対して増加関数となっている。この傾向はトカ

Fig. 7 The shear Alfvén continuum corresponding to Fig. 6 for $N_t = 1$ mode family.

マクの場合とは反対であるが、これは安全係数 q の分布の違いに起因している。

これまで見てきたようにねじれアルヴェン連続スペクトル構造は回転変換と磁気面形状に非常に敏感である。しかし、ヘリカル系プラズマの無電流 MHD 平衡、すなわち磁気面平均したトロイダル電流がゼロの MHD 平衡においてはベータ値が増加すると回転変換や磁気面形状が変化する。そこで(6)式の低ベータ近似が成り立つ範囲で連続スペクトル構造のベータ依存性を調べる。Fig. 6 は中心ベータが3%の場合の磁気面形状と回転変換分布を示している。これからわかるようにベータ値が上昇すると磁気軸はより外側にシフトし、中心の回転変換は大きくなる。対応する連続スペクトル構造を Fig. 7 に示す。回転変換分布が変化し磁気軸シフトによるポロイダルモードカップリングがさらに大きくなるため連続スペクトル分布も大きく変化している。

6.3.3 LHD ヘリオトロンの低モード数 TAE

前節で、LHD ヘリオトロンにおいても広いスペクトルギャップが開くことがわかったのでここでは実際にスペクトルギャップの間の TAE 離散固有モードの存在を調べる。 $L=2$ ヘリオトロン配位ではトロイダルモードカップリングは重要であるが、この影響を完全に三次元的に扱わなくても TAE モード解析には本質的な問題を引き起こさないと考えられるため、ここではステラレータ近似に基づく KSTEP 安定性解析コードを VMEC で得られた平衡に対して適用した。

KSTEP 安定性解析コードはトカマクで有名な PEST コードの流れを汲む巨視的安定性解析コードであり、トロイダルおよびポロイダル方向にはスペクトル法、径方

Fig. 8 The eigenfunction of a mode corresponding to the shear Alfvén continuum obtained by KSTEP-code for (a) $(\omega/\omega_A)^2 = 1.3$, and (b) $(\omega/\omega_A)^2 = 1.5$.

向には一次元有限要素法を用いたエネルギー原理に基づくコードである。径方向に有限要素を用いているため、 $\omega^2 > 0$ の領域にある連続スペクトルはほぼ要素数に応じた多くの離散固有値として現れるが、その固有モードは対応するねじれアルヴェン共鳴面で特異的な振る舞いを示す (Fig. 8)。このため、いくつかのこのような固有値を選び、その共鳴面の位置をプロットすると Fig. 5 と同様に連続スペクトル構造が図示でき、同時にスペクトルギャップ内で物理的な離散固有値を持ついわゆる“TAE”モードが現れる (Fig. 9)。“TAE”モードのモード構造を Fig. 10 に示す。モード構造は Fig. 8 の連続スペ

Fig. 9 The shear Alfvén continuum obtained by KSTEP-code for $\beta_0 = 0\%$, and $\beta_0 = 3\%$. The eigenfrequencies corresponding to TAE and EAE are also shown.

クトルのモード構造とは明らかに異なり、空間的に広がった構造を持っている。

6.4 まとめと今後の課題

以上 CHS の実験に対応する MHD 平衡を用いた、CHS のねじれアルヴェン連続スペクトラムおよび離散固有値 (TAE) の線形理論解析の現時点での途中結果、および、LHD におけるねじれアルヴェン連続スペクトラムおよび離散固有値 (TAE) の線形理論解析からの予想を述べた。しかしながら、現時点の解析では、6.2 で述べた三次元 MHD 平衡に基づく局所および大域モード解析の結果と、6.3 で述べた三次元 MHD 平衡に基づく局所モード解析およびステラレータ展開を用いた二次元 MHD 平衡に基づく大域モード解析の間には、トロイダルモード結合によるプラズマ周辺部のギャップ構造に対して本質的な差異が残っている。

したがって、今後の課題として、

- (1) トロイダルモード結合のスペクトルギャップ構造、

Fig. 10 An example of TAE mode.

および、離散固有値 (TAE) に及ぼす影響をより正確に解析すること。

(2)各モードファミリーの固有値および固有関数の性質を明らかにし、高速イオンによる励起機構を解明すること。

などがあげられるであろう。

参考文献

- [1] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Physics Reports* **121**, 137 (1985).
- [2] C.Z. Cheng, Liu Chen, and M.S. Chance, *Annals of Physics* **161**, 21 (1985).
- [3] C.Z. Cheng and M.S. Chance, *Phys. Fluids* **29**, 3695 (1986).
- [4] C. Schwab, *Phys. Fluids B* **5**, 3195 (1993).
- [5] C. Nührenberg, *Phys. Plasmas* **6**, 137 (1999).
- [6] N. Nakajima, C.Z. Cheng and M. Okamoto, *Phys. Fluids B* **4**, 1115 (1992).