ピンチ放電プラズマ中における電磁流体波*

中 野 義 映 ・ 林 泉**
東京工業大学・電気工学科

梗 概

本論文には概略次の事がのべられている。

- (i) 直線ピンチ放電プラズマの詳細な磁気探針測定により，ピンチしたプラズマ柱の外側にある低密度のプラズマ中に，比較的規則正しい電磁流体的定在波が発生することが確認された。
- (ii) これらの振動は磁場と直角方向（半径方向）に進む電磁流体波によって形成されるものであり，ピンチした高密度のプラズマ柱の振動と関連して励起される。
- (iii) 境界が振動しているプラズマ内における電磁流体振動の発振に関する簡単な解析結果を示した。
- (iv) コンデンサ充電電圧15KV，放電電流波高値111KA，放電管：内径10cm×管長50cmでの実験では最大圧縮時に波長12mm，周波数1.5MC，位相速度はAlfven波の伝播速度にほぼ等しい18km/sの波動が観測された。

理論値と実測値との対応により，この低密度プラズマ領域（粒子数密度 $n \approx 8 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ）では，

$$\text{プラズマの最大速度 } v_{max} \approx 2.8 \text{ km/s},$$

$$\text{" " の導電率 } \sigma \approx 2 \times 10^4 (\Omega m)^{-1},$$

であり，プラズマの電離度は相当に高く，電子温度は平衡状態にあり， $0.5 \times 10^5 \sim 10^5 \text{ oK}$ であることが推定された。

- (v) 上記の波動が顕著に観測されたのは約 $1.5 \mu s$ というごく短い時間である。振動の減衰の原因としては，プラズマ内の摩擦損や，プラズマ境界の変化等が考えられるが，主因はやはり磁

* Hydromagnetic Waves in a Pinch Discharge Plasma.

** Yoshiei Nakano, Izumi Hayashi

(Dept. of Electrical Engineering, Tokyo
Institute of Technology.)

場の拡散による joule loss であり、短波長の振動は急速に減衰する。

(vi) ピンチ現象が激しい場合には上記の電磁流体振動が更に顕著に発生する。たゞしこの場合にはプラズマ柱の不安定性により放電毎の再現性が失はれるため、シンクロスコープ一台を使用した筆者ら実験では詳細な測定は不可能となった。

(vii) 最大圧縮の際異常発光の原因はこの流体波であろう。放電管内全域で同時に振動電流が流れるため、流しカメラでこの現象を観測すると発光体が恰も速度無限大で移動する様にみえるのであろう。

(viii) 最近の詳細な実験では 10 MC 程度迄の振動が局部的にたえず発生消滅しているのが観測されているが、この程度以上の高周波振動の精確な測定は、磁気探針の寸法、周波数特性等によって制限されている。

§ 1. 緒 云

筆者らは以前から磁気探針、光電管及びその他の search coils により、ピンチ放電プラズマ中の電磁流体的な現象の観測を行っているが、その結果いろいろな様相が明かとなって来た。^{1), 2)} 本論文は放電プラズマ中で観測された電磁流体波について特に述べたものである。

直線ピンチ放電に於て、ピンチしたプラズマ柱の外側の密度の低いプラズマ中で、管軸方向の電流の極性が、半径と共に交互に反転する現象は磁気探針を使用した初期の実験で已に発見されていたが、³⁾ 当時は磁気探針の直径が大きいこと（仕上り外径 10 mm）、測定間隔の大きいこと及び放電毎の再現性（筆者らはシンクロ・スコープの都合で 1 ケのコイルの磁気探針を使用した）、この磁気探針で放電管内の磁束密度分布を測定するには、特定の位置に探針コイルを設置して同一初期条件で放電を繰返した場合、磁気探針の出力波形がよく一致することが必要である。）が比較的悪かったため、周波数が高く波長の短い振動現象については余り確信がもてなかった。又特に周波数の高い現象の解明を困難にしたのは次の様な理由がある。即ち磁気探針測定により求めたプラズマ中の磁場分布から計算により電流密度分布等の時間変化を求める訳であるが、現象は Fig. 5 の時刻 $7.6 \mu s$ 附近における様に定左波状になっており、電流の正極性の部分と負極性の部分が孤立し、かつごく短時間内（約 $0.5 \mu s$ ）に極性が反転していることである。従ってこれらの現象が判明していない当時としては計算を行う時間間隔の“目安”が分らないため、しばしば微細な現象を見落とし、Fig. 5 の様な Map をえがく際、時たま電流の極性が局部的

