講座

プラズマ理論の技法

支援論文

C. ナヴィエ・ストークス方程式の数理解と乱流モデル

吉田善章

(東京大学大学院新領域創成科学研究科)

Mathematical Theory of Navier-Stokes Equations and Turbulence Model

YOSHIDA Zensho

Graduate School of Frontier Sciences, University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

(Received 26 April 2002)

Abstract

The Navier-Stokes (NS) system of equations is a central paradigm of nonlinear partial differential equations describing nonintegrable dynamics. The mathematical analysis of the NS system invokes a priori estimates for the energy and enstrophy. The difficulty stemming from the vortex-tube stretching effect is explained. By replacing the convective nonlinear term by a random noise term, one can develop a statistical model of turbulence. The mathematical framework of such modeling is also reviewed.

Keywords:

Navier-Stokes equation, priori estimate, Langevin equation, turbulence

C.1 対流型非線形性と非可積分系

一般に $(U \cdot \nabla) V$ の形の非線形項を「対流型非線形性」という。この特殊な形の非線形性は、非線形数理解における最も重要な研究テーマであるといつて過言ではない。標語的には

対流型非線形性 + 分散効果
= Korteweg - de Vries (KdV) 方程式,
対流型非線形性 + 散逸効果
= Navier - Stokes (NS) 方程式

と理解できる。この両者が、数理解物理の双璧を成す。分散(3階の空間微分)を加えた KdV 方程式は「可積分系」を代表する方程式であり、一方、散逸を加えた NS 方程式は「非可積分系」を代表する方程式である。

NS 方程式は、流体運動の複雑性に対応する極めて多様な振る舞いを包摂する。このような方程式に関する研

author's e-mail: yoshida@k.u-tokyo.ac.jp

究では、法則(方程式)と現象(解)の双方を「数式で表す」ことには、明らかに限界がある。数式によって表された法則に対して、「その解が数式では表せない場合」の研究が必要となるのである。

まず、次項では数学的な問題がどこにあるのかを明らかにしつつ、抽象数学における理論の関心である「解の存在問題」について述べる。物理の観点からは、対流型非線形性を「モデル化」して、物理的なパラメータを評価できる理論を開発することが主題となる。これは、統計的な概念を導入することによるほかない。解の具体形を問題とせず、統計的な特性を抽出しようという考えである。本章で解説された乱流の統計理論は、まさにこのような考えかたに基づくものであった。対流型非線形項が生み出すアンサンブル平均量の無限階層を、統計的根拠によって切断しようというのが、その「モデル」の主題である。本節の第3項では、もう一つの異なる手法とし

て、対流型非線形項そのものをランダム項としてモデル化するというアプローチを紹介する。

C 2 NS 方程式の数学的理論

N 次元空間における NS 方程式とは

$$\partial_t V + (V \cdot \nabla) V = \varepsilon \Delta V - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2)$$

と表される $N+1$ 連立偏微分方程式である (ε は正の定数). 領域 Ω が境界 $\partial\Omega$ をもつ場合は

$$V = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (3)$$

を仮定する. もちろん, 物理の問題としては $N=3$ である. (1) の右辺に外力項を加えることもある. この外力項が未知関数であり, V あるいは p に依存する場合は, 問題が大きくなる. MHD 方程式はその一つの例である.

NS 方程式は非圧縮な流れを考えるので, 「渦」の運動を記述することが中心的な問題である. 3 次元空間内の渦の運動方程式とは

$$\partial_t U - \nabla \times (V \times U) = \varepsilon \Delta U \quad (4)$$

なる方程式である. (1) の両辺の curl をとり, $\nabla \times V = U$ とおくと (4) が得られることがわかる. U は「渦度 (vorticity)」と呼ばれるベクトル場であり, V は渦を運ぶ流れを表す. ベクトル公式を使って書き換えると

$$\partial_t U + (V \cdot \nabla) U = (U \cdot \nabla) V + \varepsilon \Delta U \quad (5)$$

左辺は Lagrange 微分, 右辺第 1 項は「渦管の引きのばし」を与える項である.

