Moment Method for Wave

Phenomena in a Plasma

——Effect of Two - Body Collisions
on the Plasma Oscillation ——

小笠原正忠* (東大理)

(1963年1月16日受理)

目 次

§ 1	Introduction
§ 2	Preliminary
§ 3	Collision Term
§ 4	Dispersion Relation
§ 5	Discussion of the Dispersion Relation
§ 6	Integrated Moment Equation
§ 7	Moment Wave
§ 8	Effect of Ion-Electron Collision

Appendix A

" B Derivation of a Recurrence Formula

" C Evaluation of $(\varphi_{pl}, J_{e-i} \varphi_{ge})$

Reference

-
- * M. Ogasawara,
Department of Physics,
University of Tokyo.

§ 1. Introduction

Plasma の kinetic theory の問題を大別すると,

- (1) 熱平衡状態
- (2) 定常状態の輸送現象
- (3) 空間的に一様な速度分布の緩和
- (4) 平衡状態のまわりの小変動の伝播

のようになる。(3)は初期速度分布 $f(\vec{v}, t=0)$ が与えられたとき

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (1.1)$$

を調べることが問題である。 $f = f^{(0)}(1 + \phi)$ ($f^{(0)}$ = 平衡分布) において ϕ について線形化すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -n_0 J \phi \quad (1.2)$$

となる。 $n_0 J$ は線形対称な collision operator である。このようにして relaxation の問題は operator J の固有値問題に帰着される。これは Maxwell molecule に対してのみ解けている。coulomb force の場合は I (reference 1) を I と書く) に於いて、正確な固有値を求めることの困難さが示され、又一部の近似固有値が求められている。

(4)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_a \right) \phi = -n_0 J \phi \quad (1.3)$$

によって支配される。たとえ Maxwell molecule の場合でも(4)は完全には決まらない。Mott-Smith, Wang Chang and Uhlenbeck²⁾ は $\phi = \sum a_i \Psi_i(\vec{v}) [\Psi_i(\vec{v})$ は Maxwell molecule の場合の固有函数¹⁾] の形の解を見出そうとしたが(1.3)の左辺第2項のために、 $\dot{a}_i$ 方程式に a_j ($j > i$) が入って来て、いわゆる階級方程式になる。従って、collision operator の固有値問題が解けたとしても、wave の問題を完全に解くことは出来ない。

collisionless の場合でも上の様になると階級方程式になって了う。しかし(1.3)を Fourier 変換して形式的に ϕ を求めてから速度積分して moment を計算すると、前の様な

左辺第2項による higher modeの介入をさけることが出来て, exactな dispersion relation が得られる。〔§4〕

しかし collision を考慮すると同様の手続を採っても J が operatorなので (1.3) の左辺第2項と同じ事情になり exactな dispersion relation は得られない。この様な複雑さのために, plasma 振動に対して collision の効果を正しくとり入れている理論はない。ここで“正しく”と云う意味は Boltzmann collision term の範囲内での話である。Boltzmann方程式には相関効果は含まれていない。しかし coulomb力の様な long-range force の場合は相関効果を無視し得ないであろう。此の様な意図のもとに最近 plasmaに対する kinetic eqの研究が盛んになって来た。³⁾ Y.H.Ichikawa⁴⁾, C.R.Willis⁵⁾ 等は2体相関函数を考慮した kinetic eq. を set up して plasma oscillation の研究を行なっている。〔§5〕

此の新しい研究との比較の意味でも2体 collision process の効果を exactに与えることは意義深いことと思われる。本論文では Boltzmann-Vlasov eq. から出発し, collision frequency が plasma frequency に比して小さい場合を扱い, 長波長極限, すなわち波数 k の2乗の order まで exactな結果を与える。

§2. Preliminary

(a) Definition of moment

平衡からのはずれが小さい時, 電子の速度分布函数 $f(\vec{v})$ を

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}, \quad f^{(1)} = f^{(0)}\phi, \quad |\phi| \ll 1 \quad (2.1)$$

の様に展開する。 $\vec{v}$ は電子の速度, $f^{(0)}$ は平衡状態の分布で Maxwell 分布:

$$f^{(0)}(\vec{v}) = n_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_0} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\kappa T_0}\right) \quad (2.2)$$

である。 m , n_0 , T_0 , κ はそれぞれ電子の mass, number density, temperature, Boltzmann constant を意味する。

次の様な直交函数系を導入する。¹⁾

$$\Psi_{re}(\vec{v}) = \frac{\varphi_{re}}{N_{re}} = \frac{1}{N_{re}} \xi^e P_e\left(\frac{\xi_z}{\xi}\right) S_{e+\frac{1}{2}}^{(r)}(\xi^2) \quad (2.3)$$

$$\xi^2 = \frac{m}{2\kappa T_0} v^2 = (\alpha v)^2, \quad (2.4)$$

$$N_{re}^2 = \frac{2}{2\ell+1} \frac{1}{\sqrt{\pi r!}} \Gamma(\ell+r+\frac{3}{2}) \quad (2.5)$$

ここに P_e , $S_n^{(r)}$ はそれぞれ Legendre, sonine の多項式, ξ は無次元の velocity, N_{re} は normalization constant を意味する。velocity $\vec{v}$ の任意函数 $\phi(\vec{v})$, $\psi(\vec{v})$ の内積を

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{n_0} \int f^{(0)} \phi \psi d\vec{v} \quad (2.6)$$

で定義する時, 函数系 $\{\Psi_{re}\}$ の直交関係

$$(\Psi_{re}, \Psi_{r'e'}) = \delta_{rr'} \delta_{ee'} \quad (2.7)$$

が成り立つ。 $\{\Psi_{re}\}$ を base にとり分布の平衡からのはずれ $\phi(\vec{v}, \vec{x}, t)$ を

$$\phi(\vec{v}, \vec{x}, t) = \sum a_{re}(\vec{x}, t) \Psi_{re}(\vec{v}) \quad (2.8)$$

$$a_{re}(\vec{x}, t) = (\Psi_{re}, \phi) = \frac{1}{n_0} \int f^{(1)} \Psi_{re} d\vec{v} \quad (2.9)$$

の様に展開する。展開係数 a_{re} は $f^{(1)}$ の Ψ_{re} に関する moment を意味している。本論文に於いては, $f^{(1)}$ の代りに moment を扱う。

(b) Moment と Macroscopic Quantity

上で moment a_{re} を定義したが, 以下でそれ等の意味を明らかにしておく。

平衡状態に於ける量に suffix 又は superscript 0 を, 平衡からのはずれを意味する量に prime を附し, それを無次元化したものに ripple mark を附す。

Number density	$n = n_0 + n' = n_0(1 + \tilde{n})$
Macroscopic velocity	$\vec{u} = 0 + \vec{u}' = \alpha^{-1} \tilde{u}$
Temperature	$T = T_0 + T' = T_0(1 + \tilde{T}) \quad (2.10)$
Pressure tensor	$P_{ij} = P_{ij}^0 + P_{ij}' = n_0 \kappa T_0(1 + \tilde{p}_{ij})$
Heat flow vector	$\vec{q} = 0 + \vec{q}' = \frac{1}{2} n_0 m \alpha^{-3} \tilde{q}$

これらの量を分布 f を用いて計算し, moment a_{re} との関係を見る。

[number density]

$$n = \int f d\vec{v} = \int f^{(0)} d\vec{v} + \int f^{(1)} d\vec{v} = n_o + n_o(\phi, 1).$$

$$\text{従って} \quad \tilde{n} = (\phi, 1) = a_{00} \quad (2.11)$$

[macroscopic velocity]

$$u'_z = \frac{1}{n_o} \int f^{(0)} \phi v_z d\vec{v} = \frac{a_{01}^{-1} N_{01}}{n_o} (\phi, \Psi_{01})$$

$$\therefore \tilde{u}_z = N_{01} (\phi, \Psi_{01}) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{01} \quad (2.12)$$

[kinetic temperature]

$$3 n \kappa T = m \int f v^2 d\vec{v},$$

$$3 n \kappa T = 3 n_o \kappa T_o (1 + \tilde{n} + \tilde{T}).$$

$$\begin{aligned} \text{従って} \quad 3 n_o \kappa T_o \tilde{T} &= m \int f^{(0)} \phi v^2 d\vec{v} - 3 n_o \kappa T_o \tilde{n} \\ &= -2 n_o \kappa T_o N_{10} (\phi, \Psi_{10}). \\ \therefore \tilde{T} &= -\frac{2}{3} N_{10} (\phi, \Psi_{10}) = -\sqrt{\frac{2}{3}} a_{10} \end{aligned} \quad (2.13)$$

[Pressure tensor] は macroscopic velocity に乗った座標系で見た momentum transport として定義される。

$$p_{ij} = m \int f (\vec{v} - \vec{u})_i (\vec{v} - \vec{u})_j d\vec{v} \quad (2.14)$$

linearizationすると

$$p_{zz} = p_{zz}^o + p'_{zz},$$

$$p'_{zz} = m \int f^{(0)} \phi v_z^2 d\vec{v}$$

今 scalar pressure p' と stress tensor S'_{ij} を

$$p' = \frac{1}{3} T_r p'_{ij} = \frac{1}{3} m \int f^{(0)} \phi v^2 d\vec{v},$$

Moment Method for Wave Phenomena in a Plasma

$$S'_{ij} = p'_{ij} - p' \delta_{ij} \quad (2.15)$$

によって定義すると

$$\begin{aligned} S'_{zz} &= p'_{zz} - p = m \int f^{(0)} \phi \left(v_z^2 - \frac{v^2}{3} \right) d\vec{v} \\ &= \frac{4}{3} n_o \kappa T_o N_{o2} (\phi, \Psi_{o2}), \\ \therefore \tilde{S}_{zz} &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\phi, \Psi_{o2}) = \frac{2}{\sqrt{3}} a_{o2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

