プラズマの平衡理論における ロンドンの式の役割について

伊藤 博

(大阪大学名誉教授)

Introduction of London Equation Known in the Theory
of Super Conductors into the Two Fluid Model of Plasmas

ITOH Hiroshi

(Received 13 June 2003)

The existence of the London layer along the boundary of the stable plasma is studied by relations including London equation obtained by the variational calculation using a Lagrangian density of the two fluid model of the plasma. Most interesting result derived by this process is that the length of the Larmor radius of the electron is equal to the width of the London Layer when the beta value of the plasma is equal to 1. This is explained by a simple model for the diamagnetic flux produced by rotating electrons in the magnetic field. Furthermore, the same result is obtained by using the equilibrium condition of the plasma which satisfies all the conditions given by our calculation.

Keywords:

London layer of the plasma, London length of the plasma, diamagnetic field

1. 序論

表題に掲げたロンドンの式というのは超伝導の理論に特有のもので、それ以外の分野では導入できないとよく言われてきた[1]。そして極低温と対極の超高温プラズマの理論にこの式の導入の可否について Physical Review Letter 誌上で活発な討論がおこなわれたことを知り[2, 5]、今さらながらこの問題に対する認識を改めたのである。

ところでプラズマの理論的モデルとしてイオンと電子という2種の粒子群を流体的に扱う磁気流体力学が存在する。このモデルにおいて適当なラグランジアン密度を設定し、これから変分原理によって流体の流れの量を磁場や電場の関数として表した上、この流体の運動方程式を求めるといふ試みがこれ以前に著者によってなされていた[6]。そのなかでロンドンの式がイオンと電子の相対的な流れ速度として導かれていた。残念なことに著者は当時その重要性に気づくことなく、それ以上の発展を見送ることになってしまった。ところで前述のロンドンの式に関する論戦の中心であった J.B. Taylor 氏からの私信に刺激され、この問題を再び取り上げた論文をある国際学会に発表した[7]。そしてロンドン式から得られる電流の渦度が不変量ではあるが媒質の電子密度の関数であり、固体の密度に対しては磁束の量子化の式になり、プラズマの密度領域ではよく知られた磁力線に沿って運動する電子の示す不変量になることを示すことができた。このことは渦度に関する不変量が実は電子の角運動量に関係しているための結果である。ところでロンドンの式を組み込んだ新しい理論の枠内では、流体の運動方程式が従来のものと異なってくる。そのせい

で核融合研究で最も我々の関心が高い超高温プラズマの平衡条件にどのような影響が生じるかが次の重要なテーマとして登場してきた。この問題はかなり息の長い話になることが予想され、協力者を探したところ幸いにかねてから知己のあった故京都大学教授若谷誠宏氏の2年にわたる御助力を得ることができた。残念なことに氏は2003年初頭に急逝されたのでいくつかの問題は未完になったけれど、ひとまず結果を纏めることにしたのである。

2. 変分計算におけるロンドンの式の導出

ここで使用されたラグランジアン密度は次のようである[6]。

$$L = \frac{1}{2} \rho_i \vec{v}_i^2 + \frac{1}{2} \rho_e \vec{v}_e^2 + \vec{A} \cdot \vec{j} - \rho U(\rho, S) - \frac{\vec{B}^2}{2\mu}.$$

ここで使われた記号は $\rho_i = n_i M$, $\rho_e = n_e m$, $\vec{A}$: ベクトルポテンシャル, S : エントロピー, U : 内部エネルギーであり、使用された副条件はイオン流と電子流についての連続の式

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div} \rho_i \vec{v}_i = 0, \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div} \rho_e \vec{v}_e = 0$$

と断熱条件

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \text{div} \rho S \vec{V} = 0$$

である。全系の密度 ρ と流速 $\vec{V}$ は次式で定義され、

$$\rho \vec{V} = \rho_i \vec{v}_i + \rho_e \vec{v}_e$$

この関係は次のように書くことにする．

$$\vec{V} = x \vec{v}_i + (1-x) \vec{v}_e, \quad \left(x = \frac{M}{M+m}, \quad n_i = n_e = n \right)$$

イオンと電子の相対速度を $\vec{v}$ として電流 $\vec{j}$ は

$$\vec{j} = ne\vec{v}$$

と書ける．そして変分原理

$$\delta \int L d\tau dt = 0$$

から 以下の式が得られる．

$$\vec{V} = -x \nabla \phi_1 - (1-x) \nabla \phi_2 - S \nabla \lambda$$

$$\vec{v} = -\nabla (\phi_1 - \phi_2) - e \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{A} \quad (2.1)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (2.2)$$

$$x \dot{\phi}_1 + (1-x) \dot{\phi}_2 + S \dot{\lambda} - \frac{1}{2} \vec{V}^2 - \frac{1}{2} x (1-x) \vec{v}^2 = U + \frac{P}{\rho}$$

$$\dot{\lambda} + \vec{V} \cdot \nabla \lambda = T.$$

ここで ϕ_1, ϕ_2, λ は副条件につける未定定数であり, P, T は系の圧力と温度である．上式のなかで (2.1) がイオンの関与を考えたロンドンの式の一般化であり, (2.2) はマクスウェルの式である．

