5 . プラズマフロー速度シアと粘性渦形成

田中雅慶
(核融合科学研究所)

Viscous -Vortex Formation and the Role of Flow Velocity Shear in Plasmas

TANAKA Masayoshi Y.

National Institute for Fusion Science, Toki 509-5292, Japan

(Received 14 February 2004)

Vortex formation and the role of flow velocity shear are considered in a magnetized plasma with finite viscosity. The essential difference between a viscous-vortex and an inviscid-vortex is the existence of a radial flow, which transfers the vorticity into the core to be balanced with the diffusion due to viscosity. It is concluded that the formation of a viscous vortex (a stationary localized structure of vorticity) is generally possible in plasmas having finite viscosity.

Keywords:

vortex formation, vorticity, Burgers vortex, viscosity, plasma hole, flow shear

5.1 はじめに

プラズマ中の構造は、相反する効果のバランスによって発生している場合が多い。例えば 1 次元では、非線形性による波の急峻化と分散による波の平坦化が釣合ってソリトンを形成する。また、非線形性が散逸による拡散効果と釣合えば、衝撃波を形成する。このように 1 次元系の構造形成に関しては、競合関係にあるメカニズムがはっきりしていて、それぞれに特徴的なサイズが決まっている。では、2 次元ではどうだろうか？ 2 次元の基本構造である渦は、競合する効果のバランスとして出現しているのだろうか？

プラズマ中で渦の回転を駆動するのは通常 $E \times B$ ドリフトである。いま、局在化したポテンシャルの山があるとすると、プラズマはその等高線に沿って $E \times B$ 回転することになる。したがって、ポテンシャルの局在構造は渦であると言ってよい。この時、渦の大きさを決める要因はなく、いわば、回るものはすべて渦である。実際、ドリフト波の渦を記述する長谷川・三間方程式は双極渦解を持っているが、その大きさを決めるパラメータは物理的には決まらない[12]。つまり、任意の大きさの双極渦解を構成できる。

しかし、プラズマの粘性を考慮すると、渦形成は本質的に異なったものになる。なぜ粘性を考慮するかというと、基礎実験プラズマにおいて、プラズマホールと呼ばれる粘性が支配的な渦(粘性渦)が見つかったからである[3]。この結果は、粘性を決定する物理機構は何なのかという基本的な問題提起と同時に、渦形成に対する粘性の役割をもう一度見直す必要があることを示している。本小論では、後者について渦度のダイナミクスの観点から考えてみる。そ

author's e-mail: mytanaka@nifs.ac.jp

ここでは、渦度の集中と拡散のバランスによって、特性長を持った定常な渦が形成されることを示す。

粘性渦が非粘性渦と決定的に異なるのは、径方向流れの存在である。この流れは粘性摩擦によって(言い換えればフロー速度シアによって)駆動され、渦度の集中効果をもたらす。もし、粘性が無ければ、渦度の輸送がバランスするための一方の効果は存在しなくなる。したがって、有限粘性のプラズマでは、フロー速度シアは渦形成の本質的な部分を担っているのである。以下、最近見つかったプラズマホールを例として、渦度のダイナミクスとそのバランスとしての構造形成、さらにフロー速度シアの役割について考えてみたい。

5.2 渦度のダイナミクス

渦度のダイナミクスを考えるため、渦度方程式を出発点とする。渦度方程式は基本的に速度場だけの式であり、運動方程式のように密度やポテンシャルの勾配は陽に入っていない。そのため、渦度のダイナミクスに關与する物理過程が非常に明快に見えてくる。

以下、渦度方程式の軸対称・定常解を求める。簡単のため、外部磁場は一様定常で、 z 軸方向に向いているとする。プラズマの運動量の大半はイオンが担っているので、実験と比較することも念頭においてイオン流体の運動方程式(ナビエ・ストークス方程式)：

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{Mn} \nabla p - \frac{e}{M} \nabla \phi + \mathbf{v} \times \vec{\Omega} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1)$$

を考える．ここで， Mn は質量密度， p は圧力， ϕ はポテンシャル， $\vec{\Omega}$ はイオンサイクロトロン周波数ベクトル， ν は粘性係数（動粘性係数）である．第2粘性係数は0とした．一般に磁場が加わった場合，プラズマの粘性係数に対する表式はかなり複雑であるが[4]，ここでは磁場による効果は小さいとして（または，衝突緩和は十分早いとして）一定の係数とする．両辺の rot をとると，