に反転しているのに気がついても，その原因を測定の不十分さにもってゆきがちであった。

その後磁気探針も小型の構造のものに改め，測定間隔も $1\text{ mm} \sim 2\text{ mm}$ 程度に選び，初期条件の一定保持に細心の注意を払って測定を行った結果，微細な現象も次第に明確になって来た。現在定在波としては波長 1.2 mm ，位相速度約 1.8 Km/s ，周波数約 1.5 MC 程度のものが測定され，又局部的に発生・消滅している 1.0 MC 程度の振動も観測されている。たゞし筆者らの使用した磁気探針は 5 MC 附近から周波数特性が急に悪くなっているため⁴⁾，後者の局部的な振動の測定値は精度が悪い。

こゝではピンチしたプラズマ柱と導体壁によってかこまれた比較的密度の低いプラズマ領域の全体に涉って発生する振動について取扱うことにする。簡単のため高密度で慣性の大きいピンチしたプラズマ柱の振動をまづ考え，次に振動しつつある境界にかこまれた稀薄なプラズマ中における発振条件を考察する。

§ 2. ピンチしたプラズマ柱の振動

ピンチしたプラズマ柱は平衡状態を中心として種々の振動を行うが，その一，二について次に述べる。

簡単のためピンチしたプラズマは Fig. 1 の如く無限平板状とし，磁場によって保持されているとする。又ピンチしたプラズマ柱と導体壁の導電率は無限大とする。

(2・1) $x=0$ を中心としたプラズマ柱の左右の振動

プラズマ柱を非圧縮性流体とすると、プラズマ柱の連動方程式は

$$2\rho_p \delta_o \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2\mu} (B_L^2 - B_R^2) + P_L - P_R \dots\dots\dots (1)$$

但し B_L, P_L : プラズマ柱の左側の磁束密度及び圧力

B_R, P_R : プラズマ柱の右側の磁束密度及び圧力

ρ_p : ピンチしたプラズマ柱の密度

平衡状態における B を B_o , 圧力 P を P_o とすれば、プラズマ柱の中心が x だけゆるやかに変位した場合には

$$B_L = \frac{B_o}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-1}, \quad B_R = \frac{B_o}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-1}$$

従って(1)式は

$$2\rho_p \delta_o \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{L^2} \left(\frac{B_o^2}{2\mu} + P_o \right) \left[\left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-2} - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{-2} \right] \dots\dots\dots (2)$$

x が L に比べて小さい場合には

$$2\rho_p \delta_o \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \doteq - \frac{4}{L^3} \left(\frac{B_o^2}{2\mu} + P_o \right) x \dots\dots\dots (3)$$

従ってプラズマ柱の振動角速度 ω は

$$\omega \doteq \sqrt{\frac{2}{\rho_p \delta_o L^3} \left(P_o + \frac{B_o^2}{2\mu} \right)} \dots\dots\dots (4)$$

(2・2) プラズマ柱の Radial Oscillation

平板状プラズマ柱は Radial Oscillation を行いうる。たゞしこの振動系では(2・1)の場合と同様に parametric Excitation が行われるため、安定度は低下するが、今はそれにはふれないことにする。

(A) Radial Oscillation の振動が緩かで、振巾が大きい場合

プラズマの速度は中心からの距離 x に比例するものとし、ピンチしたプラズマの外部は真空とすると、プラズマ表面が平衡状態からずれた場合には

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\delta_o}{\delta_s} p_o, \quad \rho = \frac{\delta_o}{\delta_s} \rho_p, \quad v_s = \frac{\partial \delta_s}{\partial t}, \\ v &= v_s \frac{x}{\delta_s}, \quad B'_o = \frac{L}{L + \delta_o - \delta_s} B_o, \quad B'_p = \frac{\delta_o}{\delta_s} B_p \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

但し, δ_s : プラズマ表面の位置

v_s : " " の速度

B_p = ピンチしたプラズマ柱内の縦方向磁界

B'_o, B'_p : プラズマ表面が平衡状態から " ずれ " た場合の B_o, B_p の値
プラズマの運動方程式

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

を $x=0$ からプラズマ表面まで積分し, (5) 式の関係代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{M}{4} \frac{\partial^2 \delta_s}{\partial t^2} = & - \frac{1}{2\mu} \left\{ \left(\frac{1 - \frac{\delta_o}{L + \delta_o}}{\frac{\delta_s}{L + \delta_o}} \right)^2 - \frac{\delta_o}{\delta_s} \right\} B_o^2 \\ & + \left\{ \frac{\delta_o}{\delta_s} - \left(\frac{\delta_o}{\delta_s} \right)^2 \right\} B_p^2 \right\} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

但し $M = 2 \delta_o \rho_p$

簡単のため $\delta_o \ll L$ とし, かつ $(\delta_s - \delta_o / \delta_o)^2$ 以上を無視すれば

$$\frac{M \delta_o^2}{4} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{1}{2\mu} \left[B_o^2 + \left(\frac{\delta_o}{L + \delta_o} B_o^2 + B_p^2 \right) y \right] \dots \dots \dots (7)$$