3. ロンドンの式

(2.1) と (2.2) を組み合わせると

$$\Delta \vec{B} = \frac{ne^2}{m} \mu \vec{B} - \frac{1}{n} \nabla n \times \text{rot} \vec{B} \quad (3.1)$$

という微分方程式がえられる．超伝導理論では固体の密度が一定として右辺の第 2 項を捨てて, 系の変化が z 方向のみとして

$$B_z = B_0 \exp \left(-\frac{z}{\Lambda_L} \right) \quad (3.2)$$

という解を使う． Λ_L は

$$\Lambda_L^2 = \frac{m}{ne^2\mu}$$

で与えられ, ロンドン長またはロンドン定数といわれ, 外部磁場の侵入長さである．固体の密度に対する Λ_L の大きさは結晶格子の広がり程度であるため, 超伝導理論が量子論的であるといわれる根拠の一つであろう．これに対してプラズマの密度ははるかに小さく, Λ_L の値は高密度といわれる大型トカマクでもミリメートル程度である．しかしながら, 式 (3.1) において密度分布の項を残した解はプラズマの大きさが Λ_L に比べて十分大きい時は近似解 (3.2) で

十分であることがわかっている．いずれにしてもプラズマでは電子密度は一定ではないから今後 Λ_L を単にロンドン数と呼ぶことにする．(2.1) 式の両辺の展開をとった式

$$\text{rot} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{B} = \frac{e}{m} \vec{B}_i \quad (\vec{B}_i = -\vec{B}) \quad (3.3)$$

もよく使われ, これもロンドンの式と呼ばれている．この式の左辺は電流の流れの作る渦でもあり, この流体が抵抗のない理想流体であれば渦度は保存される[7]．我々の考えているプラズマでは磁場より距離 Λ_L 以上離れたところには外部磁場も電流も存在しないから磁束密度 Φ は保存する．

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \pi B_i \Lambda_L^2 = \pi \frac{m}{ne^2\mu} B_i$$

この結果から物理定数を除いて,

$$\frac{B_i}{n} = inv. \quad (3.4)$$

が不変量ということになる[7]．さて (3.3) 式は流体表示であるが, 一個の電子が磁力線の周りを旋回して反磁性磁場を作るモデルに習い, 円形の電子流を考える．磁力線の向きを z 方向とし, 電子流の速度を v_θ とすると

$$v_\theta = -r \frac{eB_z}{m}$$

であり, r はラーモア半径である, したがって, 電子流の運動はロンドンの式によると, 単一の電子のラーモア歳差運動になることを示している．これは決して偶然ではなく, ロンドン層においては粒子密度が小さく, そのかわり外部磁場が強くて電子の粒子性が強く現れているからである．このことを念頭においたプラズマと外部磁場の境界層, すなわちロンドン層についてのモデルが著者によって与えられた[7]．

Fig. 1 は B_0 方向に外部磁場が存在し, プラズマと外部磁場の境界にあった電子が $\vec{B}_0$ によって半径 r の円形軌道を描きながらプラズマ内部に進入し, $\vec{B}_i$ という逆磁場を作って外部磁場を薄めるという状況を表している．そして磁場やラーモア径等の間には次の関係が存在していることが図からたやすくわかる．

$$B_i L = \mu n e r \left(\frac{eB_0}{m} \right) L \Lambda_L \quad (3.4)$$

この関係は簡単化すると

$$\frac{B_i}{B_0} = \frac{r}{\Lambda_L} \quad (3.5)$$

という興味ある結果になる．もし $B_i = B_0$ であれば, r と Λ_L が等しくなり, 媒質中の磁場は零となってベータ値が 1 ということになる．この条件式とベータ値の関係をあげれば次のとおりである．

Fig. 1 Schematic model for the diamagnetic flux of the plasma.

$$\begin{aligned} r &= \Lambda_L & \beta &= 1 \\ r < \Lambda_L & & \beta &< 1 \end{aligned}$$

以下の議論とは直接関係がないけれど、(3.4)と(3.5)から $r = \Lambda_L$, $B_i = B_0 = B$ において、不変量 B/n が電子の角運動量に比例することが以下の式で示され、超伝導の磁束密度の量子化の式が得られるが、それについては文献を参照されたい。

$$B/n = \frac{\mu e}{m} (m r^2 \omega_L), \quad \left(\omega_L = \frac{eB}{m} \right)$$

