プラズマの境界層^{*}

伏見康治・矢島信男(プラズマ研)^{**}・都築俊夫(阪大, 理)^{***}

(1963年4月27日受理)

§1 Introduction

磁場によって閉じこめられた Plasma の表面の構造は, これまで多くの人々によってとりあつかわれて来たし,¹⁾ 我々自身もいろいろな機会にその結果を発表して来た。²⁾ この問題は collisionless plasma に話を限れば, 非常に簡単な原理から出発できる。しかし, その取扱いは複雑であって, じっさいに Maxwell 分布をした plasma について粒子の運動方程式と Maxwell 方程式を連立させて Analytic に解くことは殆ど絶望的である。したがって解を得るために, 数値計算に頼らざるを得ない。そのことは境界層の解の示している物理的意味を明らかにするのに適していなかった。

こゝでは複雑さをさけて, 物理的な意味をさぐり易くするために簡単なモデルを採用する。これにより境界層の概念は明らかとなる。plasma 粒子の速度分布が Maxwell 分布にしたがうとき, 粒子の速さ及び方向のちがいが particle orbit を入りまぢらせ, その結果問題を複雑にさせる。plasma の充分内部に於て, 粒子が単一の速度を持つものとするればその orbit は入りみだれることなく, 上でのべた意味の複雑さはさけられる。こゝでは, 我々は plasma は次のような速度分布を持つものとしよう。(u, v, w) を速度の (x, y, z) 成分として, それは

$$n(u, v, w) = n_0 u_0 \delta(u^2 - u_0^2) \delta(v) \delta(w) \quad (1)$$

* On the structure of a fresh plasma surface

** K. Husimi and N. Yajima (Institute of Plasma Physics, Nagoya Univ.)

*** T. Tsuzuki (Department of Physics, Osaka Univ.)

で与えられる。これによると plasma 粒子は plasma の充分内部に於て境界層に normal な方向にのみ運動しており，その速さは $\pm u_0$ である。

§2 に於て粒子の軌道を重ねることによって密度，及び電流を定義し self consistent equation を導く，§3 では plasma の neutral confinement に対応する解が求められる。§4 では，得られた解から境界層の概念が明らかにされる。

§2 Self-consistent equation

閉じこめ磁場は z 方向をむいているとしよう。

これを B と書く。charge separation による電場 E は表面に垂直な方向を向いている。 B 及び E は x にのみ depend するとしておく。(Fig.1 参照)

Fig. 1

質量 m ，電荷 g の粒子の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} m\dot{U} &= gE(x) + gVB(x) \\ m\dot{V} &= -gUB(x) \\ m\dot{W} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2)を積分して，

$$\left. \begin{aligned} U^2 + V^2 + \frac{2g}{m} \phi &= u_o^2 \\ V + \frac{g}{m} A &= v_o (=0) \\ W &= w_o (=0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

こゝで，

$$\left. \begin{aligned} \phi &= - \int_{x_o}^x E(x') dx' \\ A &= \int_{x_o}^x B(x') dx' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

とした。 x_o はplasmaの充分内部にとっておく。したがって， x_o では $B(x)$ は殆ど0とみなせて， x_o 点でのvelocity分布は eE (1)で与えられるものと考えてよい。(こゝでplasmaの充分内部で磁場 B は0になるものとしておく。)

(3)を用いると，

$$U = \sqrt{u_o^2 - \frac{2g\phi}{m} - \frac{g^2}{m^2} A^2} \quad (5)$$

を得る。(5)は density, current density を求めるときに使われる。すなわち，連続の方程式から，charge density ρ 及び current density J は

$$\begin{aligned}\rho &= \sum n_o g \frac{u_o}{U} \\ &= \sum n_o g \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2g}{m u_o^2} \phi(x) - \frac{g^2}{m^2 u_o^2} A^2(x)}}\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}J &= \sum n_o g V \frac{u_o}{U} \\ &= -\sum n_o \frac{g^2}{m} A(x) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2g}{m u_o^2} \phi(x) - \frac{g^2}{m^2 u_o^2} A^2(x)}}\end{aligned}\quad (7)$$