[heat flow vector] も $\vec{u}$ で動いている座標系で定義される。

$$\mathcal{G}_z = \frac{1}{2} m \int f (\vec{v} - \vec{u})^2 (\vec{v} - \vec{u})_z d\vec{v}. \quad (2.17)$$

linearization して

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_z^1 &= -\frac{5}{2} n_o \kappa T_o u_z + \frac{1}{2} m \int f^{(0)} \phi v^2 v_z d\vec{v} \\ &= -\frac{1}{2} n_o m a^{-3} N_{11} (\phi, \Psi_{11}) \\ \therefore \tilde{\mathcal{G}}_z &= -\frac{\sqrt{5}}{2} (\phi, \Psi_{11}) = -\frac{\sqrt{5}}{2} a_{11} \end{aligned} \quad (2.18)$$

以上をまとめると下表のようになる。

$a_{r\ell}$	dimension	quantity
$a_{00} = \tilde{n}$	n_o	number density
$a_{01} = \sqrt{2} \tilde{u}_z$	$\left(\frac{2 \kappa T_o}{m} \right)^{1/2}$	macroscopic velocity
$a_{10} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{T}$	T_o	temperature
$a_{02} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{S}_{zz}$	$n_o \kappa T_o$	stress tensor
$a_{11} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \tilde{\mathcal{G}}_z$	$\frac{1}{2} n_o m \left(\frac{2 \kappa T_o}{m} \right)^{3/2}$	heat flow

§ 3. Collision Term

Plasma に於ける輸送現象の扱いの場合, collision term は

Boltzman's type

Fokker - Planck type

のいずれかが正確な形で用いられている。しかし, plasma oscillation の理論では collision term を正確な形で用いたものはない。多体相関効果の plasma oscillation への寄与が問題になって来た昨今, 2 体衝突の寄与を正確に与えることは非常に望まれるところである。

以下簡単に今迄用いられて来た collision term をみることにする。最も多く用いられるのは

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nu \phi \quad (3.1)$$

である。⁶⁾ これは relaxation feature を含んでいるが, single relaxation constant theory であり I で示したように余り良い近似でない。又保存則を満していないので, 電子-電子衝突を扱うことは出来ない。

Bhatnager, Gross and Krook⁷⁾ は保存則をみたすような model collision term を set up して分散式を与えている。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\eta_0}{\sigma} \left[-\phi + \nu + \frac{m}{\kappa T_0} \vec{v} \cdot \vec{q} + \tau \left(\frac{m v^2}{2 \kappa T_0} - \frac{3}{2} \right) \right],$$

ここに

$$\nu = \int \phi F d\vec{v}, \quad \vec{q} = \int \vec{v} \phi F d\vec{v},$$

$$\nu + \tau = \frac{m}{3 \kappa T_0} \int v^2 \phi F d\vec{v}, \quad (3.2)$$

$$F = \left(\frac{m}{2 \pi \kappa T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m v^2}{2 \kappa T} \right)$$

$\frac{n_0}{\sigma}$ が collision frequency になっている。この model も single relaxation constant theory であるが, このために数学的に簡単化されて, collision frequency のどんな値に対しても成り立つ分散式が得られる。

Moment Method for Wave Phenomena in a Plasma

一般に分布の mode によって relaxation constant は異なる。¹⁾ 最近 Johnston⁸⁾ は分布 f を

$$f = \sum_{\ell m s} f_{\ell m s}(v^2, r, t) Y_{\ell m s}(\theta, \varphi) \\ = f_0 + \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \vec{v}}{v} + \frac{\mathbf{f}_2 : \vec{v} \vec{v}}{v^2} + \dots, \quad (3.3)$$

$$Y_{\ell m s}(\theta, \varphi) = P_{\ell}^m(\cos \theta) (\delta_{0s} \cos m\varphi + \delta_{1s} \sin m\varphi),$$

$\mathbf{f}_{\ell}$: ℓ 階の tensor

と展開し, $\dot{f}_0, \dot{\mathbf{f}}_1, \dot{\mathbf{f}}_2$ に対する 3 つの方程式を基礎方程式として electric conductivity tensor を求めている。それぞれの衝突項 $\vec{C}_{\ell}$ を

$$\vec{C}_{\ell} = -\nu_e \mathbf{f}_{\ell} \quad (3.4)$$

とおいているが, 最後の expression は, $\nu_0 = \nu_1 = \nu_2$ として出している。分布 f の展開のうち $\ell \geq 3$ 以上を truncate した理由は何にも述べられていないが, ν_{ℓ} の違いを考慮

している。(3.4) も (3.1) 同様, 保存則を満たしていない。

一方 coulomb force に特徴的な small angle scattering を考慮する意味で, Lenard, and Bernstein⁹⁾ 又 Logunov¹⁰⁾ は速度空間に於ける Fokker-Planck eq.

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \beta \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left[\vec{v} f^{(1)} + v_0^2 \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{v}} \right], \\ f = f^{(0)} + f^{(1)}, \quad (3.5)$$

β : effective collision frequency,

v_0 : root mean square speed

を用いているが結果は single relaxation constant theory と同じである。

以上種々の model collision term について述べたが, 我々は近似なしに Boltzmann collision term を用いる。linearized collision term は¹⁾

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -n_0 \mathbf{J} \phi. \quad (3.6)$$

J は collision operator で次の様に定義される。

$$J\phi = \frac{1}{n_0} \iint f^{(0)}(\vec{v}_2) \left[\phi(\vec{v}_1) + \phi(\vec{v}_2) - \phi(\vec{v}_1') - \phi(\vec{v}_2') \right] \\ \times g I(g, \chi) d\Omega d\vec{v}_2. \quad (3.7)$$

$\vec{v}_i'$: 衝突後の velocity

g : relative speed $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = |\vec{v}_1' - \vec{v}_2'|$

χ : 散乱角,

$I(g, \chi)$: 散乱の断面積,

$d\Omega$: 散乱の立体角,

展開 (2, 8) を (3, 6) に代入すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{coll}} = n_0 \sum_{r \neq e} a_{re} J\Psi_{re} \\ = - \sum_{r \neq e} \lambda_{rs}^{(0)} a_{re} \Psi_{se}, \quad (3.8)$$

$$\lambda_{rs}^{(0)} = n_0 (\Psi_{re}, J\Psi_{se}) = \lambda_{sr}^{(0)}. \quad (3.9)$$

$\lambda_{rs}^{(0)}$ は (3.7) を用いて計算出来る量である。

collision の種類 (電子-電子, 電子-イオン) は cross section $I(g, \chi)$ に含まれている。

従って (3.8) は一般的な collision term をあらわす。

§4. Dispersion Relation

電子の縦振動を考える。イオンは charge neutrality を保つように一様にぬりつぶされている。この section ではイオン-電子衝突は考えないことにする。イオンの効果は §8 で扱われる。基礎方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}}, \quad (4.1)$$

Moment Method for Wave Phenomena in a Plasma

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e (n_0 - \int f d\vec{v}) \quad (4.2)$$

ここに電子の charge は $-e$ と採られている。

これらを (2.1) (2.2) を用いて linearization すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} + 2\alpha^2 \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \vec{v} = -n_0 J \phi, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi e \int f^{(1)} \phi d\vec{v}. \quad (4.4)$$

ここで (3.6) で与えられる collision term を用いた。この方程式系に対し

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\vec{k}} \\ \vec{E}_{\vec{k}} \end{pmatrix} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) \quad (4.5)$$

なる形の波動解を求める。(4.5) を (4.4) に代入し (2.9) を用いると、

$$\frac{e}{m} \vec{E}_{\vec{k}} = \omega_o^2 \frac{i\vec{k}}{k^2} a_{oo}^{\vec{k}}, \quad (4.6)$$

$$\omega_o^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \dots \dots \text{plasma frequency.}$$

ここに $a_{oo}^{\vec{k}}$ は a_{oo} の Fourier 成分を意味する。(4.5) を (4.3) に代入し (4.6)

(3.8) を用いると、

$$i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \phi_{\vec{k}} = i\vec{k} \cdot \vec{v} \left(\frac{k_D}{k} \right)^2 a_{oo}^{\vec{k}} + \sum_{nst} \lambda_{ns}^{(t)} \Psi_{st} a_{nt}^{\vec{k}},$$

$$\therefore \phi_{\vec{k}} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}} \left(\frac{k_D}{k} \right)^2 a_{oo}^{\vec{k}} - i \sum_{nst} \lambda_{ns}^{(t)} \frac{\Psi_{st}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}} a_{nt}^{\vec{k}}, \quad (4.7)$$

$$k_D^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{\kappa T_0}$$

(4.7) の両辺に $\frac{1}{n_0} \int d\vec{v} f^{(0)} \Psi_{re}$ を operate して (2.9) を考えると

$$a_{re}^{\vec{k}} = \alpha_{re} a_{oo}^{\vec{k}} + \sum_{st} \beta_{rest} a_{st}^{\vec{k}} \quad (4.8)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{re} &= \left(\frac{\hbar_D}{\hbar} \right)^2 \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}}, \Psi_{re} \right), \\ \beta_{rest} &= -i \sum_n \lambda_{ns}^{(t)} \left(\frac{\Psi_{re}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}}, \Psi_{nt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$\vec{k}$ 方向を z 軸に採り

$$\lambda = i \frac{\alpha \omega}{\hbar} \quad (4.10)$$

とおくと (4.9) は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{re} &= - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 2 \lambda^2 \left(\frac{i \xi_z}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{re} \right), \\ \beta_{rest} &= -i \frac{\lambda}{\omega} \sum_n \lambda_{ns}^{(t)} \left(\frac{\Psi_{re}}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{nt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.9')$$