但し $\delta_s = \delta_o (1 + y)$

(7) 式は振動の方程式であり, 角速度 ω は

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\mu M \delta_o^2} \left(\frac{\delta_o}{L + \delta_o} B_o^2 + B_p^2 \right)} \dots \dots \dots (8)$$

なお, 円筒状プラズマに対しては⁵⁾

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{M} \left\{ \frac{2(\gamma - 1)}{\delta_o^2} \left(\frac{2\pi \delta_o B_o}{\mu} \right)^2 - \frac{(2\gamma - 1) B_o^2}{4} - B_o \right\}} \dots \dots (9)$$

但し, M : 軸方向単位長当りのプラズマ柱の質量

B_o : 平衡時におけるプラズマ表面の z 方向の磁束密度

δ_o : プラズマ半径

B_o : 平衡時における真空中の縦方向磁場

(B) Radial Oscillation の振巾が小さい場合

この場合には電磁流体力等の基礎式より比較的厳密に取扱いうる。前と同様に B_o, B_p は平衡時における真空中及びプラズマ中の磁束密度とする。後述の (24)~(29) 式より, プラズマ内の微小変動に関しては次式が成立する。

プラズマ内部では

$$\rho_p \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \ell_p}{\partial x} B_p - \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad a^2 = \gamma \frac{P_p}{\rho_p} \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_p \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots (12), \quad \frac{\partial \ell_p}{\partial t} = -B_p \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots\dots (12)$$

但し, ρ_p, P_p : 平衡時におけるプラズマ密度及び圧力

ρ, p : 密度, 圧力の微小変動

ℓ_p : B_p に与えられた微小変動

v : x 方向のプラズマ速度

(10)~(13) 式より

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad V_s^2 = a^2 + \frac{B_p^2}{\mu \rho_p} \dots\dots\dots (14)$$

プラズマ表面では

$$\text{平衡状態では } P_p + \frac{B_p^2}{2\mu} = \frac{B_o^2}{2\mu} \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{微小変動に対しては } \mu p + B_p \ell_p - B_o \ell_o = 0 \dots\dots\dots (16)$$

但し ℓ_o : B_o の微小変動

真空中では

$$\ell_o = \frac{\delta_s - \delta_o}{L} B_o \dots\dots\dots (17)$$

(10)式を t で微分すれば

$$\rho_p \frac{\partial p}{\partial t} + B_p \frac{\partial \phi_p}{\partial t} - B_o \frac{\partial \phi_o}{\partial t} = 0$$

(10)~(13)式を上式に代入すれば

$$-(\mu \rho_p a^2 + B_p^2) \frac{\partial v}{\partial x} x = \delta_s = \frac{v x = \delta_s}{L} B_o^2 \dots\dots\dots (18)$$

(14)式に於て $v = V(x) \varepsilon^{j\omega t}$ とおけば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{V_s^2} V = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$x=0$ で $v=0$ なる解は

$$V = A \sin \frac{\omega}{V_s} x \dots\dots\dots (20) \quad A: \text{定数}$$

今プラズマ表面の変位が充分小さいとすれば

$$v_{x=\delta_s} = v_{x=\delta_o} + \frac{\partial v}{\partial x} (\delta - \delta_o) \doteq v_{x=\delta_o}$$

なる故(18)(20)式より

$$\left. \begin{aligned} -\mu \rho_p V_s \omega \cos \frac{\omega \delta_o}{V_s} &= \frac{B_o^2}{L} \sin \frac{\omega \delta_o}{V_s} \\ \text{又は} \quad \tan \frac{\omega \delta_o}{V_s} &= -\frac{L \mu \rho_p V_s \omega}{B_o^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

即ち平板状プラズマは平衡状態近傍で(21)式を満足する様な幾多の角速度の Radial Oscillation を行いうる。Fig. 2は $y = \tan(\omega \delta_o / V_s)$ と

$y = -L \mu \rho_p V_s \omega B_o^{-2}$ の関係曲線で、両者の交点 $q_1, q_2, \dots$ が Radial Oscillation の ω を与える。

なお円筒状プラズマでは¹⁾

$$-\mu \rho_p V_s \omega J_o \left(\frac{\omega \delta_o}{V_s} \right) = \left(\frac{2 \delta_o B_o^2}{L^2} - \frac{B_o^2}{\delta_o} \right) J_1 \left(\frac{\omega \delta_o}{V_s} \right) \dots\dots (22)$$

但し, J_o, J_1 : Bessel 関数,

(3) プラズマ表面の波動

Fig. 1 の如く静止したプラズマ柱は安定で, y 方向及び Z 方向に伝播する波動が存在する。波動の角速度 ω と波数 K の間には次の関係がある。

$$\omega^2 = K^2 \frac{B_0^2}{\mu \rho_p} \dots\dots\dots (2)$$

次に振動しつつある境界にかこまれたプラズマ中に与えられた perturbation が如何に変動するかを考察する。一般の場合, 厳密に解くのは非線形性のため困難であるので, ここでは次の二つの場合について取扱うことにする。