となる。ここで $\sum$ は ion と electron についての和を意味する。この(6)と(7)を Maxwell eq. に代入すれば self-consistent eq. が得られる。ion の mass, charge を M, e とし, electron のそれを $m, -e$ としておく。MKS unit を使って Maxwell eq. は次のようになる。

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{1}{e} \left\{ \frac{n_o e}{\sqrt{1 + \frac{2e\phi}{m u_e^2} - \frac{e^2 A^2}{m^2 u_e^2}}} - \frac{n_o e}{\sqrt{1 - \frac{2e\phi}{M u_i^2} - \frac{e^2 A^2}{M^2 u_i^2}}} \right\} \quad (8)$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \mu \left\{ \frac{n_o e^2 A/m}{\sqrt{1 + \frac{2e\phi}{m u_e^2} - \frac{e^2 A^2}{m^2 u_e^2}}} + \frac{n_o e^2 A/M}{\sqrt{1 - \frac{2e\phi}{M u_i^2} - \frac{e^2 A^2}{M^2 u_i^2}}} \right\} \quad (9)$$

ここで, u_i, u_e は $\phi=0, A=0$ なる点での ($x=x_0$ での) ion と electron の velocity の x 成分。 n_o はその点に於ける density であって, ion と electron について等しいとしてある。前にも断ったようにそこでは velocity は x 方向を向いている。(eq.(3)参照)

(8), (9)をそのまま扱うのは面倒であるので, 次のような dimensionless quantity を導入しておく。

$$\left. \begin{aligned} \frac{m u_e^2}{m u_i^2} &\equiv \tau \quad (= \text{温度比}) \\ \frac{m u_e^2}{M n_i} &\equiv \lambda \quad (= \text{運動量比}) \\ \frac{2 e \phi}{m u_e^2} &\equiv \varphi \\ \frac{e^2 A^2}{m u_e^2} &\equiv a^2 \\ \sqrt{\frac{\epsilon m u_e^2}{2 n_o e^2}} &\equiv \lambda_D \quad (= \text{Debye length}) \\ \xi &\equiv x / \lambda_D, \quad \nu \equiv u_e^2 / c^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これらの量を使うと, dimensionless な Maxwell eq. は

$$\frac{d^2 \varphi}{d \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \tau \varphi - \lambda^2 a^2}} \quad (11)$$

$$\frac{d^2 a}{d \xi^2} = \frac{\nu}{2} a \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi - a^2}} + \frac{m/M}{\sqrt{1 - \tau \varphi - \lambda^2 a^2}} \right\} \quad (12)$$

と書ける。(11), (12)は根号の中が負になると0とおく。(何故なら, 根号の中が負になるところでは粒子はすでに引きかえているからである)。得られた方程式を解くことによって表面の構造

が得られる。これは次の§でなされる。

§3 neutral confinement solution

こゝでは plasma の net charge が 0 になるような解を求めよう (任意に charge up した solution も容易に求めることができる)。net charge 0 の条件は当然

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) d\xi = 0 \quad (13)$$

と書くことができる。こゝで若干、注意を要する。

(iii) は $a \rightarrow 0$ (言い換えると plasma の充分内部で) とすると

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi}} - \frac{1}{\sqrt{1-\tau\varphi}}$$

となる。これから判るように、 φ は波動型の解を持つ。^{*}したがって、これに対応して $\xi \rightarrow -\infty$ で密度 ρ も波動型のもとなる。そのため積分(13)は下限のところで definite な値をもたず、0 のまわりに振動することになる。したがって net charge 0 の条件は平均的な意味でしか成立しないことに注意しておく。

上でのべたように、荷電密度 ρ は ξ とともに振動している。したがって磁場が 0 になるような充分内部のところでは、電場は平均的に 0 である。したがって、

$$\left. \frac{d\varphi}{d\xi} \right|_{\xi=-\infty} = 0 \quad (14)$$

ここで、 $\left. \frac{d\varphi}{d\xi} \right|_{\xi=-\infty}$ は ξ について平均をとったことを意味する。(14)、(13) 及び φ の方程式

*) φ が波動型の解を持つのは collisionless plasma の特徴である。

から,

$$\left. \frac{d\varphi}{d\xi} \right|_{\xi=+\infty} = 0 \quad (15)$$

を得る。

したがって, (11), (12) は $\xi = \xi_0$ で $a = \frac{da}{d\xi} = 0$, $\varphi = 0$, $\xi = \infty$ で $\frac{d\varphi}{d\xi} = 0$ なる条件