2 次元 $[(x, y)$ 平面とする] の場合には, 渦度は (x, y) 平面に垂直な z 方向を向いたベクトルの成分と見なすことができ, 擬スカラー場 U によって表わされる. よって, 渦管の引きのばし項は 0 となる. また, 非圧縮流は, 流れ関数 (流れのハミルトニアン) H を使って $V = (\partial_y H, -\partial_x H)$ という形に書くことができる. $\varepsilon = 0$ の場合, (5) は Liouville 方程式

$$\partial_t U + \{H, U\} = 0 \quad (6)$$

に帰着する. ただし, $\{a, b\} = (\partial_y a) \cdot (\partial_x b) - (\partial_x a) \cdot (\partial_y b)$ は Poisson の括弧である. つまり, 2 次元の理想非圧縮流は, 渦度の保存的輸送を引き起こす. H と U は Poisson 方程式 $-\Delta H = U$ で関係づけられているので, (6) は非

線形であることに注意しよう.

3 次元の場合には, 渦管の引き伸ばし項が消えない. このことが, 2 次元と 3 次元を分ける決定的な違いとなる. このことを「流れの積分量」を観察することで示そう.

流れのエネルギーとエントロフィーは

$$E = \frac{1}{2} \|V\|^2, \quad W = \frac{1}{2} \|U\|^2$$

と定義される積分量である. ただし, $\|f\|^2 = \int |f|^2 dx$ と定義した. $\varepsilon = 0$ とおくと (非粘性), 2 次元非粘性流の方程式 (1), (6) に対して, これらはともに不変量であることが容易に示せる. $\varepsilon > 0$ とすると, W も E も保存されなくなるが, 代わりに, 滑らかな解に対して

$$E(t) = E(0) - \varepsilon \int_0^t \|U(t')\|^2 dt', \quad (7)$$

$$W(t) = W(0) - \varepsilon \int_0^t \|\nabla U(t')\|^2 dt' \quad (8)$$

を得る. 数学では, このような関係式を「a priori 評価」という. 解の「具体的な形」を知らなくても, 解が必ずみたださなければならない評価式という意味である.

一方 3 次元の場合, エネルギー E については同様の関係が成り立つが, エントロフィー W の方は, まったく様子が異なり, この種の関係式は導けなくなる. 渦管の引き伸ばし項が加わるからである (3 次元の場合の W の時間変化に関する評価は, 例えば [1] 参照).

NS 方程式の数学理論では, 3 次元の場合の「解の存在」が未解決の問題として残されている. これは, エントロフィー W の上限を決める (8) のような関係式が上手く作れないからである. ここでは, その概要を紹介しよう.

抽象的に解を構築する手順は, 概ね次のようなものである. まず, (1)-(2) をまとめて「発展方程式」として定式化する. (2) は, 未知関数 V の「定義域」を規定しているわけだから, (1) は Hilbert 空間

$$L_\sigma^2(\Omega) = \{V \in L^2(\Omega); \nabla \cdot V = 0, n \cdot V = 0\} \quad (9)$$

の中で定義された「常微分方程式」と解釈することが可能である ($n \cdot$ は境界 $\partial\Omega$ における法線成分への写像を表す). $L_\sigma^2(\Omega)$ は Lebesgue 空間 $L^2(\Omega)$ の閉部分空間であるから, $L^2(\Omega)$ から $L_\sigma^2(\Omega)$ への正射影 $\mathcal{P}$ を定義することができる. 任意の $u \in L_\sigma^2(\Omega)$ に対して

$$(\nabla p, \mathbf{u}) \equiv \int_{\Omega} (\nabla p) \cdot \mathbf{u} \, dx = - (p, \nabla \cdot \mathbf{u}) + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, ds = 0$$

が成り立つので、 $\mathcal{P}(\nabla p) = 0$ 。(1)の両辺に $\mathcal{P}$ を作用させると $L_{\sigma}^2(\Omega)$ 内の発展方程式

$$\partial_t V = \mathcal{A}V - \mathcal{P}(V \cdot \nabla) V \quad (10)$$

を得る。ただし $\varepsilon \mathcal{P} \mathcal{A} = \mathcal{A}$ と書いた。

$\mathcal{A}$ は $L_{\sigma}^2(\Omega)$ の自己共役作用素であることが示せるので、 $e^{t\mathcal{A}} (t \geq 0)$ などは自在に定義できる。そこで(10)は、

$$V(t) = e^{t\mathcal{A}} V_0 - \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} \mathcal{P}[V(s) \cdot \nabla] V(s) \, ds \quad (11)$$