(4.8) は各 mode 間の関係式である。もし衝突がない時 ($\beta = 0$) は、各 mode は

number density の fluctuation $a_{00}^{\vec{k}}$ だけに関係しているが、collision

process のために各 mode は couple していることが判る。

collision frequency の一次まで考慮して dispersion relation を得るために (4.8) 式で一度 iteration すると

$$a_{re}^{\vec{k}} = \left[\alpha_{re} + \sum \beta_{rest} \alpha_{st} \right] a_{00}^{\vec{k}}. \quad (4.11)$$

iteration が出来る条件、又は (4.11) が正しく成り立つ条件は、(4.8) の第2項が第1項に比して小さい場合である。

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \approx \frac{\lambda_{ns}^{(t)}}{\omega_0} \frac{\hbar}{\hbar_D} \ll 1. \quad (4.12)$$

従って (4.11) を用いて得られる dispersion relation は波数 $\hbar$ が $\hbar_D$ に比して小さく、collision frequency が plasma frequency に比して小さい場合に正しい

Moment Method for Wave Phenomena in a Plasma

(4.11) で $\gamma = \ell = 0$ とおくことによって dispersion relation

$$1 = \alpha_{00} + \sum_{re} \beta_{00re} \alpha_{re} \quad (4.13)$$

を得る。計算の便宜

$$I_{re} \equiv \left(\frac{i \xi_z}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{re} \right), J_{re} = \left(\frac{1}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{re} \right) \quad (4.14)$$

とおくと

$$I_{re} = \lambda J_{re} - \delta_{or} \delta_{oe},$$

$$\alpha_{re} = - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 2 \lambda^2 I_{re}, \quad (4.15)$$

$$\beta_{00re} = -i \frac{\lambda}{\omega} \sum_s \lambda_{sr}^{(e)} J_{se}.$$

(4.13) $\times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$ から

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -2 \lambda^2 I_{00} + i \frac{2 \lambda^3}{\omega} \sum_{rse} \lambda_{sr}^{(e)} J_{se} I_{re}, \quad (4.16)$$

特に collisionless の場合は第1項だけ残り, (A.19)を用いて

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 &= 1 + 3 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2 - i \frac{2 \gamma_L}{\omega_0}, \\ \gamma_L &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_0 \left(\frac{\hbar_D}{\hbar} \right)^3 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar_D}{\hbar} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

これは良く知られた分散式である。 γ_L は Landau damping係数を意味する。

電子-電子 collision の際の collision invariance から

$$\lambda_{ro}^{(o)} = \lambda_{r1}^{(p)} = \lambda_{ro}^{(o)} = 0, \quad \text{for } r=0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

従って $\sum_{r,s,\ell=0}^{\infty}$ の内 $(\begin{smallmatrix} s \\ r \end{smallmatrix}, \ell) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ は落ちる。従って (4. 16) は (4. 15) を用いて

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -2\lambda^2 I_{00} + i \frac{2\lambda^4}{\omega} \sum'_{s,r,\ell} \lambda_{rs}^{(\ell)} J_{s\ell} J_{r\ell}. \quad (4. 19)$$

ここに prime は collision invariance のために寄与しない項を除くことを意味する。collisionless の場合と同様に $\hbar \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$) の漸近形を求めよう。 $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ を $\hbar^2$ まで正確に求めるためには I_{00} を $O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$ まで $\sum' \lambda_{rs}^{(\ell)} J_{r\ell} J_{s\ell}$ を $O\left(\frac{1}{\lambda^6}\right)$ まで求めれば良い。

(4. 14) を用いて

$$J_{s\ell} = \frac{1}{\lambda} (1, \Psi_{s\ell}) + \frac{i}{\lambda^2} (\xi_z, \Psi_{s\ell}) - \frac{1}{\lambda^3} (\xi_z^2, \Psi_{s\ell}) \cdots \quad (4. 20)$$

一方漸化式 (B・6) :

$$\xi_z \Psi_{r\ell} = A_{r\ell} \Psi_{r,\ell+1} - B_{r\ell} \Psi_{r-1,\ell+1} + C_{r\ell} \Psi_{r,\ell-1} - D_{r\ell} \Psi_{r+1,\ell-1}$$

を考えると, ξ_z^n は $\Psi_{00} = 1$ に ξ_z を n 回 operate したものと解釈出来る。すると ξ_z^n

がどの様な $\Psi_{r\ell}$ を含んでいるかを判る。例えば

○と●の位置にそれぞれの場合 $\Psi_{r\ell}$ が現われる。●は collision invariance (4. 18)

により $\sum' \lambda_{rs}^{(\ell)} J_{s\ell} J_{r\ell}$ に寄与しないものである。最初に寄与するのは, $(\xi_z^2, \Psi_{r\ell})$

の内 $(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}, \ell) = (0, 2)$ であることが (4. 21) 図から判る。此の様にして

$$\sum'_{r,s,\ell} \lambda_{rs}^{(\ell)} J_{s\ell} J_{r\ell} = \frac{\lambda_{00}^{(2)}}{3} \frac{1}{\lambda^6} + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \quad (4. 22)$$

を得る。ここで λ の奇数巾が出ないことは次の様に説明出来る。 (ξ_z^n, Ψ_{r-e}) の内 n が偶 (奇) 数なら ℓ も偶 (奇) 数の時のみ値を持つ (0 でない) ことが漸化式から判る。一方

$$J_{s-e} J_{r-e} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{nm} \left(\left(\frac{i\xi_z}{\lambda} \right)^n, \Psi_{s-e} \right) \cdot \left(\left(\frac{i\xi_z}{\lambda} \right)^m, \Psi_{r-e} \right),$$

従って $\ell =$ 偶 (奇) 数ならば n も m も同時に偶 (奇) 数の時のみ $\sum_{nm}$ に寄与する。故に $n+m$ は常に偶数になる。

(A. 19) から

$$-2\lambda^2 I_{00} = 1 - \frac{3}{2\lambda^2} + \dots, \quad (4.23)$$

(4.22) (4.23) を (4.19) に代入して

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 + 3 \left(\frac{\ell}{\ell_D} \right)^2 - i \frac{4}{3} \frac{\lambda_{00}^{(2)}}{\omega_0} \left(\frac{\ell}{\ell_D} \right)^2 \quad (4.24)$$

この dispersion relation は

collision frequency $<$ plasma frequency

の限り正しい。

以上では collision frequency の一次迄しか扱わなかったが、(4.8) 式で n 回 iteration することにより collision frequency の n 次の項からの dispersion relation への寄与を前と同様にして計算出来る。従って collision frequency の任意次数まで考慮した dispersion relation が求められる。 n 回 iteration する時、 β の n 乗の項は

$$K_n = r_1 \ell_1 r_2 \ell_2 \dots r_n \ell_n = \beta_{00} r_1 \ell_1 \beta_{r_1 \ell_1} r_2 \ell_2 \beta_{r_{n-1} \ell_{n-1}} r_n \ell_n^\alpha r_n \ell_n$$

だけ dispersion relation に寄与する。そして dispersion relation は

$$1 = \alpha_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \quad (4.26)$$

となる。(4.13) は此の式で $n=1$ とおいたものである。 K_n は n 個の β と 1 個の α との積であるが、各 α, β の $\frac{1}{\lambda}$ 展開に於ける最初の項同志の積が、 K_n の $\frac{1}{\lambda}$ 展開に於ける $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$

の項を与えることを以下で示そう。

定義 (4.9') を用いて

$$\beta_{o o r_1 \ell_1} = -i \frac{\omega_o}{\omega} \lambda \sum_{s_1} \frac{\lambda^{(\ell_1)}_{s_1 r_1}}{\omega_o} \left(\frac{1}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{s_1 \ell_1} \right),$$

$$\beta_{r_{i-1} \ell_{i-1} r_i \ell_i} = -i \frac{\omega_o}{\omega} \lambda \sum_{s_i} \frac{\lambda^{(\ell_i)}_{s_i r_i}}{\omega_o} \left(\frac{\Psi_{r_{i-1} \ell_{i-1}}}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{s_i \ell_i} \right),$$

$$\alpha_{r_n \ell_n} = - \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^2 2 \lambda^2 \left(\frac{i \xi_z}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{r_n \ell_n} \right)$$

(4.20) から (4.22) までの議論に従うと

$$\beta_{o o r_1 \ell_1} = - \frac{\omega_o}{\omega} \left(\frac{-i \lambda_{o r_1}^{(2)}}{\omega_o} \right) \frac{1}{\sqrt{3} \lambda^2} \delta_{2 \ell_1} + O \left(\frac{1}{\lambda^3} \right),$$

$$\beta_{r_{i-1} \ell_{i-1} r_i \ell_i} = \frac{\omega_o}{\omega} \left(\frac{-i \lambda_{r_{i-1} r_i}^{(2)}}{\omega_o} \right) \delta_{\ell_{i-1} \ell_i} + O \left(\frac{1}{\lambda} \right), \quad (4.27)$$

$$\alpha_{r_n \ell_n} = \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^2 \frac{2}{\sqrt{3}} \delta_{o r_n} \delta_{2 \ell_n} + O \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

