電磁流体波の伝播特性^{*}

桜井 邦 明 (京大工)^{**}

(1963年2月7日受理)

電磁流体波の伝播特性を、正常波、異常波の両波について研究する。先ず、基礎方程式を求め、その適用条件を検討し、それから分散方程式を導き、両波の伝播特性を調べる。正常波の伝播はその周波数に対する依存度が大きく、磁力線によるtrappingの度合が周波数によってかなり異なるが、異常波にあっては、磁力線によるtrappingが非常によい。

§1 Introduction

Magneto-active Plasma 内の電磁流体波については既に多くの研究がなされており、その性質はかなり詳しく知られている。また、地球外気圏に起っている電磁流体振動、銀河系プラズマ内の伝播と宇宙線の加速、その他の問題にも適用されている。併し乍ら、電磁流体波の周波数特性、磁力線によるtrappingの機構等については未だ詳しく調べられていない。

本論では、電磁流体波を扱う基礎方程式を導き、その適用条件について調べ、電磁流体波の伝播特性を、周波数特性、trappingの機構等について研究する。

§2 基礎方程式

Isotropic electrical conductivity (σ) をもつ媒質において用いられる方程式は、Maxwell の電磁場の基礎方程式と流体運動の方程式である。 Isotropic

* Propagation characteristics of Hydromagnetic Waves.

** Kunitomo Sakurai (Ionosphere Res. Lab., Kyoto University)

conducting mediumでは、 σ はスカラー量であり、電流方程式は、current density を $\vec{j}$ とおくと

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}) \quad (1)$$

となる。この $\vec{j}$ は磁場 $\vec{H}$ と次の関係をもつ：

$$\text{curl } \vec{H} = 4\pi \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

Maxwell の方程式の他の二式，

$$\text{curl } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad (4)$$

を用いて、 $\vec{j}$ 、 $\vec{E}$ を消去すると磁場 $\vec{H}$ に関して

$$\nabla^2 \vec{H} = 4\pi\sigma \left\{ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{curl} (\vec{v} \times \vec{H}) \right\} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5)$$

が得られる。

併し乍ら、Magneto-active plasma は一般に anisotropic medium であると考えねばならぬから、電流方程式(1)は、次のように書き代えられねばならない：

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}_{\parallel} + \sigma_1 \vec{E}_{\perp} + \sigma_2 \vec{H} \times \frac{\vec{E}_{\perp}}{H}, \quad (6)$$

ここに、 $\vec{E}_{\parallel}$ 、 $\vec{E}_{\perp}$ は夫々、 $\vec{H}$ に平行な、及び垂直な $\vec{E}$ の成分であり、electrical conductivity σ_0 、 σ_1 、 σ_2 は夫々 $\vec{H}$ に平行、 $\vec{E}_{\perp}$ に平行、 $\vec{H}$ 、 $\vec{E}_{\perp}$ 両者に垂直な成分である。式(6)の右辺第三項は、Hall current といわれる。

本節では、式(6)と Maxwell の方程式とから、運動している anisotropic conducting medium に対する電磁場の方程式を Piddington (1954a) の方法に従って求める。実際に適用される場合には、大部分が式(5)を用いることで充分である。

Plasma に、外部から uniform な磁場 $\vec{H}_0$ がかゝっていると考え、これに対して変化磁場 (variable magnetic field $\vec{H}$) は $|\vec{H}_0|$ に比して大きさが充分小さいと仮定

電磁流体波の伝播特性

する ($\vec{H}_0 \gg \vec{H}$)。また conductivity は電磁場の変化によらず一定であると考える。

第一図の如く座標系をとり、磁場 $\vec{H}_0$ を z -軸方向にとる。一般に、displacement current を無視できるから、式(2)の右辺第二項は考えないでよい。

第 1 図 座 標 系

今 Maxwell の方程式と(6)式とから磁場 $\vec{H}$ の方程式を求めると、

$$\nabla^2 \vec{H} = 4\pi\sigma_3 \left\{ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{curl} (\vec{v} \times \vec{H}) \right\} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (7)$$

が得られる。この式の導出には

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad (8)$$

が仮定されている (Piddington, 1954a) 電離層、外気圏或いは銀河系の空間にあっては、一般に、

$$\sigma_3 \simeq \sigma_0 \left(\sigma_3 = \sigma_1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \right)$$