- (I) プラズマの境界がゆるやかに振動し, その振巾が大きい場合。
- (II) プラズマの境界の振動は早い, 振巾が小さい場合。

§ 3 プラズマの境界がゆるやかに振動し、その振巾が大きい場合の電磁流体振動

Fig. 3

W: Fixed Wall

S: Oscillating Wall

Fig 3に於て左端の境界Wは固定しており、右端の境界Sは $x=L+r_0 \sin \omega t$ でゆるやかに振動しているとし、この二つの境界にかこまれた部分には z 方向の一様な磁場と、プラズマが存在するとする。又問題を簡単にするため、壁も、プラズマも導電率は無限大とする。

プラズマ中の場に対しては次の関係式
電磁流体力学の基礎方程式 が与えられる。

$$\vec{\rho} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{J} \times \vec{B} - \text{grad } \vec{P} \dots (24)$$

$$\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\rho} \vec{v}) = 0 \dots (25)$$

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = r \frac{\vec{P}}{\vec{\rho}} \frac{D\vec{\rho}}{Dt} \dots (26)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \dots (27)$$

$$\mu \vec{J} = \text{rot} \vec{B} \dots (28)$$

$\vec{v}$: 速度 $\vec{J}$: 電流密度 $\vec{P}$: 気圧 $\vec{\rho}$: 密度 $\vec{B}$: 磁速密度

但し $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}$

右端の境界が $x=L$ にある時 $\vec{B}=(0, 0, B_0)$ $\vec{\rho}=\rho_0$, $\vec{P}=P_0$ とし、 ρ 磁場, 密度, 圧力, 電流の微小変動(1次の微小量)をそれぞれ b, ρ, p, j とし, $b=(0, 0, b)$
 $\vec{v}=(v, 0, 0)$ $\vec{j}=(0, j, 0)$ とすると

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{B_0}{1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega t} + \ell \\ \vec{P} &= \frac{P_0}{1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega t} + p \\ \vec{\rho} &= \frac{\rho_0}{1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega t} + \rho \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

29式を24~28式に代入し、2次の微小量を見捨てる、 ω も極めて小さいとすれば

24式より

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = j B_0 - \left(1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega t\right) \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (30)$$

25式より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{P_0}{1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega t} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

26式より

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \dots\dots\dots (32)$$

$$\text{但し } a = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} : \text{音速}$$

27式より

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = - \frac{B_0}{1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega t} \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots\dots (33)$$

28式より

$$j = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \ell}{\partial x} \dots\dots\dots (34)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L + r_o \sin \omega t} \\ \tau &= t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial t} + \xi r_o \omega \cos \omega \tau \frac{\partial}{\partial x} \div \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} &= (L + r_o \sin \omega \tau) \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

(35)(36)式より (30)~(34)式を書き直すと

$$\rho_o \frac{\partial v}{\partial \tau} = - \frac{B_o}{L \mu} \frac{1}{(1 + \frac{r_o}{L} \sin \omega \tau)} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{1}{L} \frac{\partial p}{\partial \xi} \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\rho_o}{L} (1 + \frac{r_o}{L} \sin \omega \tau)^{-2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = - \frac{B_o}{L} (1 + \frac{r_o}{L} \sin \omega \tau)^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \dots\dots\dots (40)$$

(37)式を τ で微分すれば

$$\rho_o \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = - \frac{B_o}{L \mu} (1 + \frac{r_o}{L} \sin \omega \tau)^{-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{1}{L} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \tau} \dots\dots\dots (41)$$

所で(40)式より

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau \partial \xi} = - \frac{B_o}{L} (1 + \frac{r_o}{L} \sin \omega \tau)^{-2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \dots\dots\dots (42)$$

又(39)(38)式より

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi \partial \tau} = - \frac{a^2 \rho_o}{L} (1 + \frac{r_o}{L} \sin \omega \tau)^{-2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \dots\dots\dots (43)$$

(42)(43)式を(41)式に代入すれば

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = \left\{ \frac{B_0^2}{L^2 \mu \rho_0} \left(1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau \right)^{-3} + \frac{a^2}{L^2} \left(1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau \right)^{-2} \right\} \times \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \dots \dots \dots (44)$$