でとけばよい。すなわち, $\xi = \infty$ での $\frac{d\varphi}{d\xi} = 0$ という条件は net charge = 0 の条件に対

応し, これが plasma の充分内部に於ける electrostatic potential φ の空間的振動の振幅をきめるのである。

(11), (12) を解くのに, plasma は殆ど局所的に中性を保っているものと仮定しよう (local neutrality の仮定)。neutral から大きくずれると electric field が強く働いて neutral に近いところまで戻る。完全に neutral を保ち得ないのは磁場がかかっていることによる。

local neutral の条件は (11) の右辺を 0 とおいて得られる。(charge density = 0) すなわち,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tau \varphi - \lambda^2 a^2}}$$

これをといて,

$$\varphi_n = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \tau} a^2 \quad (16)$$

こゝで添字 n は neutral solution であることを示す。

上で述べたように, local neutral からのずれが小さいとしているので,

$$\varphi = \varphi_n + \psi \quad (17)$$

として ψ について線型化しておく。そうすると, ψ と a の方程式は

$$\frac{d^2 \psi}{d \xi^2} = -\frac{1+\tau}{2} \frac{\psi}{\left(1 - \frac{\tau+\lambda^2}{1+\tau} a^2\right)^{3/2}} - 2 \frac{1-\lambda^2}{1+\tau} \left(a \frac{d^2 a}{d \xi^2} + \left(\frac{d a}{d \xi} \right)^2 \right) \quad (18)$$

$$\frac{d^2 a}{d \xi^2} = \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{\tau+\lambda^2}{1+\tau} a^2}} - \frac{\nu}{4} (1-\lambda^2) \frac{\psi}{\left(1 - \frac{\tau+\lambda^2}{1+\tau} a^2\right)^{3/2}} \quad (19)$$

となる。 ν は electron velocity と光速の比の2乗に比例しているので充分小さい。そこで、今 $\nu \cdot \psi$ の項は無視することにして置く。この近似では a の方程式はもはや ψ を含まず、

$$\frac{d^2 a}{d \xi^2} = \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{\tau+\lambda^2}{1+\tau} a^2}} \quad (20)$$

となる。この方程式の積分は全く初等的である。先にのべたように $\xi \rightarrow -\infty$ で $a = \frac{d a}{d \xi} = 0$

とすると、

$$\left(\frac{d a}{d \xi} \right)^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu \frac{1+\tau}{\tau+\lambda^2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\tau+\lambda^2}{1+\tau} a^2} \right\} \quad (21)$$

を得る。更に $\xi = 0$ で根号の中が0になるとして(つまりその点で粒子は引き返えすとして)、

$$\sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{\nu}{2}} \xi = \log \frac{\tan \frac{1}{4} \sin^{-1} \sqrt{\frac{\tau+\lambda^2}{1+\tau}} a}{\tan \frac{\pi}{8}} + 2 \cos \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} \sqrt{\frac{\tau+\lambda^2}{1+\tau}} a \right) - \sqrt{2} \quad (22)$$

を得る。(22)は $\xi \rightarrow -\infty$, $\xi \rightarrow -0$ のところで、次の漸近形を持つ。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{\tau + \lambda^2}{1 + \tau}} a &\approx 1 + \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu} \xi & \text{for } \xi \rightarrow -0 \\ &\approx a_0 \exp \left\{ \sqrt{1 + \frac{m}{M}} \frac{\nu}{2} \xi \right\} & \text{for } \xi \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

こゝで,

$$a_0 = 4 \tan \frac{\pi}{8} e^{-2 + \sqrt{2}} \approx 0.92$$

である。

こゝで求められた a を (23) に代入すると ψ の方程式が得られる。(23) 及び (24) を (23) に代入して,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1 + \tau}{2} \frac{\psi}{\left(1 - \frac{\tau + \lambda^2}{1 + \tau} a^2\right)^{3/2}} \\ = -2 \frac{1 - \lambda^2}{\tau + \lambda^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\tau + \lambda^2}{1 + \tau} a^2} + \frac{1}{2} \frac{\tau + \lambda^2}{1 + \tau} \frac{a^2}{\sqrt{1 - \frac{\tau + \lambda^2}{1 + \tau} a^2}} \right\} \quad (24)^* \end{aligned}$$