これらを (4.25) に代入すると,

$$\begin{aligned} K_n = & - \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^{n+2} \left(\frac{-i}{\omega_o} \right)^n \frac{2}{3 \lambda^2} r_1 \ell_1 \sum \dots r_n \ell_n \lambda_{o r_1}^{(\ell_1)} \lambda_{r_1 r_2}^{(\ell_2)} \dots \lambda_{r_{n-1} r_n}^{(\ell_n)} \delta_{o r n} \\ & \times \delta_{2 \ell_1} \delta_{\ell_1 \ell_2} \dots \delta_{\ell_{n-1} \ell_n} \delta_{\ell_n 2}. \end{aligned}$$

$$\text{従って } K_n = -\frac{2}{3\lambda^2} \left(\frac{-i}{\omega_o}\right)^n \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^{n+2} \left[\lambda^{(2)n}\right]_{oo}, \quad (4.28)$$

$$\text{ここに } \left[\lambda^{(2)n}\right]_{oo} = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}=0}^{\infty} \lambda_{o r_1}^{(2)} \lambda_{r_1 r_2}^{(2)} \dots \lambda_{r_{n-1} o}^{(2)}. \quad (4.29)$$

(4.28)を(4.26)に代入し(4.26) $\times \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2$ から

$$\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 = -2\lambda^2 I_{oo} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^n \left(\frac{-i}{\omega_o}\right)^n \left[\lambda^{(2)n}\right]_{oo} \frac{2}{3\lambda^2}$$

(4.23)を用いて

$$\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 = 1 + 3\left(\frac{\ell}{\ell_D}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\ell}{\ell_D}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-i}{\omega_o}\right)^n \left[\lambda^{(2)n}\right]_{oo} \quad (4.30)$$

$\lambda_{pq}^{(2)}$ の値は I で計算されており

$$n_o \bar{K} = \left(\frac{e^2}{\kappa T_o}\right)^2 \left(\frac{\pi \kappa T_o}{m}\right)^{1/2} \ell_n \left(\frac{\kappa T_o \ell_D}{e^2}\right) n_o \quad (4.31)$$

を単位にして係数だけの表が与えられている。この係数 matrix を B_{pq} と書くことにする。

この数値を用いて次に $\left[\lambda^{(2)n}\right]_{oo}$ を計算する。matrix B の固有値問題が解けていると

$$L B L^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_o & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

を満たす直交変換 L と固有値 λ_i が存在する。

その時

$$L B^n L^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_o^n & & & \\ & \lambda_1^n & & \\ & & \lambda_2^n & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

となり

$$B_{oo}^n = \sum_{i=0}^{\infty} L_{io}^2 \lambda_i^n = \frac{[\lambda^{(2)n}]_{oo}}{(n_o \bar{K})^n} \quad (4.32)$$

と書ける。ところがBは無次元なので、有限次元で cutして固有値問題を解かねばならぬ。Bを6, 7, 8, 9, 10次元で cutした場合の固有値と固有 vector とを用いて(4.32)を計算すると次表のようになる。

次元 →	6	7	8	9	10
$\sum L_{io}^2 \lambda_i^2$	3.0592	3.0593	3.0593	3.0594	3.0594
$\sum L_{io}^3 \lambda_i^3$	7.4058	7.4155	7.4182	7.4186	7.4189
$\sum L_{io}^4 \lambda_i^4$	24.533	24.884	25.042	25.106	25.137
$\sum L_{io}^5 \lambda_i^5$	114.72	122.75	127.57	130.30	131.85

従って

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{oo}^{(2)} &= 1.6 n_o \bar{K} \\ [\lambda^{(2)2}]_{oo} &= 3.0595 (n_o \bar{K})^2 \quad (2.56) \\ [\lambda^{(2)3}]_{oo} &= 7.42 (n_o \bar{K})^3 \quad (4.096) \\ [\lambda^{(2)4}]_{oo} &= 25.2 (n_o \bar{K})^4 \quad (6.56) \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

となる。()内の数値については次の section で言及する。

§5 Discussion of the Dispersion Relation

前節の結果、電子-電子衝突の影響は $\ell=2$ の mode のみであることが判った。一般にイオン-電子衝突を考慮しても $O(k^2)$ まで考える限り、 $\ell>2$ の mode は現れない。

Johnston は全然説明なしに $\ell>2$ を始めから考えないで conductivity tensor を計算しているが、我々の結果からすると Johnston の扱いは結果的に正しかった事が判る。

分散式の意味を簡単に調べよう。collision frequencyの一次近採用して(4.24)から

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{2} \omega_0 \left(\frac{k}{k_D} \right)^2 - i \frac{2}{3} \lambda_{00}^{(2)} \left(\frac{k}{k_D} \right)^2 \quad (5.1)$$

$\lambda_{00}^{(2)}$ は縦、横の温度が異なるいわゆる楕円分布：

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) \propto \exp \left[-\frac{v_{\parallel}^2}{2\kappa T_{\parallel}} - \frac{v_{\perp}^2}{2\kappa T_{\perp}} \right]$$

の maxwellization rate, 又は両温度間の rate of relaxation

$$\frac{d}{dt} (T_{\perp} - T_{\parallel}) = -\lambda_{00}^{(2)} (T_{\perp} - T_{\parallel})$$

を与える。(5.1)は又

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -i\omega_0 n + i \frac{3}{2} \frac{\kappa T_0}{m} \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \frac{2}{3} \frac{\lambda_{00}^{(2)}}{k_D^2} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \quad (5.2)$$

なる方程式からも導かれる。右辺第1項は plasma oscillation 第2項は分散項を与え

る。もし第1、2両項がなければ(5.2)は拡散係数 $\frac{2}{3} \frac{\lambda_{00}^{(2)}}{k_D^2}$ なる拡散方程式になる。従

って我々の扱っている振動は number densityの変動によって生ずる charge を消す振動 (ω_0) と共に、その時生ずる縦、横の温度差を消す様に拡散していることが判る。又

collisionに比して影響は小さいが、potential troughに trapされた粒子と共鳴的に作用して波は減衰する。(Landau damping)

我々の結果と比較し得る他の結果は、Bhatnager, Gross and Krook⁷⁾(B-G-K)のもののみである。その他のものは collision invariance を考慮していないからである。B-G-Kは single collision frequency model から出発し

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_D} \right)^2 \frac{1}{\omega_0^2 + \lambda^2} \left[\left(3\omega_0^2 + \frac{5}{3} \lambda^2 \right) - i \frac{4}{3} \omega_0 \lambda \right] \quad (5.3)$$

なる dispersion relation を与えている。

彼等はどんな mode の分布も皆同一緩和時間を持つと仮定している。そのために計算は

exact に出来る。我々の扱いは各 mode の緩和時間を正確に考慮しているが、 $\frac{\lambda}{\omega_0}$ が小さい場合にしか成り立たない。我々の結果で

$$\lambda_{p,q}^{(2)} = \lambda \quad \text{for all } p, q$$

とすると当然のことながら、(4・30)と(5・3)は一致する。次に single relaxation constant theory がどの程度の近似になっているかを見るために(4・33)において

$$\lambda_{oo}^{(2)} = 1 \cdot 6 n_o \bar{K} = \lambda$$

としたときの λ^n の値が()内に示されている。 λ^n と $[\lambda^n]_{oo}$ との差は exponent n が大きくなるにつれて非常に大きくなる。従ってB-G-Kの model は collision frequency の高い次数まで考える場合は余り良くないことが判る。(4・30)で

$$\omega = \omega_r - i\omega_i, \quad \left| \frac{\omega_i}{\omega_r} \right| \ll 1$$

とおくと

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 = 1 + 3 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2 \left[1 - \frac{4}{9} \left[\frac{\lambda^{(2)}}{\omega_0} \right]_{oo} + \frac{4}{9} \left[\frac{\lambda^{(2)}}{\omega_0} \right]_{oo}^2 \dots \right]$$

(5・4)

$$\omega_i = \frac{2}{3} \omega_0 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2 \left[\frac{\lambda^{(2)}}{\omega_0} - \left[\frac{\lambda^{(2)}}{\omega_0} \right]_{oo} + \dots \right], \quad (5.5)$$

この様に collision frequency は ω_r には偶数巾で、 ω_i には奇数巾で入って来る。

良く用いられる plasma parameter g は Debye length を半径として持つ球中の粒子数の逆数で定義され、通常非常に小さい値を持つ。

$$g = \left(\frac{e^2}{\kappa T_D} \right)^{3/2} n_o^{-1/2} \ll 1 \quad (5.6)$$

collision integral (collision frequency) λ_{pg} の計算において impact parameter が大きい所で発散する。それを防ぐために impact parameter = Debye length の所で cut off する。その際

$$\ell n \left(\frac{1}{g} \right) \gg 1 \quad (5.7)$$

なることを用いて, λ_{pg} は一般に

$$\lambda_{pg} = A_{pg} \omega_0 g \ell n g, \quad (5.8)$$

A_{pg} = 数係数

と書ける。従って分散式に collision の効果は

$$\left(\frac{\lambda}{\omega_0} \right)^n = L_n (g \ell n g)^n, \quad (5.9)$$

L_n = 数係数

の形で入って来る。

以上は Boltzmann-Vlasov eg を基礎方程式とした議論であるが, plasma の基礎方程式として最近, 多体相関を考慮した kinetic eg を作る研究が成されている³⁾ Ichikawa⁴⁾, Willis⁵⁾ らは此の方法で plasma oscillation を扱っている。彼等は 3 体分布函数を 2 体と 1 体との積で近似することにより, 階級方程式を close させている。

Willis は $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ に対する寄与を波数 $\vec{k}$ に independent な項(A)と dependent な項(B)とに分けている。

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = (A), \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + i \vec{k} \cdot \vec{v} f_1 + (S.C.F.) = (B), \quad (5.11)$$

ここに f_1 は 1 体分布函数の平衡からのはずれを意味する。(S.C.F.) は self consistent field に関係した項である。ion は positive charge back ground としてのみ作用している。(5.10) は collision term に対応して