と等価である。これを解くというのは、(11)の右辺で定義される写像が「不動点」をもつことを示すことに他ならない。

(11)は、いきなりは取り付けないので、これに似ている簡単な方程式を考えて「近似解」を作ることからはじめる。形式的に非線形項 $\mathcal{P}(V \cdot \nabla) V$ を F とにおいて、この近似を $F^{(n)}$ としよう(いろいろな近似法があるだろう)。 $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(n)} = F$ となるようにしておいて、 $V = F(V)$ を近似した

$$V^{(n)} = F^{(n)}[V^{(n)}]$$

を解くわけである。この「近似列」が収束することを証明すればよい^{注1)}。

この最後の段階で、いわゆる「コンパクト性」の概念が必要になる。つまり、列の極限が収束することの約束である。この「契約」を与えるのが「a priori」評価なのだ。

エネルギー E の有界性だけによって約束されるのが、いわゆる「弱解」である。弱解は弱収束列を作るので、例えばエネルギー評価(7)でも $=$ が成り立たなくなつて $\leq$ に後退する。でも、この向きの不等号なら、有界性がいえているから十分ありがたい。この辺りの論理の組み方が、関数解析の醍醐味である。しかし、弱解というのは無限次元ベクトル空間をあつかうトリックが生み出した人工物に過ぎないのかもしれない。

きちんと微分方程式を満たす解(古典解、あるいは正則解という)を作ろうとすると、もっとちゃんとした収束を議論しなくてはならない。このときエンストロフィーの有界性が必要となる。2次元では、したがって古典解が存在することが証明できるのである。

3次元の場合は、エンストロフィーの大きさが、長時間にわたって有限に抑えられる保証がない(まだ見つかっていないともいえるし、原理的にないのかもしれない)。物理的にいうと、非線形項(渦管の引きのばし項)が生み出す渦の発生率が粘性によるエンストロフィーの散逸率を超えるかどうかということが問題である。3次元の場合には、渦管の引きのばしによって渦が強められるので、これが粘性散逸を卓越するかもしれない。2次元流では、渦管の引きのばし効果が無い(つまり非線形効果が弱い)ので、粘性散逸の方が強く働く。このために、渦の強さが発散して微分できなくなるといえることが起きないことが保証できるのである。

C 3 非線形項のモデル化

「乱流」という場合は、ある種の「準定常状態」を仮定している。つまり、渦の生成と散逸が平均的にバランスした状態である。前項で述べたように、NS方程式の数理解の立場からは、エンストロフィーが準定常値をもつかどうかは、3次元の場合には未解決問題である。しかし、現実の現象を考えるならば、このようなバランスが存在すると考えざるを得ない。

ここでは、準定常状態が存在することを「前提」として、対流型非線形項が「ランダムなノイズ」のような働きをするというモデルを考えよう。

このようなモデルを作るときの興味深い課題は、準定常状態を「平均値と揺らぎ」に分離しようというときに、平均値が先験的に決まっているのではなく自発的に(非線形的に)決定されるであろうこと、平均値が一つとはかぎらないことである。以下では、伊藤公孝氏たちが近年展開している理論を紹介する[2]。

不均一プラズマ中の亜臨界乱流を考える。示強性物理量の平均場の勾配が、乱れを作るエネルギー源である。一方、乱れはプラズマ中の輸送を増大させ、平均場の勾配を減少させようとする。こうして、平均場の勾配と乱れが拮抗した状態が形成されようとする。

基本的な構想は、対流型の非線形性をランダムな雑音(外的に加えられるノイズではなく、自己ノイズとして働く)と平均的な摩擦力(渦粘性; eddy viscosity)との和としてモデル化することである^{注2)}。得られたLangevin方程式には、通常の衝突による摩擦項、熱ゆらぎの雑音項のほかに、乱流による摩擦項、乱流の雑音項が含まれる。熱ゆらぎは温度でゆらぎの強度が決まるが、乱流の強度は内的に決める必要がある。つまり、乱流の強度を表すパラメタ(例えば自己相関係数)は、駆

