交流探針における有限飛翔時間効果*

市 川 芳 彦** (日大理工)

Service de Physique des Plasmas

Faculté des Sciences, Université de Paris

Orsay (S. et O.) - France

(1963年1月7日受理)

When a small alternating potential $\delta V \sin \omega t$ is superposed on the Langmuir probe, increase of the rectified direct current is given by

$$\Delta j_e = j_L \{ I_0 (e \delta V / kT) - 1 \}$$

provided that electrons in a plasma have the Maxwellian distribution. j_L is the electron current density measured by the Langmuir probe. T is the electron temperature. $I_0(x)$

* Finite Transit Time Effect in the Radio - Frequency Probe.

** Yoshi H. Ichikawa : Permanent address, Department of Physics,
College of Science and Engineering,
Nihon University, Chiyoda-ku, Tokyo

is the modified Bessel function of the first kind and of 0 - th order. Experimental studies have shown that, besides the resonance increase of the direct current at the electron plasma frequency, the rectified increase of the direct current diminishes quite rapidly in the high frequency region. In this paper, the diminishing of the rectified direct current increase is explained theoretically in terms of the finite transit time effect of electrons which traverse through the sheath region.

§1. は じ め に

良く知られているように¹⁾ Langmuir 探針に小さい振幅の交流電位 $\delta V \sin \omega t$ をかけると, プラズマ内の電子分布が温度 T の Maxwell 分布ならば, 探針に流れ込む電子電流の直流成分は

$$\Delta j_e = j_L \{ I_0(e \delta V / \kappa T_e) - 1 \} \quad (1)$$

だけ増加する。 $E_{g. 1}$) で, $I_0(x)$ は第一種 0 次の modified Bessel 函数, j_L は Langmuir 探針に流れ込む電子電流密度

$$j_L = e n \left(\frac{\kappa T}{2 \pi m} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \frac{e V}{\kappa T} \right) \quad (2)$$

ここで V はプラズマの空間電位に対する探針の電位である。 n は電子密度。 $E_{g. 1}$) は, かけられた交流電位の振動数 ω に無関係に一定であるが, 交流探針に関する実験的研究によれば²⁾ 実際の電流の直流成分の増加分は, 振動数が低い時には, $E_{g. 1}$) であたえられる一定値をとるが, 電子のプラズマ振動数 ω_p において, それは共鳴的に急激に増加し鋭いピークを示す。電子プラズマ振動数 ω_p よりも高い振動数の領域では, 直流電流の増加分は振動数と共に急激に減少する。

電子プラズマ振動数 ω_p における共鳴現象については, すでに我々によって理論が展開されている。我々の理論³⁾ は, かけられた交流電位に対するプラズマのレスポンスについての非常に

簡単なモデルに基づいているが、最近 Cairns⁴⁾ によって行なわれた系統的な実験によってその正しい事が確められた。然しながら、我々の理論では観測された直流電流の増加分の振動数依存性を全振動数領域に涉って理論的に説明する事は試みられなかった。

さて、Cairns の実験で試みられたようなピークの半値巾の決定などを正しく行なう為には直流電流の非共鳴的増加分が、電子プラズマ振動数 ω_p の領域で、どのような振動数依存性を持っているか？ということについて正確な知識が必要である。この論文の目的は、直流電流の非共鳴的増加分の振動数依存性を、sheath 領域を通過する電子の飛翔時間の有限性によって説明する事である。

§2. 問題の定式化

直流電流の整流された増加分の振動数依存性を、sheath が振動電位をかけた為にどういう風に変化するかという面倒な問題にはふれないで、簡単に電子の sheath 領域を横切る飛翔時間の有限性の効果だけを考えることによって説明できるのではあるまいか？ Langmuir 探針の特性が、sheath の領域の複雑な構造には無関係であるように交流探針の主要な特性も、例えば sheath 内の電場の空間分布などには依存しないと考えよう。共鳴探針の理論においては、探針にかけられた交流電位が或る透過距離 L の範囲に一樣な振動電場を誘起すると仮定した。衝突平均距離がこの L よりもはるかに長いと仮定して、我々はこの振動電場をプラズマに挿入された振動する電気二重層として取扱った。このような簡単化したモデルに基づく理論が、最近の実験で非常に成功している事が確められたので、我々は、此处でも探針の電位によるプラズマ内の電場は距離 L の領域内で一樣であると仮定する。さうしてこの距離 L を電子が飛翔する時間が有限であるという効果を少し詳しく検討する。