この方程式は, a について (24) という asymptotic form を採用すると, $\xi \rightarrow -0$, $-\infty$ で次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1 + \tau}{2} \psi &= -2 \frac{1 - \lambda^2}{\tau + \lambda^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu a_0^2 e^{\sqrt{2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu} \xi} & \text{for } \xi \rightarrow -\infty \\ \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1 + \tau}{2} \frac{1}{\left\{4 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu\right\}^{3/4}} \frac{\psi}{(-\xi)^{3/2}} &= -\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \frac{\left\{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu\right\}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{-\xi}} & \text{for } \xi \rightarrow -0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

④の particular solution は簡単に求まって,

$$\left. \begin{aligned} \psi_p(\xi \rightarrow -\infty) &\approx -4 \frac{1-\lambda^2}{\tau+\lambda^2} \frac{(1+\frac{m}{M})^\nu}{1+\tau+4(1+\frac{m}{M})^\nu} a_0^2 e^{\sqrt{2(1+\frac{m}{M})^\nu} \xi} \\ \psi_p(\xi \rightarrow -0) &= \frac{4}{1+\tau} \frac{1-\lambda^2}{\tau+\lambda^2} (1+\frac{m}{M})^{\frac{3}{2}} \nu^{\frac{3}{2}} \xi \end{aligned} \right\} \text{②⑨}$$

となる。この particular solution は④の neutral solution に対して order ν の補正を与えていることが判る。

これは $\nu \cdot \phi$ の order を無視したことを正当にしている。

次に我々は④の homogeneous solution を求めよう。

これは,

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1+\tau}{2} \frac{\psi}{\left\{1 - \frac{\tau+\lambda^3}{1+\tau} a^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \text{②⑩}$$

で与えられる。 $\xi \rightarrow -\infty, -0$ の limit では、当然のことではあるが、②⑩は④の homogeneous part に一致する。そこで $\xi \rightarrow -\infty, -0$ の limit で正しい方程式の振舞をあらわすように②⑩を近似しておこう。こゝでは

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1+\tau}{2} \left\{1 + \frac{\beta}{(-\xi)^{\frac{3}{2}}}\right\} \psi = 0 \quad \text{(27')}$$

$$\beta = \left\{ \frac{1}{2 \sqrt{1 + \frac{m}{M}} } \right\}^{\frac{3}{2}} \nu$$

の形にとる。

(27') は次のようにとかれる。先づ $\xi \rightarrow -0$ のときには, $|\xi| \ll 1$ として方程式は

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1+\tau}{2} \beta \frac{\psi}{(-\xi)^{3/2}} = 0$$

となる。この ψ の方程式は適当な変数変換により, Bessel 方程式となって,

$$\psi = 8(1+\tau) \beta \sqrt{-\xi} Z_2 \left(4 \sqrt{\frac{1+\tau}{2}} \beta (-\xi)^{3/4} \right) \quad (28)$$

という解が与えられる。ここで Z_2 は second order Bessel Function である。

solution (28) は

$$\beta / (-\xi)^{3/2} \gg 1$$

或いは

$$-\xi \ll \frac{1}{2 \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M}\right) \nu}} \quad (29)$$

のときのみ意味を持つ。

$|\xi|$ が大きいところでは, (27') は WKB 法で解かれる。

$$\int_{\xi}^{\xi} \sqrt{\frac{1+\tau}{2} + \frac{1+\tau}{2} \beta \frac{1}{(-\xi')^{3/2}}} d\xi' = \zeta$$

$$\psi = \left\{ \frac{1+\tau}{2} \left(1 + \beta \frac{1}{(-\xi)^{3/2}} \right) \right\}^{-1/4} \chi$$

とおくと,

$$\frac{d^2 \chi}{d \zeta^2} + (1 - g) \chi = 0 \quad (30)$$

$$g = \frac{15}{8} \frac{\beta}{1 + \tau} (-\xi)^{-7/2} \frac{1 + \frac{\beta}{4} (-\xi)^{-3/2}}{(1 + \beta (-\xi)^{-3/2})^3}$$