動力である平均場の勾配(例えば圧力勾配 ∇p)と関係させて決めることになる。

未知変数を f (例えば $f = (\phi, j, p)^T$, ポテンシャル ϕ , 電流 j , 圧力 p) とし, 線形応答テンソルを $\mathcal{L}^{(0)}$ (不安定固有値(実部 < 0)をもつかもしれない), 非線形項を $\mathcal{N}(f)$, 熱揺動を $\tilde{S}_{th}$ と書き, モデル方程式を形式的に

$$\partial_t f + \mathcal{L}^{(0)} f = \mathcal{N}(f) + \tilde{S}_{th} \quad (12)$$

と書く。ここで非線形項 $\mathcal{N}(f)$ を渦粘性 ($-\gamma_i f_i$) と白色ノイズ ($\tilde{S}$) の和で置き換える。渦粘性をたした線形作用素を $\mathcal{L}_{ij} = \mathcal{L}_{ij}^{(0)} + \gamma_i \delta_{ij}$ と書くと, Langevin 方程式

$$\partial_t f + \mathcal{L} f = \tilde{S} + \tilde{S}_{th} \quad (13)$$

を得る。積分形で書くと ((11) 参照)

$$f(t) = e^{-t\mathcal{L}} f(0) + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{L}} \{\tilde{S}(s) + \tilde{S}_{th}(s)\} ds. \quad (14)$$

準定常状態であるためには, $\mathcal{L}$ の固有値はすべて安定(実部が非負)でなくてはならない。渦粘性が適当に加わるとして, これを認めよう。

$\mathcal{L}$ は作用素であるが, 定数行列で置き換える^{注3)}。最も不安定に近い(つまり小さい)固有値を拾うようにして ($0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) 3つの固有ベクトルを用いて

$$e^{-t\mathcal{L}} = A^{(1)} e^{-t\lambda_1} + A^{(2)} e^{-t\lambda_2} + A^{(3)} e^{-t\lambda_3}$$

と書く。これを用いると, (14) は簡単な積分方程式になる。

ここで残る non-triviality は, 1) $f(t)$ の揺らぎが $\tilde{S}$ であるということの整合性, 2) 非線形性は, 応答の線形モデル $e^{-t\mathcal{L}}$ の固有値 λ_j に押し込められていることの二点である。1) から, 代数関係式を生産することができよ

う。2) は, λ_j にいろいろな要因を含めて問題を大きくする可能性を与える。 λ_j は, $\mathcal{L}^{(0)}$ に含まれる不安定性の成長率を含むから, 平均場の勾配(揺らぎの駆動力)の関数であろう。また, 渦粘性も含むから, 揺らぎの大きさにも依存するであろう。これらを含む代数関係式は, 当然複雑であって, 分岐やカタストロフィーを示すモデルになることが期待できる。

伊藤氏たち[2]は, 不均一磁場中で圧力勾配をもつプラズマにおいて, (電子慣性による)電流拡散非線形交換型不安定性をつくる亜臨界乱流を考えながら, 上記のようなモデルを導出している。揺動振幅を平均場の圧力勾配と温度の関数であらわすと, カスプを形成することが示されている。

参考文献

- [1] 吉田善章: 集団現象の数理(岩波書店, 1995)。
- [2] K. Itoh, S.-I. Itoh and A. Fukuyama, *Transport and Structural Formation in Plasmas* (IOP, Bristol, 1998).

注1: もう一つのやり方は, (11) をイタレーションで解こうという方法である。すなわち $V^{(n+1)} = F(V^{(n)})$ によって近似列を生成する。例えば, H. Fujita and T. Kato, Arch. Rational Mech. Anal. 16, 1141 (1964)。

注2: 摩擦力と白色雑音のランダム力をもつ Langevin 方程式から第1, 第2キュムラントを残した FP 方程式を作ると, その定常解として Maxwell 分布が導かれるという大筋があることを思い出そう。

注3: 前項の数学的理論では作用素 $\mathcal{A}$ の性質をフルに使う必要があるので, もちろんこのような簡略化はできない。ここでは, 非線形項をノイズ項に置き換えているので, これを作用素の性質を使って押さえ込む必要もすでないのである。