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu \Delta \vec{\omega} + (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \vec{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2)$$

を得る．ここで， $\vec{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ は渦度である．傾圧項（baroclinic term） $\nabla n \times \nabla p$ は，渦度を生成する項であるが， ∇n と ∇p は平行なベクトルと考えてここでは無視した．

各項の意味を考えてみると， $\mathbf{v} \cdot \nabla \vec{\omega}$ は流れ $\mathbf{v}$ によって渦が運ばれる項を表していて，移流項（convection term）と呼ばれる． $\vec{\omega} \cdot \nabla \mathbf{v}$ は渦の向きに流れが運ばれる（引伸ばされる）項を表していて，伸張項（stretching term）と呼ばれる． $\vec{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v}$ はプラズマの圧縮や膨張に伴って渦度を増減させる項を表している． $\nu \Delta \vec{\omega}$ は粘性による渦度の拡散を表している．右辺第4，5項は外部磁場の効果を表しているが，この項はあとで見るように，渦度の値を一定量（ Ω ）シフトさせるだけなので，今考えている渦度のダイナミクスにとっては本質的でない．

いま，径方向に中心収束流（ $v_r \propto r$ ）があるとする．この径方向流れの発生機構については，粘性が本質的な役割を果たしているのだが，あとで議論することにして，ここでは仮定しておく．プラズマの密度，温度などは外部磁場の方向に一樣であるとする．流れは渦なし流れ（ $-ar, 0, v_z(z)$ ）と渦度を作る流れ（ $0, v_\theta(r), 0$ ）の和で書ける，

$$\mathbf{v} = (-ar, v_\theta(r), v_z(z)) \quad (3)$$

ここで， a は中心収束流の強さを表すパラメータである． z 軸方向の流れを考慮しているのは，収束流があるために中心に集まってきた流れは， z 軸方向に逃げなければならないためである． $v_z(z)$ の関数形は，非圧縮性を仮定すれば $v_z = 2az$ と決まるが，以下の議論では $v_z(z)$ を決める必要がないので，このままにしておく．したがって，非圧縮性の仮定もしない．渦度ベクトルはこの場合

$$\vec{\omega}(r) = (0, 0, \omega(r)) \quad (4)$$

となり， z 成分のみの2次元場となる．(3) 式を渦度方程式に代入すると

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - ar \frac{\partial \omega}{\partial r} = 2a\omega + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + 2a\Omega \quad (5)$$

を得る．

ここで，上に述べた対流項（左辺第2項）の意味を具体的に見ておこう．左辺第1項と第2項だけを釣合わせると， $\omega(r) = F(re^{at})$ となる（ F は任意関数）．この解の意味は， $t=0$ で $r=r_0$ における渦度 ω の値が $t=t$ では， $r=r_0 e^{-at}$ の位置に移動していることを示している．さら

に $t \rightarrow \infty$ では原点に収束する．これは中心に向かう流れによって渦度が原点に集められる事を意味している．左辺第1項と右辺第1項を釣合わせると $\omega = \omega(0)e^{2at}$ となり，初期時刻の渦度 $\omega(0)$ が e^{2at} で増大することを示している．これは，渦度が中心に集められた結果，強くなることに対応している．左辺第1項と右辺第2項は拡散方程式（円柱座標系）であり粘性による渦度の平坦化を示している．この効果と渦度の集中が釣合えば，定常な渦度の局在構造を形成することができる．式の時間微分を0とおいて，定常解をもとめると

$$\omega(r) + \Omega = \frac{\Gamma}{\pi l^2} \exp \left[-\frac{r^2}{l^2} \right] \quad (6)$$

が得られる．ここで， Γ は積分定数であるが，この渦が持っている循環を表している．すでに述べたように，磁場の効果は渦度の値を一定量（ Ω ）シフトさせるだけである．