Fokker-Planck type に書かれる。その係数は 2 体 correlation 効果のために発散なしに求まる。我々は

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + i \vec{k} \cdot \vec{v} f_1 + (\text{S.C.F.}) = (\mathbf{A}) \quad (5.12)$$

を解いたことになる。Willis は (5.11) を基礎方程式として

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_o}\right)^2 = 1 + 3 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2 \left[1 + 9 \cdot 2 g \right], \quad (5.13)$$

(1.05)

$$\omega_i = 1.76 \omega_o g \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2 \quad (5.14)$$

(0.03)

を導いている。() 内の数値は Ichikawa の結果である。我々の結果からすると

$\left(\frac{\omega_r}{\omega_o}\right)^2$ の dispersive term の g の order の項は出ない。従って此の項は 2 体相関

に特有の項である。多体相関効果を詳しく調べることは、今後の大きな課題の一つであろう。

§ 6 Integrated Moment Equation

今迄は Boltzmann-Vlasov eg を (4.7) のように変形してから moment を求めたが、此の section では普通やられるように、そのままの形で moment を採り方程式系を導く。それらを integrated moment eg と名づける。これらの方程式系を用いて現存する理論と、我々の前節迄の結果について簡単に調べる。

(4.3) を Fourier 変換して (4.6) を用いると

$$\frac{\partial \phi_{\hbar}}{\partial t} + i \hbar \omega_o \phi_{\hbar} + \sqrt{2} \alpha \omega_o \frac{i \hbar_D}{\hbar} v_z a_{oo}^{\hbar} = -n_o J \phi_{\hbar}.$$

展開 (2.8) を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{ij} a_{ij}^{\hbar} \Psi_{ij} + i \hbar \sum_{ij} a_{ij}^{\hbar} v_z \Psi_{ij} + \sqrt{2} \alpha \omega_o \frac{i \hbar_D}{\hbar} v_z a_{oo}^{\hbar} \\ = - \sum_{js} \lambda_{js}^{(j)} a_{js}^{\hbar} \Psi_{sj}. \end{aligned}$$

この両辺に $d\vec{v} f^{(0)} \Psi_{re}$ を operate すると

$$\begin{aligned} \dot{a}_{re}^{\hbar} + \frac{i\hbar}{\alpha} \sum_{ij} a_{ij}^{\hbar} (\Psi_{re}, \xi_z \Psi_{ij}) + \sqrt{2} \frac{i\hbar_D}{\hbar} (\Psi_{re}, \xi_z) a_{oo}^{\hbar} \\ = -\sum_i \lambda_{ri}^{(0)} a_{ie}^{\hbar} . \end{aligned}$$

漸化式 (B・6) を用いて第2項を変形すると

$$\begin{aligned} \dot{a}_{re}^{\hbar} + \frac{i\hbar}{\alpha} [A_{re} a_{re+1}^{\hbar} - B_{re} a_{r-1, e+1}^{\hbar} + C_{re} a_{r, e-1}^{\hbar} - D_{re} a_{r+1, e-1}^{\hbar}] \\ + i\omega_0 \frac{\hbar_D}{\hbar} a_{oo}^{\hbar} \delta_{or} \delta_{1e} = -\sum_i \lambda_{ri}^{(0)} a_{ie}^{\hbar} \quad (6.1) \end{aligned}$$

を得る。ここで係数 $A_{re}, B_{re}, \dots$ 等の数値は (B. 7) で支えられるものである。

(6.1) の最初の3つは

(r, e)

$$(0, 0): \dot{a}_{oo}^{\hbar} + i\omega_0 \frac{\hbar}{\hbar_D} a_{o1}^{\hbar} = 0 ,$$

$$\begin{aligned} (0, 1): \dot{a}_{o1}^{\hbar} + i\omega_0 \frac{\hbar}{\hbar_D} [a_{oo}^{\hbar} - \sqrt{\frac{2}{3}} a_{1o}^{\hbar} + \frac{2}{\sqrt{3}} a_{o2}^{\hbar}] \\ + i\omega_0 \frac{\hbar_D}{\hbar} a_{oo}^{\hbar} = 0 , \end{aligned}$$

$$(1, 0): \dot{a}_{1o}^{\hbar} + i\omega_0 \frac{\hbar}{\hbar_D} [\sqrt{\frac{5}{3}} a_{11}^{\hbar} - \sqrt{\frac{2}{3}} a_{o1}^{\hbar}] = 0 .$$

これらに (2.19) を代入すると linearize された連続の式, 運動方程式, energy の式が得られる。(6.1) の係数を表にすると次のようになる。

	a_{00}	a_{01}	a_{10}	a_{02}	a_{12}	a_{22}
a_{00}	ω	$-\omega_0 x$	0	0	0	0
a_{01}	$-\frac{\omega_0}{x}(1+x^2)$	ω	$\omega_0 \frac{\sqrt{6}}{3} x$	$-\omega_0 \frac{\sqrt{12}}{3} x$	0	0
a_{10}	0	$\omega_0 \frac{\sqrt{6}}{3} x$	ω	0	0	0
a_{02}	0	$-\omega_0 \frac{\sqrt{12}}{3} x$	0	$\omega + A_{00}$	A_{01}	A_{02}
a_{12}	0	0	0	A_{10}	$\omega + A_{11}$	A_{12}
a_{22}	0	0	0	A_{20}	A_{21}	$\omega + A_{22}$

$$x = \frac{\hbar}{\hbar_D}, \quad A_{ij} = i \lambda_{ij}^{(2)}.$$

これを適当な次元で truncate することにより種々の dispersion relation を得ることが出来る。Matrixの配列の仕方は $2r + \ell$ の値が増すようになっている。

(polynomial ordering) $2r + \ell$ は各 moment の次数 ($v^{2r+\ell}$) を意味する。

Thomson⁽¹¹⁾ は isothermal case ($a_{10} = 0$) を Maxwell の transfer eq. を用いて扱っている。その後 Bailey⁽¹²⁾ は eq. of continuity, momentum, Poisson's eq. を用いて

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\kappa T_0}{m} \hbar^2 \quad (6.2)$$

を与えている。この結果は上の matrix で2次元まで採ると得られる。3次元迄採ると

Moment Method for Wave Phenomena in a Plasma

$$\omega^2 = \omega_o^2 + \frac{5}{3} \frac{\kappa T_o}{m} k^2 \quad (6.3)$$

となり,これは断熱変化の式を用いた場合と同じ結果を与える。この場合は Gross¹³⁾によって扱われている。3次元まで考慮することは, a_{00}, a_{01}, a_{10} の3つの moment のみが存在する場合を考慮していることになる。これらの moment は collision invariance のために collision dampingをしない。他の mode は exciteされたとしても high density の場合すぐ damp してう。従って最初の3つの moment のみ考慮することは, high density case を考えていることになる。係数 $\frac{5}{3}$ について以上のように解釈されるのである。

次は stress も考慮して, 4次元迄採ると

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 3 \frac{\kappa T_o}{m} k^2 \quad (6.4)$$

となり, 前々節で得られたものと一致する。これは low density の場合 exact な結果になっている。表には書いてないが, $a_{11}, a_{03}, \dots$ 等を考えて 5, 6, $\dots$ 次元迄採っても $O(k^2)$ までは (6.4) が成り立つ, 但し 4次元以上は collision は考えない場合についてである。今 $2r + \ell$, 即ち各 moment が velocity の何次の moment になるかを示すものを書くと

$a_{r\ell}$	a_{00}	a_{01}	a_{10}	a_{02}	a_{11}	a_{03}
$2r + \ell$	0	1	2	2	3	3

のようになる。これから速度の2次の moment まで採れば $O(k^2)$ までは exact に与えられと云える。又は3次以上の moment は $O(k^2)$ までに寄与しないと云える。従って ω^2 の k^2 の項まで求めるために $\ell = 2$ 以下の mode のみを考慮した Johnston の扱いは正しいことが判る。

integrated moment method で collision が存在する場合を扱い, §4 で得た結果と比較する。基礎方程式は $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}$ に対する4つで良い筈であるが, (6.1) を用いて a_{02} に関する式を書くと

$$\dot{a}_{02}^{\hbar} + i\omega_0 \frac{\hbar}{\hbar_D} a_{01}^{\hbar} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{on}^{(2)} a_{n2}^{\hbar} \quad (6.5)$$

となり、無限に多くの moment が関与してくる。このために a_{n2} に対する方程式も考慮しなければならない。最初第1近似として、(6.5)の右辺で $n=0$ のみを考えることにすると、表に於いて4次元迄採ったことになる。その場合 dispersion relation は

$$(\omega + i\lambda_{00}^{(2)}) \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{5}{3} \omega_0^2 \frac{\hbar^2}{\hbar_D^2} \right) - \omega \omega_0^2 \frac{4}{3} \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2 = 0$$

となる。これから

$$\lambda_{00}^{(2)} \gg |\omega| \quad \dots\dots \text{high density}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{5}{3} \omega_0^2 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2.$$

$$\lambda_{00}^{(2)} \ll \omega \quad \dots\dots \text{low density}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3\omega_0^2 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2$$

となる。もっと一般的に解くと

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 + 3\omega_0^2 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2,$$

$$\omega_i = \frac{2}{3} \lambda_{00}^{(2)} \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2$$

となり、(4.24)と同じ結果になる。

第2近似(6.5)で $n=0, 1$ を採用する。

表で5次元まで採ることになる。前と同様にして

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 + 3 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\hbar}{\hbar_D} \right)^2 \sum_{n=1}^2 \left(\frac{-i}{\omega_0} \right)^n [\lambda^{(2)n}]'_{00} \quad (6.6)$$