(44)式は境界がゆるやかに振動している場合の perturbation を記述する方程式である。

$$\text{今 } v = F(\tau)G(\xi) \dots \dots \dots (45)$$

として(44)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} G &= \left\{ \frac{B_0^2}{L^2 \mu \rho_0} \left(1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau \right)^{-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{L^2} \left(1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau \right)^{-2} \right\} \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} F \\ \therefore \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} &= -K^2 \left\{ \frac{B_0^2}{L^2 \mu \rho_0} \left(1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau \right)^{-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{L^2} \left(1 + \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau \right)^{-2} \right\} F(\tau) \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = -K^2 G(\xi) \dots \dots \dots (47)$$

但し $K^2 = \text{const}$

(47)式より

$$G(\xi) = A_1 \sin K\xi + A_2 \cos K\xi \dots \dots \dots (48)$$

境界条件 $\xi = 0$ で $v = 0$

$\xi = 1$ で $v = 0$

を満足するためには

$$A_2 = 0, \quad K = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

(49)式の右辺括弧内を展開すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} + K^2 \left\{ \frac{B_0^2}{L^2 \mu \rho_0} \left\{ \left(1 + 3 \frac{r_0}{L} + \dots \right) - 3 \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau \right. \right. \\ \left. \left. - 3 \left(\frac{r_0}{L} \right)^2 \cos 2\omega \tau + \dots \right\} + \frac{a^2}{L^2} \left\{ \left(1 + \left(\frac{r_0}{L} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 2 \frac{r_0}{L} \sin \omega \tau - 2 \left(\frac{r_0}{L} \right)^2 \cos 2\omega \tau + \dots \right\} \right\} F' = 0 \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

(49)式は“拡張されたHill 方程式”であり標準型は

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \left[\theta_0 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \theta_{vs} \sin 2v\tau + 2 \sum_{v=1}^{\infty} \theta_{vc} \cos 2v\tau \right] x = 0 \dots\dots (50)$$

で与えられる。

(50)式の解を

$$x = e^{\mu\tau} \sin(n'\tau - \sigma) \dots\dots\dots (51)$$

と仮定すると第一近似として

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 &= -(\theta_0 + n'^2) \pm \sqrt{4n^2\theta_0 + \theta_{n'}^2}, \\ \theta_{n'}^2 &= \theta_{n's}^2 + \theta_{n'c}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

解が不安定となる場合には $\mu^2 > 0$ 従って

$$|\theta_{n'}| > |\theta_0 - n'^2| \dots\dots\dots (53)$$

なる時に解は不安定となる。

更に精確には, $n' = 2, 4, 6, \dots\dots\dots$ なる時

$$\begin{aligned} 4n'^2\mu^2 &= -(\theta_0 - n'^2)^2 + \theta_{n'}^2 + 2 \frac{\theta_0 - n'^2}{\theta_0} \theta_{\frac{n'}{2}}^2 \\ &\quad - \frac{2}{\theta_0} \left[\theta_{nc} \left(\theta_{\frac{n'}{2}c}^2 - \theta_{\frac{n'}{2}s}^2 \right) + 2\theta_{n's} - \frac{\theta_{n'}^2}{2} c \frac{\theta_{n'}^2}{2} s \right] \end{aligned}$$

となり, $\mu^2 > 0$ なる時解は不安定となり, この時の μ の値が発振の成長率を与える。(更に精確には文献参照⁶⁾)

(49)式で $(\frac{r_0}{L})^2$ 以上の項を無視すれば,

$$\frac{\partial F}{\partial \tau^2} + \frac{K^2}{L^2} \left[\left(\frac{B_0^2}{\mu\rho_0} + a^2 \right) - \left(\frac{3B_0^2}{\mu\rho_0} + 2a^2 \right) \frac{r_0}{L} \sin \omega\tau \right] F = 0 \dots\dots (54)$$

(54) 式は Mathieu の方程式である。Mathieu 方程式の標準型は

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (\theta_0 - 2\theta_1 \cos 2\tau) x = 0 \dots\dots\dots (55)$$

(55) 式の解は Fig. 4 の斜線をほどこした領域で不安定となる。

(54) 式に於て

$$\omega\tau = 2\eta + \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (56)$$

とおくと

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{4 K^2}{L^2 \omega^2} \left[\left(\frac{B_o^2}{\mu \rho_o} + a^2 \right) - \left(\frac{3 B_o^2}{\mu \rho_o} + 2 a^2 \right) \frac{r_o}{L} \cos 2\eta \right] F = 0 \dots\dots\dots (57)$$

$$K = n \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

従って

$$\left. \begin{aligned} \theta_o &= \frac{4 n^2 \pi^2}{L^2 \omega^2} \left(\frac{B_o^2}{\mu \rho_o} + a^2 \right) \\ \theta_1 &= \frac{2 n^2 \pi^2}{L^2 \omega^2} \left(\frac{3 B_o^2}{\mu \rho_o} + 2 a^2 \right) \frac{r_o}{L} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