この渦は，中心収束流による渦度の集中と粘性による拡散の釣り合いによって生成されるので，その特性長は予想されるように，中心収束流の強さ a と粘性 ν の比

$$l^2 = \frac{2\nu}{a} \quad (7)$$

で与えられる．収束流が強ければ中心に強く局在化した分布となり，粘性による拡散が強ければ，なだらかな分布となる．いま， $\nu \rightarrow 0$ の極限を考えると，ガウス型の渦度分布はデルタ関数 $\Gamma \delta(r)$ ，つまり渦糸になる．このように考えれば，上で求めた粘性渦解は，粘性があるために“有限の幅を持ってしまった渦糸”であると考えられる．この渦は，バーガース（Burgers 1948年）によって発見されたもので，発見者の名にちなんでバーガース渦と呼ばれている[5]．ここでは定常解を直接求めたが，一定の循環 Γ を持つ任意の初期値は $t \rightarrow \infty$ で式で与えられる解に漸近することが証明されている[6]．

渦度の分布が求まれば，周方向回転速度は渦度の定義式から積分によって求められ，

$$v_\theta(r) + \frac{\Omega r}{2} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left[-\frac{r^2}{l^2} \right] \right) \quad (8)$$

で与えられる．中心軸付近（ $r \ll l$ ）では半径に比例する剛体的な回転

$$v_\theta(r) + \frac{\Omega r}{2} \approx \frac{\Gamma}{2\pi l^2} r \quad (9)$$

を示し，遠方では，渦糸と同じ流れ場

$$v_\theta(r) + \frac{\Omega r}{2} \approx \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (10)$$

になっている．

ここで実験と理論を比較する際の注意点を述べる．理論から求めた渦度には常に外部磁場の効果が入っている．しかし，実験で測定する流れは，平均流として実際に流れて

いるプラズマであり、渦度は平均流の流れ場が作る渦度である。したがって理論値との一致を検証する場合には、両者の違いに注意を払う必要がある。 z 軸方向に一様な磁場を与えるベクトルポテンシャルは $A_\theta(r) = Br/2$ である。左辺の $\Omega r/2$ は、一般化運動量の $(e/c)A_\theta$ に対応する部分であることを考慮すると、実験値と比較すべき量は、(8) - (10) 式の右辺の量であることがわかる。

5.3 プラズマホールの観測

プラズマホールの実験結果の詳細については、文献 [3, 7] を参照していただくとして、ここでは主な結果のみを示す。プラズマホールの磁場に垂直な断面における速度場は、Fig. 1 に示すような時計回りの吸い込み渦構造を示している。磁場は紙面奥から手前向きに加えられており、渦の回転方向は上に凸のポテンシャルが作る $E \times B$ ドリフ

Fig. 1 Flow velocity field of a plasma hole. The vorticity color map is shown in the background.

Fig. 2 Radial flow velocity as a function of radius. The radial velocity is linearly dependent on radius.

トに一致する。実際、ポテンシャル計測を行い、周方向回転は $E \times B$ ドリフトであることを確認している。ここで注意したいのは、径方向流れが存在することである。その分布は Fig. 2 に示すように半径に比例する内向き流れである。磁場を反転させると、周方向流れの回転方向は予想どおり反転したが、径方向流れは内向きのまま不変であった。この結果は、径方向流れが $E \times B$ ドリフト以外の原因で駆動されていることを示している。

Fig. 1 に示した速度場から渦度 (z 軸方向成分) を計算すると、渦度は中心付近に集中しており、その分布はガウス分布で近似できることがわかる (Fig. 3)。図中実線はガウス分布を示しているが、高さ (Γ) と幅 (l) をフィッティングパラメータとして実験データに合うように決めている。一度 Γ と l を決定すると周方向速度分布は (8) 式によって一義的に決まり、Fig. 4 (上図) の実線で示すような分布となる。図中黒丸は実験結果を示しているが、ほぼ一致していることが分かる。以上の実験結果と半径に比例する内向き流れの存在 (Fig. 2) から、プラズマホールは渦度の集中と拡散が釣り合った粘性渦 (バーガース渦) であると結論できる。

今回観測された粘性渦の直径は約 6 cm で、通常流体で観測されるバーガース渦に比して、例外的に大きなものである点に注意したい。この結果は、プラズマの実効的粘性がきわめて大きくなっていることを意味している。渦の幅 l と収束流の強さ α は実測できるので、これらの測定結果から (7) 式を用いて実効的粘性係数を決定できる。実験値から渦のサイズは $l = 3$ cm であり、径方向流れは Fig. 2 に示したデータの傾きから $\alpha = 4.4 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ となる。これらを代入すると

$$\nu_{\text{eff}} \sim 2 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{s} \quad (11)$$

となり、非常に大きな値を示す。

粘性係数はイオンによる運動量輸送によって決定され、

Fig. 3 Radial profile of vorticity. The vorticity distribution of a plasma hole is localized near the axis. The solid line indicates a Gaussian distribution.