となる。 $g \ll 1$ (つまり, $|\xi| \rightarrow \infty$) のとき g は無視できて,

$$\psi = \psi_0 \left(\frac{1 + \tau}{2} \right)^{-1/4} (1 + \beta / (-\xi)^{3/2})^{-1/4} \sin \left\{ \int_{\sqrt{\frac{1 + \tau}{2}} \sqrt{1 + \beta / (-\xi)^{3/2}}}^{\xi} d\xi + \delta \right\} \quad (31)$$

を得る。 (31) は $g \ll 1$ という条件で成立している。これを ξ であらわすと, $\beta \gg 1$ として

$$(-\xi) \gg 2 \left\{ \frac{15}{16(1 + \tau)} \right\}^2 \left\{ \left(1 + \frac{m}{M} \right) \nu \right\}^{3/2} \quad (32)$$

となる。

(32) , (33) から判るように, (32) , (31) の解の成立する範囲は重なっている ($\nu \ll 1$ に注意せよ)。

(32) , (31) が同時に成立する範囲は (32) , (33) を使って,

$$2 \sqrt{\frac{1 + \tau}{2(1 + m/M)}} \nu^{-1/4} \gg 4 \sqrt{\frac{1 + \tau}{2}} \sqrt{\beta} (-\xi)^{1/4} \gg \sqrt{\frac{15}{4}} \quad (33)$$

とあたえられる。したがって, (33) をみたすところで 2 つの asymptotic solution をつなげばよい。

今, 簡単のために (33) をみたす Z_2 の零点のところで solution をつなぐ。これに相当する ξ を $-\xi_0$ と書く。 $-\xi_0$ での勾配が一致するように ψ_0 はあたえられる。この手続きに従って,

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= -16 \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^{5/4} \beta^{3/2} \frac{\xi_0^{-1/4} J_3(j_2)}{(1+\beta \xi_0^{3/2})^{1/4}} \\ j_2 &= 4 \sqrt{\frac{1+\tau}{2}} \beta^{1/2} \xi_0^{1/4}, \\ J_2(j_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

を得る。ここで j_2 は J_2 の零点。尚、 Z_2 のもう一つの独立解 N_2 は $\xi=0$ で singular となるので省いた。

ψ が求まったので (4) から electrostatic potential φ を決める。その場合 (5) を考慮して homogeneous solution の係数が決められる。この係数を C と書く。(4) から、

$$\varphi = \varphi_n + \psi_p + C\psi$$

となる。ここで ψ_p は particular solution でその asymptotic form は (9) で与えられている。 ψ は homogeneous solution で (9), (10) で与えられている。boundary condition (5) を使うために、 $\xi \rightarrow -0$ での漸近解を採用する。(9), (10), (20), (22) と J_2 の $|\xi| \rightarrow 0$ での展開式を用いて

$$\begin{aligned} \varphi(\xi \rightarrow -0) &= \frac{1-\lambda^2}{\tau+\lambda^2} + \left[2 \frac{1-\lambda^2}{\tau+\lambda^2} \left\{ 1 + \frac{2}{1+\tau} \left(1 + \frac{m}{M} \right) \nu \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1+\tau)^2}{\left(1 + \frac{m}{M} \right)^2 \nu^2} C \right] \sqrt{\left(1 + \frac{m}{M} \right) \nu} \xi \quad (95) \end{aligned}$$

を得る。net charge = 0 の条件から、 C は ν の lowest order までとって (つまり particular solution をおとして)

$$C = 2 \frac{1-\lambda^2}{(1+\tau)^2 (\tau+\lambda^2)} \left(1 + \frac{m}{M} \right)^2 \nu^2 \quad (96)$$

となる。

こゝで求めた electrostatic potential は次のような性質をもっている。
plasma の充分内部では

$$\left. \begin{aligned} \varphi &\approx \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{2}} \xi + \delta' \right) \\ \varphi_0 &= 16 \frac{1-\lambda^2}{(1+\tau)(\tau+\lambda^2)} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \nu^2 \beta^{\frac{3}{2}} \frac{\xi_0^{-\frac{1}{4}} J_3(j_2)}{(1+\beta \xi_0^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