筆者らの実験では

$$\text{Alfven 速度} \left(\frac{B_o^2}{\mu \rho_o} \right)^{\frac{1}{2}} \gg \text{音速}$$

であるので

$$\theta_1 = \frac{3}{2} \frac{r_o}{L} \theta_o \dots\dots\dots (59)$$

(58) 又は (59) 式の直線と Fig 4 の斜線部分と交はる所で解は不安定となる。振動するプラズマ境界の振巾が大になれば、発振し易くなることは Fig 4 より容易に分る。

(Fig. 4) Stability chart for the Mathieu equation

$$\text{直線 OP: } \theta_1 = \frac{\left(\frac{3B_0^2}{\mu\rho_0} + 2a^2\right) r_0}{2\left(\frac{B_0^2}{\mu\rho_0} + a^2\right)} \frac{L}{\theta_0}$$

§4 プラズマ境界の振動は早い、振巾が小さい場合の電磁流体波

振動しているプラズマ境界の振巾が極めて小さい場合には、境界の速度を v_s とすると、

$x=L$ におけるプラズマの速度は $v_s - \frac{\partial v}{\partial x} r_0 \sin \omega t \div v_s$ となる。

プラズマ中の perturbation に関しては、(44) 式の導出と全く同様にして波動方程式 (60) 式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left(\frac{B_0^2}{\mu \rho_0} + a^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dots\dots\dots (60)$$

但し $\frac{B_0}{\sqrt{\mu \rho_0}}$; Alfvén 波の伝播速度

a : プラズマ中の音速

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x=L : v = v_s \sin \omega t \\ x=0 : v = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

この様な境界値問題は Stokes の法又は Duhamel の法によって求められる。結果のみ記せば、

$$v(x, t) = \frac{2 V_s}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi (L-x)}{L} \int_0^t \sin \left\{ \frac{m \pi V_P}{L} (t-\tau) \right\} \times v_s \sin \omega \tau d\tau \dots\dots\dots (62)$$

但し $V_s^2 = \frac{B_0^2}{\mu \rho_0} + a^2$

積分を行うと

$$v(x, t) = \frac{2 V_s v_s}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi (L-x)}{L} \cdot \left[-\sin \theta t \left\{ \frac{\cos(\omega+\theta) t}{2(\omega+\theta)} + \frac{\cos(\omega-\theta) t}{2(\omega-\theta)} \right\} + \cos \theta t \left\{ \frac{\sin(\omega-\theta) t}{2(\omega-\theta)} - \frac{\sin(\omega+\theta) t}{2(\omega+\theta)} \right\} \right] \dots\dots\dots (63)$$

但し $\theta = \frac{n \pi V_s}{L}$

もし

$$\sigma = \frac{n \pi V_s}{L} = \omega \dots\dots\dots (64)$$

なる時には ω は無限大になる。即ち第 n 番目の固有振動率と同じ振動率でプラズマ境界が変動する場合には、プラズマは共振を起す。

§ 5 実験結果

Fig 5は磁気探針測定による磁束密度分布から求めた電流密度分布の時間的变化を示したものである。この時の実験条件は、

放電管：内径10 cm, 管長50 cm,

硬質ガラス製, 電極はステンレス

放電電流：25.6 μ Fコンデンサを15 KVに充電して放電させた。

波高値111 KA, 振動周波数46 KC

放電管内初気圧：0.5 mmHg 空気

であり、磁気探針出力の放電毎の再現性は、極めて良好であった。

放電開始後、 $t = 7.6 \mu s$ 附近で、ピンチしたプラズマ柱の外側に、比較的規則正しい波動の発生が観測される。これの波長は約12 mm, 位相速度 $V_s \div 18 Km/s$, $f = 1.5 MC$ で、顕著に観測されるのは約1~2 μs というごく短い期間である。

§ 3, § 4で述べた様に、ある特定の周波数の振動（角速度 ω , 周期 T ）が励発されるが、この場合には、波動方程(60)式により

$$v = A \sin \frac{2 \pi x}{T V_s} \cdot \sin \frac{2 \pi}{T} t \dots\dots\dots (65)$$

誘導方程式 $\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot}(\vec{V} \times \vec{B})$ より、微小量に関しては

$$\frac{\partial b}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x} B_0 \dots\dots\dots (66)$$

$$\text{又 } j = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial b}{\partial x} \dots\dots\dots (67)$$

これらの式から

$$b = \frac{AB_0}{V_s} \cos \frac{2\pi x}{TV_s} \cos \frac{2\pi t}{T} \dots\dots\dots (68)$$

$$TV_s = \lambda \text{ (波長)}$$

$$j = \frac{2\pi AB_0}{\mu V_s \lambda} \sin \frac{2\pi x}{TV_s} \cos \frac{2\pi t}{T} \dots\dots\dots (69)$$