ここに

$$[\lambda^{(2)2}]'_{oo} = \sum_{i=0}^1 \lambda^{(2)2}_{oi}, \quad [\lambda^{(2)1}]'_{oo} = \lambda^{(2)}_{oo}. \quad (6.7)$$

同様に第3近似を求めると, (6.6) の summation が $\sum_{n=1}^3$ となり

$$[\lambda^{(2)3}]'_{oo} = \sum_{i,j=0}^2 \lambda^{(2)}_{oi} \lambda^{(2)}_{ij} \lambda^{(2)}_{jo}$$

となるだけで他は同じである。一般に第 r 近似をすると

$$\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2 = 1 + 3 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2 \sum_{n=1}^r \left(\frac{-i}{\omega_o}\right)^n [\lambda^{(2)n}]'_{oo}, \quad (6.8)$$

$$[\lambda^{(2)n}]'_{oo} = \sum_{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}=0}^{r-1} \lambda^{(2)}_{os_1} \lambda^{(2)}_{s_1 s_2} \dots \lambda^{(2)}_{s_{n-1} o} \quad (6.9)$$

となる。(6.8) と (4.30) は等しい形である。しかし (6.9) は (4.29) と少し異なる。しかしながら $r \rightarrow \infty$ の時, §4 の結果と本節の結果は一致する。此の様に我々が考えている振動に關与する moment は

$$\alpha_{oo}, \alpha_{o1}, \alpha_{10}, \alpha_{i2}, i=0, 1, 2, \dots$$

であることが判る。

§7. Moment Wave

(4.8) により種々の moment の間の關係が与えられる。特に collision を考えない場合には

$$\alpha_{re}^{\hbar} = \alpha_{re} \alpha_{oo}^{\hbar} \quad (7.1)$$

となり全ての mode は number density の fluctuation で表わせることが判る。実際に α_{re} の値を用い [See Appendix A] 長波長極限 ($\hbar=0$) で各 moment と number density fluctuation とがどのように關係しているかを見る。

(2.19), (7.1), dispersion relation α_{re} の値を用いて

$$E = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t),$$

$$\tilde{n}^{\hbar} = \alpha_{oo}^{\hbar} E,$$

$$\tilde{u}_z^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_D}{k} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{k}{k_D} \right)^2 \right] e^{-i \frac{\gamma_L}{\omega_0}} a_{00}^k E,$$

$$\tilde{T}^k = \frac{2}{3} \left[1 + 3 \left(\frac{k}{k_D} \right)^2 \right] e^{-i \frac{\gamma_L}{\omega_0} \left(\frac{k_D}{k} \right)^2} a_{00}^k E,$$

$$\tilde{S}_{zz}^k = \frac{4}{3} \left[1 + 3 \left(\frac{k}{k_D} \right)^2 \right] e^{-i \frac{\gamma_L}{\omega_0} \left(\frac{k_D}{k} \right)^2} a_{00}^k E,$$

$$\tilde{g}_z^k = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{k}{k_D} e^{i \frac{\gamma_L}{\omega_0} \left(\frac{k_D}{k} \right)^2} a_{00}^k E,$$

を得る。各 mode は Landau damping のために number density fluctuation と少し phase がずれることが判る。 a_{re} の real part が各 moment wave と number density fluctuation との振巾の比を与える。 $\tilde{u}_z^k$ の $k \rightarrow 0$ での発散は次のように解釈出来る。波長が長い極限で波の方向 (z 方向) に $\tilde{u}_z^k$ だけ fluctuate したとしても density は無限小しか変化しない。 $\tilde{g}_z^k$ は $\tilde{u}_z^k$ に乗った系で定義されたものであるから発散は差し引かれている。

上で得られた expression は § 6 で導かれた integrated moment $e g_z$ を満たしている。

Collision を考慮する場合は, collision process による phase shift が在る計算が複雑で, 特に興味有る結果も得られないので省略する。

§ 8 Effect of Ion - Electron Collision

今迄イオンは唯 charge neutrality を保つ作用しか持たなかった。しかし collision process の plasma frequency に及ぼす影響を考える時は, 電子-電子衝突のみでなく, イオン-電子衝突も考慮しなければならない。

Moment Method for Wave Phenomena in a Plasma

$$\frac{4\pi n_0 e^2}{m} \gg \frac{4\pi n_0 e^2}{M}, \quad (8.1)$$

M : ion mass.

従ってイオンの運動は考えなくても良い。すなわち

$$\frac{m}{M} = 0 \quad (8.2)$$

と採れる。このために collision operator (3.7) は

$$J_{e-i} \phi(\vec{v}_1) = \int [\phi(\vec{v}_1) - \phi(\vec{v}_1')] v_1 I(v_1, \chi) d\Omega \quad (8.3)$$

に reduce する。collision term (3.8) は

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{coll} = - \sum_{n,m,\ell} (\lambda_{nm}^{(\ell)} + A_{nm}^{(\ell)}) a_{ne} \Psi_{m\ell}. \quad (8.4)$$

ここに

$$\begin{aligned} \lambda_{nm}^{(\ell)} &= n_0 (\Psi_{n\ell}, J \Psi_{m\ell}), \\ A_{nm}^{(\ell)} &= n_0 (\Psi_{ne}, J_{e-i} \Psi_{m\ell}). \end{aligned} \quad (8.5)$$

§4 と同様にして collision frequency の一次まで考えると, dispersion relation は

$$1 = \alpha_{00} + \sum_{re} \widetilde{\beta_{00ve}} \alpha_{re} \quad (8.6)$$

となる。ここに

$$\widetilde{\beta_{00ve}} = -i \frac{\lambda}{\omega} \sum_s (\lambda_{rs}^{(\ell)} + A_{rs}^{(\ell)}) J_{se}. \quad (8.7)$$

(8.6) $\times \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$ から

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -2\lambda^2 I_{00} + i \frac{2\lambda^4}{\omega} \sum_{rse} (\lambda_{rs}^{(\ell)} + A_{rs}^{(\ell)}) J_{se} J_{re} \quad (8.8)$$

Σ' は $s=r=\ell=0$ を除くことを意味する。 $A_{rs}^{(\ell)}$ の計算は Appendix G で与えられる。

結果は

$$A_{rs}^{(\ell)} = \tilde{A}_{rs}^{(\ell)} / N_{re} N_{rs} \quad (8.9)$$

と書く時

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}_{rs}^{(0)} &= 0 & (\ell=0) \\ \sum_{s \neq r} s \tilde{A}_{rs}^{(\ell)} &= \sqrt{2} \bar{K}' \frac{\Gamma(\ell+2)}{2\ell+1} \frac{(1-s)^{-\frac{3}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{2}}}{(1-st)\ell} n_o, (\ell \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

ここに

$$\bar{K}' = \left(\frac{e_1 e_2}{\kappa T_o} \right)^2 \left(\frac{\pi \kappa T_o}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \ell n \left(\frac{\kappa T \ell_D}{e_1 e_2} \right). \quad (8.11)$$

電子-電子 collision invariance (4.18) に対応して我々の場合は

$$A_{rs}^{(0)} = 0. \quad (8.12)$$

(8.8) を evaluate する時, 前の (4.21) に対応して

$$(8.13)$$

となることに注意すると

$$J_{re} = \frac{1}{\sqrt{2} \lambda^2} \delta_{or} \delta_{1\ell} - \frac{1}{\sqrt{3} \lambda^3} \delta_{or} \delta_{2\ell} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right).$$

従って

$$\sum'_{rs \neq e} (\lambda_{rs}^{(\ell)} + A_{rs}^{(\ell)}) J_{re} J_{se} = -\frac{A_{oo}^{(1)}}{2 \lambda^4} + \frac{(\lambda_{oo}^{(2)} + A_{oo}^{(2)})}{3 \lambda^6} + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right),$$

これを (8. 8) に代入して

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{3}{2\lambda^2} - i\frac{1}{\omega} \left[A_{oo}^{(1)} - \frac{2}{3\lambda^2} (\lambda_{oo}^{(2)} + A_{oo}^{(2)}) \right]$$

従って

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + 3 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2 - \frac{iA_{oo}^{(1)}}{\omega_0} - \frac{4}{3} \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2 \left(\frac{i\lambda_{oo}^{(2)}}{\omega_0} + \frac{iA_{oo}^{(2)}}{\omega_0}\right). \quad (8. 14)$$

これから

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 &= 1 + 3 \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2, \\ \omega_i &= \frac{1}{2} A_{oo}^{(1)} + \frac{2}{3} \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2 (\lambda_{oo}^{(2)} + A_{oo}^{(2)}) \end{aligned} \quad (8. 15)$$

(8. 10) を用いて

$$A_{oo}^{(1)} = \frac{4\sqrt{2}}{3} n_o \bar{K}', \quad A_{oo}^{(2)} = \frac{8\sqrt{2}}{5} n_o \bar{K}'. \quad (8. 16)$$

又 I の Table から

$$\lambda_{oo}^{(2)} = \frac{8}{5} n_o \bar{K}. \quad (8. 17)$$

$$e_1 = e_2 \text{ とすると } \bar{K} = \bar{K}'.$$

(8. 16), (8. 17) を (8. 15) に代入すると

$$\omega_i = \frac{2\sqrt{2}}{3} n_o \bar{K} + \frac{16}{15} (1 + \sqrt{2}) n_o \bar{K} \left(\frac{\hbar}{\hbar_D}\right)^2. \quad (8. 18)$$

(8. 15) に於ける $\frac{1}{2} A_{oo}^{(1)}$ はイオン—電子衝突による momentum 変化のため生じた項である。従って電子—電子衝突の際には現われなかった項である。又 $\hbar^2$ の order の項はイオンの影響のために約 2 倍になる。