4. 平衡条件の導入

2節に示した変分計算で得られた式を組み合わせると、MHD流体の運動方程式が次のように得られる。この式の右辺の第一項を無視すると従来の方程式と一致するようになる。

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -x(1-x) \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho} (\vec{j} \times \vec{B} - \nabla P).$$

しかしこの項と次の項の中の電磁力はともに磁場に関して同じ2次の大きさであるため、このような議論はできない。系が定常でありしかも静止してるとして $\vec{V} = 0$ とすると、この式は以下ようになる。

$$-x(1-x) \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho} (\vec{j} \times \vec{B} - \nabla P) = 0. \quad (4.1)$$

さらに系が平衡であるとして圧力 P と磁気圧の和が一定であるから

$$\nabla \left(P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \right) = 0$$

が成立するとする。この式の左辺は(4.1)を使って書き換えると

$$\nabla \left(P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \right) = \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} - \rho_e \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

となりさらにベクトル公式によって以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \left(P + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \right) &= \nabla \left(\frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 - \frac{1}{2} \rho_e \vec{v}^2 \right) \\ &+ (\vec{j} \times \vec{B}_0) + (\vec{j} \times \vec{B}_i) \quad (4.2) \end{aligned}$$

この計算で ρ_e をあたかも定数のように扱い括弧の中に入れたが、それは

$$\dot{\rho}_e + \text{div} \rho_e \vec{v} = 0, \quad \text{div} \vec{v} = 0$$

という二つの条件で許される。そして(4.2)の右辺が零になるためには、

$$\frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 - \frac{1}{2} \rho_e \vec{v}^2 = C, \quad (I) \quad \int \vec{j} \times (\vec{B}_0 + \vec{B}_i) = 0 \quad (II)$$

という二つの条件が満たされることが必要である。ここで、 $\vec{B}_0$ は(2.2)を満たす外部磁場である。条件(II)の積分は(I)が成立することに釣り合うための不可欠な操作であるが、詳しいことは次節で述べることにする。

5. 平衡条件の検討

前節の二つの平衡条件の議論にはモデルが必要である。強い磁場に囲まれたベータ値が1であるプラズマがあり、その表面から飛び出した電子やイオンが磁場によって再びプラズマ本体に返されるという単純なモデルであり、このような過程が起こる領域がロンドン層になることを前節の条件によって考えていくことにする。(I)式の右辺の定数 C は零を含む正負の定数である。 C が零であれば磁場と電子流のエネルギーが釣り合い、プラズマの形状が円筒形とすると釣り合いの式は

$$\frac{1}{2\mu} B_z^2 = \frac{1}{2} n m v_\theta^2, \quad \frac{1}{2\mu} B_\theta^2 = \frac{1}{2} n m v_z^2$$

となり、それぞれを書き換えると

$$\frac{m v_\theta}{e B_z} = \left(\frac{m}{n e^2 \mu} \right)^{1/2}, \quad \frac{m v_z}{e B_\theta} = \left(\frac{m}{n e^2 \mu} \right)^{1/2}$$

である。これはともに電子のラーモア径がロンドン長に等しいことを示している。すなわち

$$r = \Lambda_L \quad (5.1)$$

であり、3節で議論したモデルによる結果と一致する。この関係によると、プラズマの本体から流出した電子流はロンドン層の中に等しい半径の半円の軌道を描いて本体に環流していく。このような軌道の頂点の軌跡がプラズマ柱を取り巻く反磁性電流を作り、プラズマのベータ値を1にすると考えられる。一方ロンドン層内の磁力線に捕捉されている電子は外方に向かう磁場の強度の上昇により、常磁性を示す方向にドリフトし、系のベータ値を下げることになる。このようなロンドン層内の電子のすべてが(5.1)を満足する運動をする時は C の値は零であるがそうでなければ平衡条件Iは

$$\frac{1}{2\mu} B^2 - \frac{1}{2} n m v^2 = \frac{B_z^2}{2\mu} = C \neq 0$$

Fig. 4 Change of the profile of the magnetic field inside the London layer with the decrease of the beta value of the plasma from 1 to some value less than 1.