が成立するから、式(7)は式(5)と同じ形になる。

また、electron conduction のみの系では、式(5)は厳密に成立する (Piddington 1954b)。従って、一般に、

$$\nabla^2 \vec{H} = 4\pi\sigma \left\{ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \text{curl} [\vec{v} \times \vec{H}] \right\} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5)$$

が成立するとしてよい。一般の場合の厳密な取り扱いにおいては、式(5)や(7)のような vector equation による表現が難かしいので、成分に分けて示すが、 x, y, z 各成分は夫々次のようになる：

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = 4\pi\sigma_3 \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} - H_0 \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_3}{\sigma_0} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} &= 4\pi\sigma_3 \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} - H_0 \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \\ &\quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \left(\frac{\sigma^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = 4\pi\sigma_3 \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} + H_0 \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} \quad (11)$$

こゝでは、前になした $\vec{H}$ についての仮定を用いて方程式を linearize している。

一方、流体の hydrodynamic equation は

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - U^2 \text{grad div } \vec{v} + \frac{V^2}{H_0} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H}_0 \times \text{curl } \vec{H}) = 0 \quad (12)$$

と表わされる。但し $U^2 = \frac{\partial \theta}{\partial \rho}$ であり、音速の二乗を与える。 θ は圧力、 ρ は mass

density であって、 $V^2 = H_0^2 / 4\pi\rho$ である。

(9) - (12) の諸式を用いて、 $\vec{H}, \vec{v}$ を決めて行くことが可能となる。今、解を、 $x-z$ 平面内にあって、 Oz -軸から角 θ をなす軸 $O\xi$ に沿って $\exp i(\omega t - k\xi)$ の形に仮定する ($k\xi = k_x x + k_z z$)。すると $\partial/\partial x = -ik \sin\theta, \partial/\partial z = -ik \cos\theta, \partial/\partial t = i\omega$ であることより、式(9) - (12) から電磁流体波を記述するための一連の方程式が得られる。

その結果は以下のようである：

$$(k^2 + k_0^2 \omega^2) H_x + k_0 k \cos\theta \omega v_x + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} k^2 \cos^2\theta H_y = 0 \quad (13)$$

$$(\kappa^2 + i\epsilon_o \omega^2) H_y + i\epsilon_o H_o \kappa \cos \theta \omega v_y - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \kappa^2 H_x = 0, \quad (14)$$

$$(\omega^2 - U^2 \sin^2 \theta \kappa^2) v_x - U^2 \kappa^2 \sin \theta \cos \theta v_z + \frac{V^2 \kappa \omega}{H_o \cos \theta} H_x = 0, \quad (15)$$

$$\omega v_y + \frac{V^2 \kappa \cos \theta}{H_o} H_y = 0, \quad (16)$$

$$(\omega^2 - U^2 \kappa^2 \cos^2 \theta) v_z - U^2 \kappa^2 \sin \theta \cos \theta v_x = 0, \quad (17)$$

こゝでは, $H_z = -H_x \tan \theta$ なる関係を使った。又 $\epsilon_o = \frac{4\pi\sigma_o}{\omega}$ (又は $\frac{4\pi\sigma_3}{\omega}$)

である。

今, v_x, v_y , および v_z を消去すると, H_x, H_y について,

$$\left\{ \kappa^2 + i\epsilon_o \omega^2 - i\epsilon_o V^2 \kappa^2 \frac{\omega^2 - U^2 \kappa^2 \cos^2 \theta}{\omega^2 - U^2 \kappa^2} \right\} H_x + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \kappa^2 \cos^2 \theta H_y = 0 \quad (18)$$

$$(\kappa^2 + i\epsilon_o \omega^2 - i\epsilon_o V^2 \kappa^2 \cos^2 \theta) H_y - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \kappa^2 H_x = 0 \quad (19)$$