§ 5 と同じ議論によると, 波は進行方向の momentum をイオンとの collision で失いな

から damp すると同時に，進行方向とそれに垂直方向との温度差を消すような拡散をしながら振動していることが判る。

終りに，ご指導下さった木原先生，有益な討論をして下さった水野氏はじめ木原研究室の皆さんに深く感謝いたします。

Appendix A

(a) α_{re} と J_{re} との関係

定義：

$$\begin{aligned}\alpha_{re} &= -\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 2\lambda^2 \left(\frac{i\xi_z}{\lambda - i\xi_z}, \Psi_{re} \right) \\ &= \left(\frac{\hbar_D}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{i\xi_z}{\lambda - i\xi_z}, \Psi_{re} \right), \quad (A \cdot 1) \\ J_{re} &= \left(\frac{1}{\lambda - i\xi_z}, \Psi_{re} \right).\end{aligned}$$

α_{re} を変形すると

$$\begin{aligned}\alpha_{re} &= -\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 2\lambda^2 (\lambda J_{re} - \delta_{ro} \delta_{eo}) \\ &= \left(\frac{\hbar_D}{\hbar}\right)^2 (\lambda J_{re} - \delta_{or} \delta_{o\ell}). \quad (A \cdot 2)\end{aligned}$$

J_{re} を explicit に書くと

$$\begin{aligned}J_{re} &= \frac{1}{n_o} \int f^{(o)} \frac{\Psi_{re}}{\lambda - i\xi_z} d\vec{v} \equiv \frac{1}{N_{re}} \tilde{J}_{re}, \\ \tilde{J}_{re} &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int e^{-\xi^2} \frac{\varphi_{re}}{\lambda - i\xi_z} d\xi = \left(\frac{1}{\lambda - i\xi_z}, \varphi_{re} \right). \quad (A \cdot 3)\end{aligned}$$

特に $r = \ell = 0$ の時, $N_{00} = 1$ から

$$\tilde{J}_{00} = J_{00}.$$

(A・3) の積分で principal part と pole での寄与を考えて ($\lambda \rightarrow \infty$) $\lambda \rightarrow 0$ の漸近形を求めると

$$J_{00}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{3}{4\lambda^4} - \frac{15}{8\lambda^6} + \dots \right] \sqrt{\pi} e^{\lambda^2}. \quad (\text{A} \cdot 4)$$

(b) $\tilde{J}_{re}$ の母函数

Sonine の多項式の母函数:

$$(1-s)^{-(\ell + \frac{3}{2})} \exp(-s\xi^2) = \sum_{r=0}^{\infty} s^r \frac{S^{(r)}_{\ell + \frac{1}{2}}(\xi^2)}{\ell + \frac{1}{2}}, \quad (\text{A} \cdot 5)$$

$$s = \frac{\Delta}{1-\Delta}.$$

を用いて $\tilde{J}_{re}$ に対する母函数を求めると。

(b・1) $\ell = 0$

$P_0 = 1$ なので (2・3) から

$$\varphi_{r0} = S_{\frac{1}{2}}^{(r)}(\xi^2).$$

従って (A・5) により

$$\sum_{r=0}^{\infty} s^r \varphi_{r0} = (1-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-s\xi^2}.$$

これと (A・3) とから

$$\sum_r s^r \tilde{J}_{r0} = (1-s)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\lambda - i\xi_z}, e^{-s\xi^2} \right).$$

$$\left(\frac{1}{\lambda - i\xi_z}, e^{-s\xi^2} \right) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int \frac{e^{-(1+s)\xi^2}}{\lambda - i\xi_z} d\vec{\xi} = \frac{1}{1+s} J_{00}(\lambda')$$

$$\lambda' = \sqrt{1+s} \lambda.$$

従って

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \mathfrak{Y}_{r0} = (1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} J_{00} \left((1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \lambda \right). \quad (\text{A} \cdot 6)$$

(b・2) $\ell=1$

上と同様にして

$$\sum_r \lambda^r \varphi_{r1} = (1-\lambda)^{-\frac{5}{2}} e^{-s\xi_z^2} \xi_z.$$

$$\left(\frac{\lambda \xi_z}{\lambda - \lambda \xi_z}, e^{-s\xi_z^2} \right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda - \lambda \xi_z}, e^{-s\xi_z^2} \right) - (1, e^{-s\xi_z^2}).$$

$$(1, e^{-s\xi_z^2}) = (1+S)^{-\frac{3}{2}} = (1-\lambda)^{\frac{3}{2}}.$$

従って

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \mathfrak{Y}_{r1} = \frac{\lambda}{1-\lambda} - \lambda (1-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \lambda J_{00} \left((1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \lambda \right). \quad (\text{A} \cdot 7)$$

(b・3) $\ell=2$

$$\sum_r \lambda^r \varphi_{r2} = (1-\lambda)^{-\frac{7}{2}} \left(\frac{3}{2} \xi_z^2 - \frac{\xi_z^2}{2} \right) e^{-s\xi_z^2}. \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$$\frac{\xi_z^2}{\lambda - \lambda \xi_z} = -\lambda^2 \frac{1}{\lambda - \lambda \xi_z} + \lambda + \lambda \xi_z.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_z^2}{\lambda - \lambda \xi_z}, e^{-s\xi_z^2} \right) &= -\lambda^2 (1-\lambda) J_{00} \left((1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \lambda \right) \\ &\quad + \lambda (1-\lambda)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi^2}{\lambda - i\xi_z}, e^{-s\xi^2} \right) &= -\frac{d}{dS} \left(\frac{1}{\lambda - i\xi_z}, e^{-s\xi^2} \right) \\ &= -\frac{d}{dS} \left[\frac{J_{00} \sqrt{1+S} \lambda}{1+S} \right]. \end{aligned}$$

一方簡単な計算から

$$\frac{d J_{00}(\lambda)}{d\lambda} = 2 [\lambda J_{00}(\lambda) - 1]$$

が示される。これを用いると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi^2}{\lambda - i\xi_z}, e^{-s\xi^2} \right) &= \frac{1 - (1+S)^2 \lambda^2}{(1+S)^2} J_{00}(\sqrt{1+S} \lambda) + \frac{\lambda}{(1+S)^{\frac{3}{2}}} \\ &= [(1-\Delta)^2 - \lambda(1-\Delta)] J_{00}((1-\Delta)^{\frac{1}{2}} \lambda) + (1-\Delta)^{\frac{3}{2}} \lambda \quad (\text{A} \cdot 10) \end{aligned}$$

(A・8), (A・9), (A・10)を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \Delta^r \tilde{J}_{r2} &= (1-\Delta)^{-2} \lambda - \left[(1-\Delta)^{\frac{5}{2}} \lambda^2 + \frac{(1-\Delta)^{\frac{3}{2}}}{2} \right] J_{00}((1-\Delta)^{\frac{1}{2}} \lambda) \\ &\quad (\text{A} \cdot 11) \end{aligned}$$

(b・4) ま と め

(A・4)の exponential term は Landau-dampingを与える。以下この項を考慮しないで上で得た結果をまとめる。それを付け加えることは容易である。

(A・4)を用いて(A・6), (A・7), (A・7), (A・11)を書くと

$$\sum_{r=0}^{\infty} \Delta^r \tilde{J}_{r0} = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{1-\Delta}{2\lambda^2} + \frac{3(1-\Delta)^2}{4\lambda^4} \dots \right], \quad (\text{A} \cdot 12)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \Delta^r \tilde{J}_{r1} = \frac{i}{2\lambda^2} \left[1 - \frac{3(1-\Delta)}{2\lambda^2} + \frac{15(1-\Delta)^2}{4\lambda^4} \dots \right], \quad (\text{A} \cdot 13)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \tilde{J}_{r2} = -\frac{1}{2\lambda^3} \left[1 - \frac{6(1-\lambda)}{2\lambda^2} + \dots \right] \quad (\text{A} \cdot 14)$$

を得る。もっと compact にまとめると

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \tilde{J}_{r0} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{(1-\lambda)^n}{\lambda^{2n}}, \quad (\text{A} \cdot 15)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \tilde{J}_{r1} = \frac{i}{2\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n + \frac{3}{2}) \frac{(1-\lambda)^n}{\lambda^{2n}}, \quad (\text{A} \cdot 16)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r \tilde{J}_{r2} = -\frac{1}{2\lambda^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{\pi}} (n+1) \Gamma(n + \frac{3}{2}) \frac{(1-\lambda)^n}{\lambda^{2n}} \quad (\text{A} \cdot 17)$$

(c) I_{re}

$$\text{定義: } I_{re} = \left(\frac{i \xi_z}{\lambda - i \xi_z}, \Psi_{re} \right).$$

$$\text{変形すると } I_{re} = \lambda J_{re} - \delta_{or} \delta_{oe}.$$

$$I_{re} \equiv \tilde{I}_{re} / N_{re},$$

とすると

$$\tilde{I}_{re} = \lambda \tilde{J}_{re} - \delta_{or} \delta_{oe}.$$

特に

$$I_{oo} = \tilde{I}_{oo} = \lambda \tilde{J}_{oo} - 1.$$

(A・15)を用いて

$$I_{oo} = -\frac{1}{2\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n + \frac{3}{2}) \frac{1}{\lambda^{2n}}, \quad (\text{A} \cdot 18)$$

又は, (A・12)を用いて

$$I_{oo} = -\frac{1}{2\lambda^2} \left[1 - \frac{3}{2\lambda^2} + \frac{15}{4\lambda^4} - \dots \right], \quad (\text{A} \cdot 19)$$

Appendix B.