(69) 式の j 分布を Fig 5 の如き等電流密度線で表わせば Fig 6 の如くになり, Fig 5 の $t \div 7.6 \mu s$ でまさにこれを意味している。 Fig 6 で

$$\frac{\text{距離 } \overline{PQ}}{\text{時間 } \overline{PS}} = \frac{\lambda}{T} = V_s \dots\dots\dots (70)$$

なるため, Fig 5 から, 電磁流体波の波長 λ , 週期 T , 位相速度 V_s が求められる。

Fig 5 の実験に於て, 全粒子の約 50% が中心のピンチプラズマ柱内 (直径約 1.4 mm) に *trap* されているから, その外側の密度 ρ_0 は $4.48 \times 10^{-4} \text{ (kg/m}^3\text{)}$ となる。 B_0 としては平均として $r = 3.0 \text{ mm}$ における値をとれば, $t = 78 \mu s$ では $B_0 \div 0. \text{wb/m}^2$ である。従って Alfvén 波の速度 $V_a = \sqrt{B_0^2 / \mu \rho_0} = 1.7 \text{ km/s}$ となる。

一方, Fig 5 から求めた実測値は中心からの距離 $r = 3.0 \text{ mm}$ 附近で $V_s \div 1.8 \text{ km/s}$ であり上記の計算値 $V_a = 1.7 \text{ km/s}$ との差を一応音速によるものとすれば, プラズマ温度は約 $9 \times 10^{40} \text{ K}$ となる。

運動方程式

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \dots\dots\dots (71)$$

に於いて Magnetic pressure $\gg$ plasma pressure であり, 実測より

$$\rho_0 = 4.5 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

$$B_0 = 0.4 \text{ wb/m}^2$$

$$\psi) \text{ } ma\chi = 3 \times 10^7 \text{ A/m}^2$$

$$T = \frac{1}{1.5 \text{ MC}}$$

Fig. 5. Contour plot of j_z (KA/cm^2) as a

Function of time and Radius.

Discharge Current : 111 KA.

Initial Pressure : 0.5 mmHg, Air,

Discharge Tube : 10 cm I.D. x 50 cm Length.

であるから, (65)(71) 式から

$$\begin{aligned} (v)_{max} &= A = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{max} = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{(v)_{max}}{\rho_0} B_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{10^{-6}}{1.5} \cdot \frac{3 \times 10^7 \times 0.4}{4.5 \times 10^{-4}} = 2.8 \text{ km/s} \dots\dots (72) \end{aligned}$$

$t = 7.6 \mu\text{s}$ では電界 $E \div 2 \times 10^2 \text{ v/m}$ であるので (電界 E は $\text{rot } E = -\partial B / \partial t$ の関係より求めた) 導電率 σ は

$$\sigma = 2.2 \times 10^4 (\Omega m)^{-1} \dots\dots\dots (73)$$

完全電離プラズマに対しては⁸⁾

$$\sigma = \frac{2.64 \times 10^{-2} \delta T_e \frac{3}{2}}{\ell n A} \dots\dots\dots (74)$$

但し δ : 電離度により変る補正因子 $= 0.582$

T_e : 電子温度

$\ell n A$: 電子密度と温度の関数 $= 10$

導電率 σ が (73) 式の値をとるための電子温度を (74) 式から求めると $T_e = 6 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ となるが, これは, 先に速速を求めた際のプラズマ温度 $9 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ とほぼ一致する。

速度 U なる衝撃波通過後のイオン温度 T_i は次式によって与えられる。¹¹⁾

$$T_i = \frac{1}{3\ell} \left[\frac{9U^2 m}{32} \left\{ 1 + \left(1 + \frac{32 I'}{9U^2 m} \right)^2 \right\} - \frac{I'}{2} \right]$$

ただし m : 原子重量, ℓ : ボルツマン定数,

I' : 一原子あたり解離及び電離エネルギー,

$I' = 14 \text{ eV}$, $m = 1.5 \times 1.65 \times 10^{-24} \text{ g}$ とし, Fig 5 より $U = 10^4 \text{ m/s}$ とすれば $T_i \approx 3 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ となり, 又 $U = 1.5 \times 10^4 \text{ m/s}$ とすれば $T_i \approx 7 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ となり, 先に求めた値とほぼ一致する。

以上より $r = 30 \text{ mm}$, $t = 7.6 \mu\text{s}$ 附近では, ピンチしたプラズマ柱の外側にある低密度プラズマの電離度は相当に高く, 電子温度とイオン温度は共に数万度であることが結論される。

この電磁流体振動が、約 $1.5 \mu s$ というごく短時間内に消滅する原因として磁場の拡散による joule Loss や摩擦損及びピンチプラズマ柱の変形等が考えられるが、磁場の減衰時間 $t_H \approx \mu \sigma L^2$ に於いて特徴的な長さ L を (波長) / 2 とれば

$$t_H = 4 \pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^4 \times 1.2^2 \times 10^{-4} \times \frac{1}{4} = 0.9 \mu s$$