の関係式が得られる。式(18), (19)より, H_x, H_y を消去すれば Dispersion equation が得られる。結果は次式で与えられる。

$$\begin{vmatrix} \kappa^2 + i\epsilon_o \omega^2 - i\epsilon_o V^2 \kappa^2 \left(\frac{\omega^2 - U^2 \kappa^2 \cos^2 \theta}{\omega^2 - U^2 \kappa^2} \right) & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \kappa^2 \cos^2 \theta \\ \kappa^2 + i\epsilon_o \omega^2 - i\epsilon_o V^2 \kappa^2 \cos^2 \theta & -\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \kappa^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

§ 3 電磁流体波の伝播特性

前節の式(20)において, $V^2 \gg U^2$ と仮定すると Dispersion equation は下記のようになる。

$$\frac{\omega^2}{k^2} = V^2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} + \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\omega^2}{\omega_{Hi}^2} \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} \right\} + \frac{i}{\epsilon_0} \quad (21)$$

ここで,

$$S^2 = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} + \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\omega^2}{\omega_{Hi}^2} \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

とおく, 但し

$$\omega_{Hi} = \frac{eH_0}{m_i c} \quad (23)$$

で, ion gyro-frequencyを表わす。eは charge, m_i は ion mass, cは光速である。式(23)は, 電磁流体波の屈折率等, 伝播特性を研究する際に重要となる。ここにおいて,

$$k = \alpha - i\beta \quad (24)$$

とおくと $V_{ph} = \frac{\omega}{\alpha}$ より, (V_{ph} , phase velocity)

$$V_{ph}^2 = \left(\frac{\omega}{\alpha} \right)^2 = \frac{2(V^4 S^4 + \epsilon_0^{-2})}{V^2 S^2 + \sqrt{V^2 S^4 + \epsilon_0^{-2}}} \quad (25)$$

が得られるが, $V^2 S^2 \epsilon_0 \gg 1$ を仮定すると (この仮定は, high conductive plasma にあっては常に満たされている),

$$V_{ph}^2 \approx V^2 S^2 \quad (26)$$

となる。従って,

$$V_{ph} = V \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} + \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \left(\frac{\omega}{\omega_{Hi}} \right)^2 \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (26')$$

電 磁 流 体 波 の 伝 播 特 性

が, magneto-active plasma 内における電磁流体波の位相速度 (phase velocity) を与えるのである。カッコ { } 内の複号のうち, 上は異常波 (Extra-ordinary wave) を表わし, 下は正常波 (Ordinary wave) を与える。こゝには absorption coef β についての計算結果を示さないが, $V^2 S^2 \epsilon_0 \gg 1$ の場合には, $\beta \approx 0$ となって, 以後の計算には何ら影響を与えない。

式(20)において, $\omega \rightarrow 0$ の極限 (又は $\omega/\omega_{Hi} \rightarrow 0$) にあっては,

$$V_{ph}^2 = V^2 \cos^2 \theta \quad \text{or} \quad V^2 \quad (21)$$

が得られ, Alfven (1942) 以来, 多くの人達によって研究されて来た結果に帰する。

電磁流体波の伝播特性は, Whistler wave について, Smith, Helliwell 及び Yabroff (1960) が用いた方法と同様の仕方で調べることができる。先ず, 波動の屈折

率 $\mu^2 = \frac{c^2}{V_{ph}^2}$ を求めると,

$$\mu^2 = \frac{c^2}{V^2 S^2} \quad (22)$$

であり, 又; group refractive index μ' , group velocity (v_g) は

$$\mu' = \mu + f \frac{d\mu}{df} \quad \left(f = \frac{\omega}{2\pi} \right) \quad (23)$$

$$v_g = \frac{c}{\mu'} \quad (24)$$

* この指定は, Piddington (1955), Storey (1956) が与えたものと逆であり, Cole (1959, 1961), Aström (1950) が与えた定義と同じである。

電磁波伝播の一般論は後者が妥当なことを示す。

で与えられる。 μ' は式(28)の結果を用いて計算することができる。結果を示すと、

$$\mu' = \frac{c}{VS} \left\{ 1 \pm \frac{\cos^2 \theta}{2S^2} \left(\frac{f}{f_{Hi}} \right)^2 \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} + \left(\frac{f}{f_{Hi}} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \quad (31)$$