議論によりベータ値が1である平衡プラズマが密度の減少によって磁場、特にロンドン長が変化の様子が示してある。

この議論のなかでロンドン層に取り囲まれたプラズマ本体が存在する領域のベータ値が1である時の系のエネルギー密度を与えておく。領域に存在していた縦磁場 B_0 が内部にある密度 n の電子のラーモア回転運動によって完全に打ち消されているとする。この電子群の運動エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}nmv_{\theta}^2 = \frac{1}{2}nm(r\omega)^2$$

である。領域の内部では、見かけの磁場は零であるからロンドン層内の電子のラーモア径はロンドン長に等しくなければならない。そこで、

$$E = \frac{1}{2}nm\Lambda_L^2\left(\frac{eB_0}{m}\right)^2 = \frac{1}{2\mu}B_0^2 = \frac{1}{2\mu}B_i^2$$

ということが結論される。したがって見かけの磁場が消滅したようでもそのエネルギーは電子群の運動エネルギーに変換されていることが理解される。

6. 結 言

従来ともすれば難解とされてきたロンドンの式とかロンドン層の概念は、超伝導の世界のものであり、電子とイオンからなる2流体モデルが適用されるプラズマの世界と無縁のものとされてきた。しかしながら定常の外部磁場に接する電子やイオンの集合体があるとすると、その表面の物質密度の低い領域において、特に電子が自由粒子のように振る舞い、その反磁性運動により磁場を緩める電流が発生することがこの研究によって述べられてきた。とくにロンドンの式がプラズマの2流体理論のなかに取り込まれ、それにより我々があつかったモデルの中でどんな新しい現象が生まれるということにかなり重点を置いて記述してきたつもりである。そのなかでも従来でも重大な概念であり、とくにプラズマの閉じ込め実験の成果の一つであるベータ値の問題に理論的考察を与えることができたと思う。その議論の中心になるのが逆磁場 B_i であり、この量は実はプラズマ電流の作る渦度という重要な概念である。逆磁場 B_i が存在することは本来そこにあった真空磁場 B_0 とそれを消すために必要な密度 n の電子群が存在していることになる。したがってFig. 3において B_i をそれに比例し電子密度で置き換えたのはこのような理由によるものである。逆に B_i が消滅すると、その場所に消されたもとの真空磁場が

あらわれ、同時にラーモア回転をしていた電子群が開放されることになる。最後に別の立場からもう一度ロンドンの方程式に触れておく。第3節の冒頭に変分で得られた式の組み合わせで磁気流体内の磁場を求める微分方程式を示した。この式の右辺の第二項は密度が不変であれば消滅し、その値如何に拘らず媒質内部の磁場は零になってしまう。そこで境界における密度の立ち上がりを無視して、内部だけを考える場合は良いけれど、プラズマの時は密度の立ち下げや立ち上げが生じる場所に直交する電流が生じることが多い。ここの議論では、ロンドン層に生じる系のベータ値を上昇させる電流は密度の勾配に直交するもので無視することはできない。このような理由から本論文においては、(2.1)式をロンドンの式と呼ぶことにしたのである。

あとがき

筆者は大阪大学に在籍中、主として超高温プラズマの発生と加熱に関する実験プロジェクトの推進に従事してきた。一方磁気流体の理論研究にも興味を持ち、超伝導理論の要になるロンドンの式を従来の磁気流体としてのプラズマの理論の枠に組み込み、その結果に注意を払ってきた。そしてプラズマと真空磁場の境界、すなわちロンドン層中に存在する逆磁場が系のベータ値を決定することを見いだしたのである。もともと核融合研究の目標は高ベータプラズマの保持にあることはいうまでもないとして、このような新しい研究をさらに発展させたいと考え、かねてからの知人でありプラズマの理論研究の最前線にあった京都大学の若谷誠宏教授に研究の協力を依頼し、快諾を得たのである。以後月1回のペースで会合を重ね、それまでの研究結果の評価と発展のための討論が約2年間続いた。残念なことに同教授が急逝され、今後の研究に重大な挫折が生じることになった。若谷さんは理論家でありながら実験に関する広い知識を持たれ、そのことはこの研究においても大変参考になったことは間違いない。先生は新しい平衡と安定性の理論をヘリカル系のプラズマに当てはめてみたいといわれていたのを思い出す。いずれにせよまだ未完成ながら研究がここまでこられたのも、先生のお人柄とそこそご協力のおかげと感謝する次第である。

参考文献

- [1] F. London, *Superfluids*, Vol. I (Dover Press, New York, 1960).
- [2] W.F. Edwards, Phys. Rev. Lett. 47, 1863 (1981).
- [3] B.S. Segall, L.L. Foldy and R.W. Brown, Phys. Rev. Lett. 49, 417 (1982).
- [4] P.G.N. de Vegar, Phys. Rev. Lett. 49, 117 (1982).
- [5] J.B. Taylor, Nature 229, 418 (1982).
- [6] H. Ito, Prog. Theor. Phys. 48, 1442 (1972).
- [7] H. Ito, *Proc. Quantum Chemistry and Technology in the Mesoscopic Level*, Fukui (1993), J. Phys. Soc. Jpn. 63 (1994) Suppl. A 23.