講座

プラズマ理論の技法
支援論文

C . 不変測度

吉 田 善 章

(東京大学大学院新領域創成科学研究科)

Invariant Measure

YOSHIDA Zensho

Graduate School of Frontier Sciences, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

(Received 26 April 2002)

Abstract

To develop a statistical theory, one has to define a probability density on the phase space of ensemble. The measure of the space, then, must be invariant against the map (flow) representing the dynamics. This property is warranted by the Liouville theorem in the canonical Hamiltonian dynamics. For some infinite dimension dynamics, we can construct an "invariant measure" by an appropriate eigenfunction expansion of fields, which provides a basis to construct statistical mechanical theory of the fields.

Keywords:

invariant measure, statistical mechanics, Hamiltonian system

物理法則の根本は「保存則」である。力学の理論では、保存則を用いて運動方程式を「積分」しようとする。もし力学の自由度だけ独立な保存則が見つければ、運動は保存則によって完全に規定されることになる。すなわち「可積分系」である。一般には、運動方程式は「非可積分」であり、運動は極めて複雑である。プラズマや気体のように多数の粒子からなる超多体系では、保存則として成り立つのは、全粒子数と全エネルギー程度であろうというのが、統計力学の出発点の仮定である。例えばこれだけの「保存則」で、統計的に最も確からしい確率分布を計算すると Boltzmann 分布が導かれるのである。

この統計力学の手続きのなかで、もう一つ根本的な「保存則」が必要である。それは「等重率の原理」と呼ぶべき「不変測度」である。

粒子の力学では、ハミルトニアン流に対する Liouville の定理が、これを与える。ハミルトニアン流 V は

author's e-mail: yoshida@k.u-tokyo.ac.jp

$\nabla \cdot V = 0$ を満たす非圧縮流である。非圧縮であるとは、状態空間(相空間)内の任意の体積要素を考えたとき、それが流れ V によって変形しても体積が不変であることをいう。この体積は、状態空間の Lebesgue 測度 $dx_1 \cdots dx_N \cdot dy_1 \cdots dy_N$ により定義されたものである。ハミルトニアン流の非圧縮性に対応するこの測度(体積の定義)を「不変測度(invariant measure)」という。

さて、流体やプラズマを連続体として考える「流体モデル」の世界で統計力学を作ろうとすると、流れの場や電磁場などの「場」すなわち「関数」についての「状態空間」を考えなくてはならない。つまり関数空間である。例えば、流れを表す関数が、その状態空間である関数空間の中に複雑な運動の軌跡を描くとして、その統計分布を求めようというのが流体の統計力学の目標である。この場合、まず関数空間における不変測度を知らなくては、議論が始まらない。

簡単な例として, $\phi(x, y, t)$ を流れ関数 (流れのハミルトニアン) とする 2 次元非圧縮流を考えよう. ある物理量 $u(x, y, t)$ (便利のために複素数値とする) の対流を表す輸送方程式 (Liouville 方程式) は

$$\partial_t u + \{\phi, u\} = 0 \quad (1)$$

と書かれる. ただし $\{a, b\} = (\partial_y a)(\partial_x b) - (\partial_y b)(\partial_x a)$ は Poisson 括弧である. u は x, y 双方に関して 2π を周期とする周期関数とする. u をフーリエ展開して

$$u(x, y, t) = \sum_{k, \ell} \hat{u}_{k, \ell}(t) \exp[i(kx + \ell y)],$$

$$\hat{u}_{k, \ell}(t) = q_{k, \ell}(t) + i p_{k, \ell}(t)$$

書く. ここで $q_{k, \ell}(t)$ と $p_{k, \ell}(t)$ は実関数とする. ϕ も同様にフーリエ展開し

$$\phi(x, y, t) = \sum_{k, \ell} \hat{\phi}_{k, \ell}(t) \exp[i(kx + \ell y)]$$

と書く. これらを (1) に代入し, 各フーリエ成分を整理すると

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_{k, \ell} \\ p_{k, \ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{p_{k, \ell}} \mathcal{H} \\ -\partial_{q_{k, \ell}} \mathcal{H} \end{pmatrix} \quad (\forall k, \ell) \quad (2)$$

$$\mathcal{H} = \text{Re} \sum_{k, \ell} \sum_{k', \ell'} (\ell' k - k' \ell) \hat{u}_{k, \ell} \overline{\hat{\phi}_{k', \ell'}} \hat{u}_{k-k', \ell-\ell'}$$

を得る. この加算無限連立常微分方程式は, 偏微分方程式 (1) を関数空間における「無限次元 Hamilton 力学」として表現したものである.

u の Fourier 係数の実部と虚部が共役な変数を与える. 形式的に, この無限次元ハミルトニアン流の発散を計算すると「Liouville の定理」が成り立つ. したがって関数空間の無限次元測度

$$\prod_{k, \ell} dq_{k, \ell} dp_{k, \ell}$$

は不変測度を与える.

次に, 3 次元の渦方程式 (非圧縮流 v による渦度 f の輸送方程式)

$$\partial_t f - \nabla \times (v \times f) = 0 \quad (3)$$

を考えよう. 有界な単連結 3 次元領域 Ω を考える. f は境界条件

$$n \times (v \times f) = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

を満たすとする (n は境界 $\partial\Omega$ 上の単位法線ベクトル). f を curl の固有関数を用いて展開する. すなわち, 固有値問題

$$\nabla \times \varphi = \lambda \varphi \text{ in } \Omega,$$

$$n \cdot \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

の解として curl の固有関数を定義する. この固有値問題は, 実固有値のみもち, 固有関数は完全系を与えることが証明できる (Ω が多重連結の場合には, 調和ベクトル場を分離する工夫が必要である. その場合も含め, 証明は参考文献 [1] 参照).

規格化された固有関数を $\varphi_j(x)$ と書くと, $f(x, t) = \sum_j c_j(t) \varphi_j(x)$ と展開してよい. このとき, $\prod_j dc_j$ は不変測度となる. 実際, (3) と境界条件を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c_j &= (\nabla \times (v \times f), \varphi_j) = (v \times f, \nabla \times \varphi_j) = \lambda_j (v \times f, \varphi_j) \\ &= \lambda_j \left[\sum_k c_k (v \times \varphi_k, \varphi_j) \right]. \end{aligned}$$

$(v \times \varphi_j) \cdot \varphi_j \equiv 0$ であるから $\partial (dc_j/dt) / \partial c_j = 0 (\forall j)$. したがって, 無限次元関数空間の流れ $(dc_1/dt, dc_2/dt, \dots)$ は非圧縮である. 多重連結領域の一般的な場合と物理的な応用については [2] を参照.

参考文献

- [1] Z. Yoshida and Y. Giga, "Remarks on Spectra of Operator *rot*" Math. Z. 204, 235 (1990).
- [2] N. Ito and Z. Yoshida, "Statistical Mechanics of Magnetohydrodynamics" Phys. Rev. E 53, 5200 (1996).