である。又、 v_g は式(30)から簡単に求められる。

第2図 磁力線と Wave Normal ($\vec{k}$) と波動の Ray Direction との関係

第2図に示すように、Wave normal と磁力線 ($\vec{H}_0$) となす角を θ とし、Wave normal と ray direction となす角を α とすると、角 α は μ から次式(32)を用いて求めることができる (Bremmer, 1949)。これは

$$\tan \alpha = - \frac{1}{2\mu^2} \frac{\partial \mu^2}{\partial \theta} \quad (32)$$

によって与えられ、計算の結果は

$$\tan \alpha = - \frac{\sin^2 \theta - \frac{2}{Y_i^2} \sin \theta \cos \theta \left\{ 1 \pm \frac{2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \mp \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}} \right\}}{2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \mp \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}} \quad (33)$$

である ray direction の方向は $(\theta + \alpha)$ なる角度で与えられるから、これを求めると、

$$\theta + \alpha = \theta + \tan^{-1} \left\{ - \frac{\sin^2 \theta - \frac{2}{Y_i^2} \sin \theta \cos \theta \left\{ 1 \pm \frac{2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \mp \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}} \right\}}{2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \mp \left(\frac{\sin^4 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}} \right\} \quad (34)$$

が得られる (33), (34) 両式における複号の中, 上は異常波, 下は正常波を示す). 式 (34) の結果は, Hydromagnetic wave の磁力線による trapping を検討するための基礎となる式であり, 種々の Y_i の値に応じて異なった結果を示す。但し

$$Y_i = \frac{\omega_{Hi}}{\omega} \left(= \frac{f_{Hi}}{f} \right) \quad (35)$$

である (f_{Hi} ; ion gyro-frequency, f ; Hydromagnetic wave frequency)

今, $Y_i \rightarrow \infty$ ($\omega/\omega_{Hi} \rightarrow 0$) とすると, (36) は

$$\tan \alpha = \begin{cases} -\tan \theta & (\text{異常波}) \\ 0 & (\text{正常波}) \end{cases} \quad (36)$$

となり, ray direction は

$$\theta + \alpha = \begin{cases} 0 & (\text{異常波}) \\ \theta & (\text{正常波}) \end{cases} \quad (37)$$

となる。つまり, 異常波は $\omega/\omega_{Hi} \rightarrow 0$ の極限では, 完全に磁力線に沿って伝播するのに対して, 正常波では Wave normal の方向と ray direction の方向が一致しており, Wave Energy の伝播が Wave normal 方向にあることを示している。

Y_i が有限な値をとる場合について次に考察する。この場合には, 式 (34) を種々の Y_i の値について計算しなければならない。その結果は第 3 図に示す通りである。図には, 正常波, 異常波が別々に示されている。両者について示されている Y_i の値の数にちがいがあがあるが, 図の見安さのために同数ずつ示さなかったからである。異常波については, その成立範囲が, $Y_i > 1$ に限られているが, その範囲では, $(\theta + \alpha)$ は 10 数度以下で小さく, Hydromagnetic Wave の異常波成分は磁力線に大体沿ってエネルギーが伝播することを示している。一方, 正常波については, Y_i に対する制限はなく, $Y_i < 1$ でも正常波は存在するが, この範囲では Hydro-magnetic Wave はその性質が, $f_p > f_{He}$ (f_p , 電子プラズマ周波数, f_{He} , (electron gyro-frequency) で, $f < f_{He}$ の場合の電磁波のそれに近付き, $Y_i = 0.1$ の例えでは, 地球外気圏内を伝播する Whistler Wave について, Storey (1953) が計算した結果と略々同じものが得られている。更に Y_i の値を小さくすると, そこでは hydrodynamic な考え方は適用できなくなり, 電子運動の影響が大きくなって来て, こゝで求めた結果は最早適用できなくなるが, 電子とイオンから成る plasma について計算し

た結果と、こゝでの計算の範囲では大体一致している。

電磁流体波の伝播特性

正常波のtrappingは異常波のようによくはなく、 $Y_i \gtrsim 0.5$ の範囲では $\theta \simeq \theta + \alpha$ 、でWaveは磁力線にtrapされる性質を示さない。

このようなtrappingの問題を図式的に示すには、Hydromagnetic Waveに関するRefractive Index Surfaceを書いて、この面について、その面上の法線方向がray direction 与える事実を利用すればよい。この関係を図に示すと第4図のようである。