Fig. 4 Profiles of azimuthal flow velocity (top) and dissipation rate due to viscosity (bottom). Equation (8) is indicated in the top figure by a solid line.

拡散係数と同じオーダーである。即ち、 $\nu \sim \rho_i^2 / \tau_i$ と与えられる[4]。ここで、 ρ_i はイオンラーモア半径、 τ_i はイオンの衝突時間である。プラズマホールの場合、衝突時間はイオン-中性粒子衝突で定まるので、 $\nu \leq 10^3 \text{ cm}^2/\text{s}$ となる。したがって実験から求めたプラズマの実効的粘性係数は、イオン-中性粒子衝突によって決まる古典的な粘性係数の数千倍となっている。なぜ、このような異常粘性を示すのかについては、まだ十分理解されていないが、プラズマホールでは準中性条件が自発的に破れていることを指摘しておこう。

ポテンシャルの径方向分布が測定できれば、ポアソン方程式によって電荷密度に関係づけられるので、規格化された準中性度：

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{n_e - n_i}{n} \approx \lambda_D^2 \nabla^2 \left(\frac{e\phi}{T_e} \right) \quad (12)$$

を実験的に決定できる。ここで n_i , n_e , n は、それぞれイオン密度、電子密度および平均密度である。また、 ϕ はポテンシャル、 T_e は電子温度、 λ_D はデバイ長である。ホールが形成されない場合、この値は通常 10^{-6} のオーダーであるが、ホールが形成されている場合は Fig. 5 に示すように 10^{-3} のオーダーとなり、約 1,000 倍程度、準中性条件が破れていることがわかる。今後、非中性度と異常粘性の関係をより詳しく調べていく必要があるだろう。

5.4 粘性による径方向流れの発生

径方向流れが磁場反転に対して不変であることはすでに述べた。ここでは径方向流れの発生機構を考えてみる。運

Fig. 5 Profile of normalized charge density of a plasma hole.

動方程式の周方向成分のバランスは軸対称性がある場合

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -v_r \Omega + \nu (\nabla^2 v)_\theta \quad (13)$$

となる。いま、粘性摩擦がないとすると、対流項(左辺)とローレンツ力(右辺第1項)が釣合うことになるが、この場合 v_r が0でありさえすれば、いつでも力のバランスをとることができる。したがって、非粘性の場合、径方向流れが発生する必然性はない。しかし、粘性があると、周方向の力のバランスを取るために、径方向流れが必ず存在しなければならない。つまり径方向流れは、粘性摩擦が慣性力とローレンツ力に釣合うために誘起した粘性流体に固有の流れであると考えることができる。

(13)式は v_r について解くことができて

$$v_r = \frac{\nu (\partial^2 v_\theta / \partial r^2 + \partial v_\theta / \partial r / r - v_\theta / r^2)}{\partial v_\theta / \partial r + v_\theta / r + \Omega} \quad (14)$$

となる。 v_θ が $E \times B$ ドリフトであれば磁場反転によって符号を変える。したがって(14)式から、径方向流れ v_r は磁場反転 ($\Omega \rightarrow -\Omega$, $v_\theta \rightarrow -v_\theta$) に対して符号を変えないと結論できる。これは、先に述べた実験事実と一致している。

(14)式にバーガス渦解の周方向速度式を代入すると

$$v_r = -ar \quad (15)$$

となり、はじめに仮定した中心収束流が得られる。即ち、バーガス渦解は、径方向流れもふくめて、ナビエ・ストークス方程式の解であったということになる。

径方向流れの存在は、必然的に軸方向流れを必要とすることを指摘しておきたい。中心に集まってくる流れの逃げ場が必要だからである。結局、粘性が存在すれば径方向流れが発生し、たとえ渦度場は2次元であっても、流れ場は3次元にならざるを得ない。つまり、純粋な2次元系ではなくなる。