Derivation of a Recurrence Formula

定義:

$$\alpha^2 = \frac{m}{2 \kappa T_0}, \quad \xi = \alpha v,$$

$$\varphi_{r\ell} = \xi^\ell P_\ell(z) S_{\ell+\frac{1}{2}}^{(r)}(\xi^2), \quad (\text{B.1})$$

$$z = \xi / \xi.$$

公式:

$$(2\ell+1)zP_\ell = (\ell+1)P_{\ell+1} + \ell P_{\ell-1}, \quad (\text{B.2})$$

$$S_{\ell+\frac{1}{2}}^{(r)} = S_{(\ell+1)+\frac{1}{2}}^{(r)} - S_{(\ell+1)+\frac{1}{2}}^{(r-1)}. \quad (\text{B.3})$$

$$\xi^2 S_m^{(n)} = (n+m) S_{m-1}^{(n)} - (n+1) S_{m-1}^{(n+1)}. \quad (\text{B.4})$$

(B.1)を用いて

$$\xi z \varphi_{r\ell} = \xi^{\ell+1} z P_\ell S_{\ell+\frac{1}{2}}^{(r)}.$$

(B.2)を用いると

$$\begin{aligned} (2\ell+1)\xi z \varphi_{r\ell} &= \xi^{\ell+1} \{ (\ell+1)P_{\ell+1} + \ell P_{\ell-1} \} S_{\ell+\frac{1}{2}}^{(r)} \\ &= (\ell+1)\xi^{\ell+1} P_{\ell+1} S_{\ell+\frac{1}{2}}^{(r)} + \ell \xi^{\ell-1} P_{\ell-1} \xi^2 S_{\ell+\frac{1}{2}}^{(r)} \end{aligned}$$

(B.3), (B.4)を用いて(B.1)を考えると

$$\begin{aligned} (2\ell+1)\xi z \varphi_{r\ell} &= (\ell+1) [\varphi_{r,\ell+1} - \varphi_{r-1,\ell+1}] \\ &\quad + \ell [(\ell+r+\frac{1}{2})\varphi_{r,\ell-1} - (r+1)\varphi_{r+1,\ell-1}] \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

$\Psi_{re} = \varphi_{re} / N_{re}$ を考慮して (B.5) を書き換え, normalization constant N_{re} の定義 (2.5) を用いて整理すると求める漸化式を得る。

$$\xi_z \Psi_{re} = A_{re} \Psi_{r, \ell+1} - B_{re} \Psi_{r-1, \ell+1} + C_{re} \Psi_{r, \ell-1} - D_{re} \Psi_{r+1, \ell-1} \quad (\text{B.6})$$

ここに

$$A_{re} = (\ell+1) \sqrt{\frac{\ell+r+\frac{3}{2}}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}, \quad B_{re} = (\ell+1) \sqrt{\frac{r}{(2\ell+1)(2\ell+3)}} \quad (\text{B.7})$$

$$C_{re} = \ell \sqrt{\frac{\ell+r+\frac{1}{2}}{(2\ell-1)(2\ell+1)}}, \quad D_{re} = \ell \sqrt{\frac{r+1}{(2\ell-1)(2\ell+1)}}$$

これら係数の間に

$$A_{re} = C_{r, \ell+1}, \quad B_{r+1, \ell} = D_{r, \ell+1} \quad (\text{B.8})$$

が成り立つ。

Appendix C

Evaluation of $(\varphi_{pe}, J_{e-i\varphi_{ge}})$

電子-イオン collision operator の定義 (8.3) と Sonine の多項式の母函数 (A.5), φ_{pe} の定義 (B.1) を用いて

$$\sum_{g=0}^{\infty} \Delta^g J_{e-i\varphi_{ge}} = (1-\Delta)^{-(\ell+\frac{3}{2})} \int [\xi^\ell P_\ell e^{-s\xi^2} - \xi'^\ell P'_\ell e^{-s\xi'^2}] \times v I(v, \chi) d\Omega, \quad (\text{C.1})$$

$m/M = 0$ から

$$\xi = \xi'.$$

これを用いると (C.1) は

$$\sum_{g=0}^{\infty} \Delta^g J_{e-i} \varphi_{g\ell} = (1-\Delta)^{-(\ell+\frac{3}{2})} e^{-s\xi^2} \xi^\ell A_\ell, \quad (C.2)$$

$$A_\ell = \iint [P_\ell(\cos\theta) - P_\ell(\cos\theta')] v I(v, \chi) \sin\chi d\chi d\varepsilon. \quad (C.3)$$

ここに $\cos\theta = \xi_z / \xi$

左図から

$$\cos\theta' = \cos\theta \cos\chi + \sin\theta \sin\chi \cos\varepsilon.$$

$v I(v, \chi)$ は ε に無関係なので

$$\int P_\ell(\cos\theta') d\varepsilon = 2\pi P_\ell(\cos\theta) P_\ell(\cos\chi),$$

となることを用いて

$$A_\ell = 2\pi P_\ell(\cos\theta) \int [1 - P_\ell(\cos\chi)] v I(v, \chi) \sin\chi d\chi. \quad (C.4)$$

$1 - P_\ell(\cos\chi)$ を $(1 - \cos\chi)$ の巾展開して $(1 - \cos\chi)$ の一次の項まで残すと

$$1 - P_\ell(\cos\chi) = (1 - \cos\chi) \frac{\ell(\ell+1)}{2} \quad (C.5)$$

cross section は

$$v I(v, \chi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}{\kappa T_0} \right) \left(\frac{\pi \kappa T_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi^3 (1 - \cos\chi)^2} \quad (C.6)$$

(C.5), (C.6) を (C.4) に代入し, χ 積分を行なう。通常良くするように impact parameter が Debye length に相当する所で cut する。すると

$$A_\ell = \sqrt{2\pi} \bar{K}' \frac{\ell(\ell+1)}{2} \frac{P_\ell(\cos\theta)}{\xi^3},$$

$$\bar{K}' = \left(\frac{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}{\kappa T_0} \right)^2 \left(\frac{\pi \kappa T_0}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \ell n \left(\frac{\kappa T_0 \ell_D}{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2} \right). \quad (C.7)$$

これと (C・2) とから

$$\sum_{g=0}^{\infty} s^g J_{e^{-i}\varphi_g \ell} = (1-s)^{-(\ell+\frac{3}{2})} e^{-S\xi^2} \xi^{\ell-3} \sqrt{2\pi \bar{K}'} \frac{\ell(\ell+1)}{2} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (C \cdot 8)$$

内積の定義を用いて

$$\sum_{p, g=0}^{\infty} s^p t^g (\varphi_{p\ell}, J_{e^{-i}\varphi_g \ell}) = [(1-s)(1-t)]^{-(\ell+\frac{3}{2})} \sqrt{2\pi \bar{K}'} \frac{\ell(\ell+1)}{2} B_{\ell}, \quad (C \cdot 9)$$

$$B_{\ell} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 P_{\ell}^2(\cos \theta) d(\cos \theta) \int_0^{\infty} e^{-(1+S+T)\xi^2} \xi^{2\ell-1} d\xi, \quad (C \cdot 10)$$

$$B_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{2\ell+1} \frac{\Gamma(\ell)}{(1+S+T)^{\ell}}. \quad (C \cdot 11)$$

これと (C・9) とから

$$\sum_{p, g=0}^{\infty} s^p t^g (\varphi_{p\ell}, J_{e^{-i}\varphi_g \ell}) = \sqrt{2 \bar{K}'} \frac{\Gamma(\ell+2)}{2\ell+1} \frac{[(1-s)(1-t)]^{-(\ell+\frac{3}{2})}}{(1+S+T)^{\ell}} \quad (C \cdot 12)$$

$$S = \frac{s}{1-s}, \quad T = \frac{t}{1-t} \quad \text{を用いて}$$

$$\sum_{p, g=0}^{\infty} s^p t^g (\varphi_{p\ell}, J_{e^{-i}\varphi_g \ell}) = \sqrt{2 \bar{K}'} \frac{\Gamma(\ell+2)}{2\ell+1} \frac{[(1-s)(1-t)]^{-\frac{3}{2}}}{(1-st)^{\ell}} \quad (C \cdot 13)$$

と書かれる。

Moment Method for Wave Phenomena in a Plasma

Reference

- 1) M. Ogasawara : J. Phys. Soc. Japan 17 (1962) 1553,
小笠原, 本間, 木原: 核融合研究 8 (1962) 116,
小笠原: 核融合研究 8 (1962) 441.
- 2) C.S. Wang Chang and G.E. Uhlenbeck: Univ. Michigan Rep. (1952).
- 3) A.Lenard : Ann. Phys. 10 (1960) 390,
R.Balescu: Phys. Fluids 3 (1960) 52,
N.Rostoker and M.N.Rosenbluth: Phys. Fluids 3 (1960) 1.
- 4) Y.H. Ichikawa : Prog. Theor. Phys. 24 (1960) 1083.
- 5) C.R. Willis: Phys. fluids 5 (1962) 219.
- 6) J.E. Drummond: Phys. Rev. 110 (1958) 293,
112 (1958) 1460,
L.Mower: Phys. Rev. 116 (1959) 16.
- 7) P.L.Bhatnager, E.P.Gross and M. Krook: Phys. Rev. 94 (1954) 511.
- 8) T.W.Johnston: Canad. J. Phys. 40 (1962) 1208.
- 9) A.Lenard and IraB. Bernstein: Phys. Rev. 112 (1958) 1456.
- 10) A.A.Logunov: Zhur. Eksptl. i Teoret. Fiz. 20 (1950) 458.
- 11) J.J. and G.P. Thomson: Conduction of Electricity through Gases,
Cambridge 1933, Vol. 2 p.353.
- 12) V.A.Bailey: Phys. Rev. 78 (1950) 428.
- 13) E.P.Gross: Phys. Rev. 82 (1951) 232.