となることより、磁気エネルギーの joule Loss への転化が振動減衰の主因をなしていることが分る。

なお電子のプラズマ振動 ω_{pe} は

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4 \pi e^2 n}{m}$$

但し n : 電子密度 (cm^{-3})

e : 電子の電荷 ($e \cdot s, u$)

m : 電子の質量 (g)

で与えられるが、上記の実験では $n \approx 8 \times 10^{15} cm^{-3}$ であるので $\omega_{pe} = 4.5 \times 10^{12} sec^{-1}$ となる。一方実験で観測された振動は 1 MC の order のものであるから、これらの解析には (24)~(28) 式の如き電磁流体近似が妥当であることが分る。

上記の振動現象はピンチ現象の激しい場合には更に顕著に発生する。Fig. 7 は水素ガス、初気圧 $0.05 mmHg$ の場合における最大圧縮時の磁束密度と電流密度を示したものである。先述の空気、初気圧 $0.5 mmHg$ の場合には最大圧縮時間は $7.6 \mu s$ であるのに対し、水素ガスの場合には $2.5 \mu s$ であり、ピンチ速度がずっと早くなっている。たゞし、この場合にはプラズマ柱の不安定性のため、磁気探針の放電毎の再現性が最大圧縮後、急速に失はれるので、ピンチ現象のゆるやかな場合の様に詳細には観測することが出来なかった。

波長は約 $20 mm$ で、空気の場合の $12 mm$ より相当に長い。この波長の関係は parametric oscillation の特徴を感じさせるが、これだけでは何ともいえない。又この場合には振巾も大きく、非線形項が相当にきいている様に思はれる。

なお流しカメラにより、ピンチ時に放電管全体にわたる速度無限大 (に近い) の瞬間的発光現象が観測され、^{9) 10)} その原因については種々論議があるが、どうもこの電磁流体波の発振が有力の様に考えられる。

Standing wave が形成されると、Fig. 5, Fig. 6, から分る様に、電流の振動が、管全体に同時に行はれるので、恰も速度無限大で伝播する様にみえるのである。

ピンチ放電プラズマ中における電磁流体波

Fig 7 ピンチ現象の激しい場の波動現象
 $I_{max} = 111 \text{ KA}$, $P_0 = 0.05 \text{ mmHg}$,
 水素ガス, $t = 2.5 \mu\text{s}$ (最大圧縮の時刻)

Fig 7は磁気探針を使用した初期的実験からえられた電流密度分布の時間的变化を示したものである。測定間隔も大きく、放電毎の再現性も悪いため、微細な構造は不明であるが、放電管が大きい場合の電流分布の概略を示すためにかゝげたものである。

$t = 10 \sim 15 \mu s$ で長波長の振動が残り、電流の極性が半径方向に交互に変化しているのが判る。

放電装置を改造して、詳細な測定を現在も続行中であり、種々の興味深い結果がえられているが、これらは後の機会にまとめて報告する予定である。

最後に本研究に関し、極めて有益な御教示を賜った本学進藤益男教授に厚く御礼申し上げますと共に、実験面で強力に御協力下さった妹尾義文技官に深く感謝の意を表します。

Fig. 8 Contour Plot of j_z (A/cm^2) as a Function of Time and Radius

Discharge Current : 110 KA.

Initial Gas Pressure : about 10^{-2} mm Hg, Air

Discharge Tube : 20cm I.D. x 30cm Long.

文 献

- 1) 林,妹尾:核融合研究, Vol. 8, No. 6, 1962 p.647
- 2) 林,妹尾:核融合研究, Vol. 9, No. 2, 1962, p.148
- 3) 林,妹尾,中野:昭35・11,電気学会東京支大, No. 12,
- 4) 林,中野:電学誌, Vol. 81, No. 874, July, 1961, p.1084
- 5) 中野,林,妹尾:昭36・5,電気四学会連大, No. 92
- 6) C.Hayashi: Forced Oscillations in Non-Linear Systems,
(Book, Nippon Printing and Publishing Company.)
1953, p.127
- 7) N.W. McLachlan: Ordinary Non-Linear Differential Equations.
(Book, Oxford), 1955, p.114
- 8) L.Spitzer: Physics of Fully Ionized Gases,
(Book, Interscience Publishers,) 1956, p.81.
- 9) L.C. Burkhardt, et al.: J.A. Phys., Vol. 28,
No.5, 1957, p.519
- 10) 有安,荒田,岡田:電気学会誌, Vol. 81, No. 869, 1961, p.211
- 11) R.K.M. Landshoff, et al., : Magnetohydrodynamics,
p.74, (1957)