平面探針が x 軸の原点におかれていたとしよう。電場

$$E(x, t) = E_0 + E_1 \sin(\omega t - \delta) \quad (3)$$

が $0 < x < L$ の領域で一樣に存在すると考える。電場の強さ E_0 , E_1 は、探針の電位 V_0 及びかけられた交流電位 V_1 によって、

$$E_0 = V_0 / L, \quad E_1 = V_1 / L \quad (4)$$

として定められる。さて、 E_1 (3) であたえられる電場の存在する sheath の領域における

電子の運動方程式は

$$m \ddot{x} = e E_0 + e E_1 \sin(\omega t - \delta) \quad (5)$$

である。この方程式, E_g. 5) を,

$$x = L, \quad \dot{x} = -v \quad \text{at } t = 0 \quad (6)$$

という初期条件の下で解こう。探針によって電子が捕集される条件は,

$$\dot{x} < 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (7)$$

である事に注意しておく。問題は全く初等的で, E_g. 5) から

$$\dot{x} = \frac{e E_0}{m} t - \frac{e E_1}{m} \frac{\cos \omega t - 1}{\omega} \cos \delta - \frac{e E_1}{m} \frac{\sin \omega t}{\omega} \sin \delta - v \quad (8)$$

及び

$$x = \frac{1}{2} \frac{e E_0}{m} t^2 - \frac{e E_1}{m} \frac{\sin \omega t - \omega t}{\omega^2} \cos \delta + \frac{e E_1}{m} \frac{\cos \omega t - 1}{\omega^2} \sin \delta - v t + L \quad (9)$$

を得る。

さて, 距離 L を飛越する通過時間は E_g. 9) で $x = 0$ とおいて定められる。即ち方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{e E_0}{m} t^2 - v t + L - \frac{e E_1}{m} \frac{\sin \omega t - \omega t}{\omega^2} \cos \delta \\ + \frac{e E_1}{m} \frac{\cos \omega t - 1}{\omega^2} \sin \delta = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

が, 通過時間 τ を定める。その τ の値を E_g. 8) に代入すれば, $x = 0$ での電子の速度 $\dot{x}$ が得られ, 探針による電子の捕集条件, E_g. 7) から, sheath 領域に入る時の電子速度 v の下限 v_c を定める事ができる。電子の捕集条件を満足する電子の臨界速度 v_c を定めれば, 探針に流れこむ電子電流密度は,

$$j_e(\delta) = e \int_{v_c(\delta)}^{\infty} v f(v) dv \quad (11)$$

によって計算できる。臨界速度 $v_c(\delta)$ は、振動電場の位相 δ に関係するが、整流された直流電流は E_g (11) をその位相 δ について平均する事によって定められよう。即ち

$$j_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} j_e(\delta) d\delta \quad (12)$$

が、直流電流をあたえる。

先づ、振動電場のない場合を考えよう。

この場合には、飛翔時間 τ は

$$\tau_o = \frac{m}{e E_o} \{ v - [v^2 - (2 e V_o / m)]^{1/2} \} \quad (13)$$

この時間の後の電子の速度は

$$\dot{x} = - [v^2 - (2 e V_o / m)]^{1/2} \quad (14)$$

それ故、電子の捕集条件は、臨界電子速度を

$$v_c = (2 e V_o / m)^{1/2} \quad (15)$$

と定める。それ故、 E_g (11) に従って、

$$j_L = e \int_{v_c}^{\infty} v f(v) dv = e n \left(\frac{\kappa T}{2 \pi m} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{e V_o}{\kappa T} \right) \quad (16)$$

を得るが、これは Langmuir 探針における電子電流密度に他ならない。

さて、交流電位が静電電位にかけられた場合 E_g (10) から飛翔時間 τ を定める事は一般の場合には簡単でない。そこで、先づ低振動数の極限の場合を考えよう。交流電位の振幅が静電電位 V_o より小さい場合には、

$$\omega < L^{-1} \left(\frac{2 e V_o}{m} \right)^{1/2} \quad (17)$$

の振動数領域が低振動数領域として取扱うことができる。この場合には、 E_g (10) は

$$\frac{1}{2} \frac{e E_o}{m} + \frac{e E_1}{m} \sin \delta) t^2 - v t + L = 0 \quad (18)$$

と近似でき、従って飛翔時間 τ_{low} は、

$$\tau_{low} = \frac{m}{e E_0} \left\{ v - \left[v^2 - 2 e (V_0 + V_1 \sin \delta) / m \right]^{1/2} \right\} \quad (19)$$

と定められ、探針の位置における電子の速度は

$$\dot{x} = - \left[v^2 - 2 e (V_0 + V_1 \sin \delta) / m \right]^{1/2} \quad (20)$$

となる。従って、電子の捕集条件 $E_{g. 7}$ は電子の臨界速度 v_c ,

$$v_{low}(\delta) = \left[2 e (V_0 + V_1 \sin \delta) / m \right]^{1/2} \quad (21)$$

をあたえる。それ故、直流電流密度は $E_{g. 11}$ 及び $E_{g. 12}$ から

$$j_{low} = \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{v_{low}(\delta)}^{\infty} v f(v) dv = j_{Lo} (e V_1 / \kappa T) \quad (22)$$

この表式は直流電流の増加分に対する $E_{g. 1}$ をあたえる結果に他ならない。

一方、高振動数の極限では、 $E_{g. 10}$ は

$$\frac{1}{2} \frac{e E_0}{m} t^2 - \left(v - \frac{e V_1}{m \omega} \cos \delta \right) t + L = 0 \quad (23)$$