5.5 フロー速度シアと粘性渦形成

フロー速度シアがあれば粘性によって摩擦力が生じ、そ

の結果径方向流れが発生する．この存在が粘性渦と非粘性渦の決定的な違いである．そして，この径方向流れが渦度を中心へ輸送する役割を果たしている．つまり，フロー速度シアは，渦度の局在構造を維持するための一方のメカニズムを担っている．これが渦度のダイナミクスから見たフロー速度シアの役割である．

粘性が存在することによる，もう一つの重要な効果はエネルギー散逸である．粘性があれば内部摩擦による発熱が生じ，流体の巨視的運動のエネルギーは不可逆的に熱に変化していく．この観点から眺めると，粘性渦は内部電場によって駆動される渦の回転運動が，粘性によって不可逆に熱化される過程で自己組織化された構造であると言える．

Fig. 4 に示す周方向速度分布は，中心部で剛体的回転 ($v_\theta \propto r$)，周辺部で渦なし流れ ($v_\theta \propto 1/r$) に漸近している．これら 2 つの分布は，周方向流れの粘性散逸が極小となる分布であることが証明される．実際の散逸は，Fig. 4 (下図) に示すように，速度分布が遷移する領域でのみ起こっている．このように周方向のフロー速度シアは熱化による損失が小さくなるように分布している．

5.6 まとめ

粘性流体としてのプラズマにおける渦形成を，渦度のダイナミクスの観点から述べた．粘性があると 2 つの点で渦形成に本質的な差異が生じる．一つは，径方向流れの発生であり，これによって渦度が集中するメカニズムが用意される．その結果，渦度の集中と拡散という相反する効果の競合が可能になり，特性長を持った渦の発生が可能となる．第二の点は，粘性による内部発熱である．このため渦形成は，渦度のダイナミクスだけでなく熱力学的な合理性に従うことも要請される．

粘性渦に関する話題で，上に述べるができなかった話題を簡単に紹介しておく．最近ナビエ・ストークス乱流の直接数値計算において，要素渦と呼ばれる基本渦構造の存在が明らかになり，注目を集めている[8]．この要素渦は本小論で述べた粘性渦と本質的に同じものである．プラズ

マにおいても粘性渦が基本構造であるか否かは非常に興味深い，しかも輸送現象にかかわるので非常に重要な問題である．

プラズマにおける粘性渦の存在が明らかになると，次は粘性渦間相互作用や粘性渦集合のダイナミクスに興味を持たれる．従来この種の研究としては，渦系系の相互作用やダイナミクスの研究がある[9,10]．上に述べたように，粘性渦は径方向内向き流れを伴っており，渦同士はお互い引き合うような相互作用をする．したがって，粘性渦の集合は渦系系のダイナミクスとは質的に異なった振る舞いをすることが予想される．最近このテーマに関する研究が進展しつつあり，粘性渦の合体や結晶化，さらにクラスター化など興味ある現象が見つかっている．

謝辞

本研究は，吉村信次助手(核融合研)，永岡賢一助手(核融合研)，岡本 敦博士研究員(東大高温プラズマ研究センター)および河野光雄教授(中央大)との共同研究によって行われたものです．実験・理論両面における多大な貢献と有益な議論をしていただいたことに感謝します．

参考文献

- [1] A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids 21, 87 (1978).
- [2] V.D. Larichev and G.K. Reznik, Polymode News 19, 3 (1976).
- [3] K. Nagaoka, A. Okamoto, S. Yoshimura, M. Kono and M. Y. Tanaka, Phys. Rev. Lett. 89, 075001 (2002).
- [4] S.I. Braginskii, *Review of Plasma Physics* Vol.1 (Consultants Bureau, New York, 1965).
- [5] J.M. Burgers, Adv. Appl. Mech. 1, 171 (1948).
- [6] T. Kambe, J. Phys. Soc. Jpn. 53, 13 (1983).
- [7] K. Nagaoka, A. Okamoto, S. Yoshimura and M.Y. Tanaka, J. Phys. Soc. Jpn. 70, 131 (2001).
- [8] 木田重雄: パリティー 18, 13 (2003).
- [9] L. Onsager, Nuovo Cimento 6, 279 (1949).
- [10] E.A. Novikov, Sov. Phys. JETP 41, 937 (1975).