第4図 Refractive Index Surface
Reference Axis には磁力線 ($\vec{H}_0$) の方向をとる
(μ の θ -dependence は式(2)で与えられる。)

このことを用いて、 $Y_i = 0, 1, 2$, 及び ∞ , について得た結果を示したのが第5図である。図で、(0)と示したものは正常波、(E)と示したものは異常波に夫々対応している。 $Y_i < 1$ の場合は、図のa)にみる如く、正常波だけしか存在しない。また、b), c)も含めて判るように正常波の trapping は Y_i が大きくなるにつれて悪くなり、 $Y_i = \infty$ では Wave の trapping はみられなくなる。一方、異常波は逆に、 Y_i が大きくなるに従って、trapping がよくなり、 $Y_i = \infty$ では θ に関係なく ray direction は磁力線方向にある。この図において、ray direction を示す矢印の大きさは、Energy Transport の相対的な大きさを表わしている。

正常波において $Y_i < 1$ の領域は、前にも一寸触れたように、Whistler wave に連っており、図のa)に示された特性はそのまま Whistler Wave の trapping の性質を示している。

§4 結 論

電磁流体波には、正常波、異常波の二種が存在するが、これら両波の伝播特性は、非常に異なったものであり、それを括めると次の如くである ($Y_i = f_{Hi} / f$)。

(1) 正常波 (Ordinary Wave)

正常波は、 Y_i についてその存在範囲が制限されないが、伝播特性は $Y_i > 1$ では、 Y_i の値が大きくなるにつれて磁力線による trapping の度合が減じ、 $Y_i \rightarrow \infty$ では、Wave Normal と Ray Direction の両方向が一致する。つまり、trapping の性質を示さなくなる。またまた、 $Y_i < 1$ では磁力線による trapping を非常に受け易くなり、Whistler Wave の伝播特性に連がる。

(2) 異常波 (Extraordinary Wave)

存在範囲は、 $Y_i > 1$ に制限されているが、 Y_i が大きくなるに従って磁力線による wave の trapping の度合はよくなり、 $Y_i \rightarrow \infty$ では Wave Normal の方向に関係なく、Ray Direction の方向は磁力線のそれと一致する。

このような電磁流体波の伝播特性は、地球外気圏内で発生、伝播する電磁流体波に対して観測されているようである。(Sugiura, 1961)。

ここで取り上げて来た Wave については、正常波、異常波の定義が, Piddington

電磁流体波の伝播特性

第5図 Refractive Index Surface と Ray Direction の例
 (O), (E) は正常波, 異常波に関する Surface を示す
 矢印は Ray Direction Vector を示す。(タテ軸は $\vec{H}_0$ の方向)

(1955)やstorey 他の人達が与えたものと逆であるが,電磁波の Polarization の正確な計算は,本稿で与えた定義が正しい(例えば, Gershman, Ugarov (1961)の論文)。

最後に,この問題について種々有益な議論をして頂いた大林教授初め研究室の方々にお礼を申し上げます。

文 献

- Aström E.: Ark. för Fysik 2, 443 (1950).
Bremner H.: Terrestrial Radio Waves Elzevier (1949)
Cole K.D.: Planet. Space Sci. 1, 319 (1959)
Ibid. 5, 292 (1961).
Gershman B.N, Ugarov V.A.: Soviet Phys. UFN, 3, 743 (1961).
Piddington J.H.: M.N. 114, 638 (1954 a)
Ibid. 114, 651 (1954 b)
Ibid. 115, 671 (1955)
Smith R.L., Helliwell R.A., Yabroff I.W.: J. Geophys. Res. 65, 815 (1960).
Storey L.R.O.: Phil. Trans. A. 243, 113 (1953).
Canad. J. Phys 34, 1153 (1956).
Sugiura M.: J. Geophys. Res. 66, 4087 (1961).

Proragation characteristics of hydromagnetic waves are studied on the ordinary and the extraordinary waves. After derivation of the fundamental equations, the dispersion equation is examined for a study of the propagation characteristics of the two waves. A theory of trapping of hydromagnetic waves by the magnetic lines of force is considered.