と近似される。 $E_{g. 23}$ から飛行時間 τ_{high} を求めると、上と同様の手続きで臨界速度

v_{high} は、

$$v_{high}(\delta) = \left(2 e V_0 / m \right)^{1/2} - (e V_1 / m \omega L) \cos \delta \quad (24)$$

と定められる。それ故、電流密度に対して

$$j_{high}(\delta) = j_L \exp \left(- \frac{1}{\kappa T} \left(2 e V_0 / m \right)^{1/2} \frac{e V_1}{\omega L} \cos \delta \right) \quad (25)$$

を得る。従って、直流電流密度は

$$j_h = j_L I_0 \left(\frac{e V_1}{\kappa T} \frac{1}{\omega L} \left[2 e V_0 / m \right]^{1/2} \right) \quad (26)$$

となる。これは振動数が高くなると、期待されたように j_L に近づく表式である。

中間の振動数領域の場合に $E_{g. 10}$ から飛行時間を定める事は大変なので、低振動数領域に対する表式 $E_{g. 22}$ と高振動数領域に対する表式 $E_{g. 26}$ を、図に書いて、全体の振動数依存性を推測することにする。

Fig. 26) は, L の値によるので, Fig. 1 では,

a) $L=3\lambda_D$, b) $L=5\lambda_D$, c) $L=20\lambda_D$ の三つの場合を図示してある。プラズマの物理量に対する数値は Cairns の実験結果に従って

$kT=0.2 \text{ eV}$, $V_0=1 \text{ volt}$, $V_1=0.34 \text{ volt}$ という値をとってある。

Fig. 1

$E_{g.17})$ から, $E_{g.22})$ は a) の場合は, $\omega \approx 0.7 \omega_p$, b) の場合には $\omega \approx 0.4 \omega_p$, c) の場合には $\omega \approx 0.1 \omega_p$ の範囲まで適用できる事がわかる。図の破線は, $E_{g.22})$ と $E_{g.26})$ の曲線の適当な interpolation である。

§ 3. ま と め

上の節で, 電子の有限飛翔時間効果の考察に基づいて, 交流探針における整流現象の理論を展開した。この理論によれば期待される通り低振動数の領域では良く知られた直流電流密度の表式が得られ, 高振動数の領域では, 整流電流の減少をあらわす表式が得られる。

さて, もしも, L が Fig. 1 の a) の場合のような大きさの程度であれば, 電子プラズマ振動数 ω_p の共鳴領域も, 低振動数領域と見做すことができ, 電子の飛翔時間の有限性は重要でない。従って, このような場合には, 我々の理論³⁾で得られた共鳴ピークに関する結果が成立する。然し, もしも L が Fig. 1 の c) の場合のように大きい値であるならば, 電子プラズマ振動数における共鳴現象は, 飛翔時間の有限性によって著しい影響をうける。このような場合には電子捕集条件を満たす臨界速度 v_c は $E_{g.21})$ ではなく, $E_{g.24})$ を用いて, 共鳴電子電流密度を計算しなければならない。一見してわかるように, 共鳴ピークの構造, 特にピークの高さの交流電位の振幅に対する依存性などは, 我々の理論によって先にあたえられたものとは大分変わるであろう。

処が, Cairns の実験結果によれば, ピークの高さは, 我々の理論によって予言されたように $(eV_1/kT) I_1(eV_1/kT)$ に比例している。この事は, Fig. 1 の a) の場合が, 実際の場合である事を示している。然しながら, Cairns の分析によれば L は 3.5 cm の程度 Debye の距離は 0.55 cm , この値は, Fig. 1 の c) の場合に対応する。この矛盾を説明することが, 我々の次の問題である。

L の大きさについての明白な矛盾が明らかになったが, この論文の方法によって交流探針における整流現象の全振動数領域に渉る一貫した理論を定式化する事ができた。 L の大きさについての上述の矛盾は, 今後, 実験及び理論の両面から究明されねばならない重要な, いわば共鳴探針の方法の最も原理的な問題である。

終りに, Orsay のパリ大学理学部高エネルギー研究所プラズマ物理部門に滞在してこの仕事をを進める機会を筆者に与えて下さった Prof. Delcroix, Prof. Kalman に謝意を表しま

交流探針における有限飛行時間効果

す。又 München の Max-Planck 研究所においてこの問題について討論して下さった Dr. G. Knorr及び Slough の Radio Research Station でこの問題に関する多くの実験結果を教えて下さった Dr. R.B.Cairnsにも心からの謝意を表します。

引用文献

- 1) L.B. Loeb, Basic Processes of Gaseous Electronics.
- 2) K.Takayama, H. Ikegami and I. Miyazaki, Phys. Rev. Letters 5 (1960), 238.
- 3) Y.H. Ichikawa and H. Ikegami, Prog. Theoret. Phys. 28 (1962), 315.
- 4) R.B. Cairns, I.M. 58, Radio Research Station, Slough, Berks., England.