のような periodic character を持っている。一方, plasma 表面に近づくとき,

$$\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{1-\lambda^2}{1+\tau} a^2 \\ &+ 16 \frac{1-\lambda^2}{(1+\tau)(\tau+\lambda^2)} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \nu^2 \beta \sqrt{-\xi} J_2 \left(4 \sqrt{\frac{1+\tau}{2}} \beta (-\xi)^{\frac{1}{4}} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

という形に移行する。こゝで particular solution は neutral solution にくらべて order ν だけ小さいのでおとした。(38)から判るように $\xi \rightarrow -0$ (plasma 表面) では φ は一定値 $\frac{1-\lambda^2}{\tau+\lambda^2}$ に近づく。これは, 境界によって生じる plasma の potential に相

当する。これを φ_B とかくと,

$$\varphi_B = \frac{1-\lambda^2}{\tau+\lambda^2} \quad (39)$$

この φ_B の expression から, magnetic field の利き方が electron と ion でうんと違うことが判る。(40)を使うと

$$\varphi_B = \frac{1 - \frac{m}{M} \tau}{\frac{m}{(1 + \frac{m}{M}) \tau}} \approx \frac{1 - \frac{m}{M} \tau}{\tau}$$

と書ける。ion energy が大きい場合 ($\tau \ll 1$)

$$\varphi_B \approx \frac{1}{\tau} \rightarrow e \phi_B \approx \frac{M}{2} u_i^2$$

となり、ion は殆ど electrostatic potential でひきかえすことが判る。

electron energy が大きい場合 ($\tau \gg 1$)

$$\varphi_B \approx -\frac{m}{M} \rightarrow e \phi_B \approx -\frac{m}{M} \cdot \frac{m}{2} u_e^2$$

となり、electrostatic potential は electron をひきかえさせるのに 主な役割を果していないことが判る。つまり、electron は磁場によってその運動量の向きをかえることによりひきかえす。一方、ion は electron が磁場によってひきかえたために生じる space charge によってひき戻されるということになる。

φ_B と plasma 内部の振動型 potential の振幅 φ_0 との比は (37), (39) から,

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_B} = 8 \sqrt{\frac{\nu (1 + \frac{m}{M})}{2 (1 + \tau)}} \frac{J_3(j_2) / j_2}{\left\{ 1 + \left[\frac{2 (1 + \tau)}{\nu (1 + \frac{m}{M})} \right]^3 \frac{1}{j_2^6} \right\}^{1/4}} \quad (40)$$

を得る。こゝでは (27'), (34) を使って β, ξ_0 を消去してある。 $\nu \ll 1$ として、(つまり今までの近似が成立する範囲で)

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_B} = 8 \left[\frac{\nu (1 + \frac{m}{M})}{2 (1 + \tau)} \right]^{5/4} \sqrt{j_2} J_3(j_2) \quad (40')$$

となる。 $\sqrt{j_2} J_3(j_2)$ の値は、 j_2 を第1零点、第2、第3と動かしてもあまり変わらない。この事情は Table I にまとめてある。

Table I

j_2	$ \sqrt{j_2} J_3(j_2) $
5.136	0.769
8.417	0.786
11.620	0.775
14.796	0.771

(40') から判るように、 φ_0/φ_B は ion energy が大きくなればなる程 ($\tau \rightarrow 0$) 大きくなるが、upper limit は存在する。この limit は $\nu^{5/4}$ の order のものであって余り大きくない。一方、 φ_0 の絶対値そのものは、(40') から判るように (或いは $\varphi_B = 1 - \lambda^2/(\tau + \lambda^2)$ に注意して) $\nu^{5/4} \tau^{-1}$ となり、 τ の小さいところでは大きくなる。つまり、plasma 内部に存在する electrostatic potential の振幅は τ^{-1} に比例して大きくなる。 $\tau \rightarrow \infty$ 、つまり electron energy が大きくなると、 φ_0/φ_B は $(\nu/\tau)^{5/4}$ に比例して小さくなる。この場合には φ_0 の絶対値も $(\nu/\tau)^{5/4} \tau^{-1}$ に比例して小さくなってゆく。したがって electron energy がうんと大きいような plasma では、plasma 内部には、実質的に electrostatic potential は存在していない。

§4 Discussions

§3 で得られた結論についてふれておく。先づ我々は self-consistent eq. をとくにあたって、plasma は殆ど neutral であるとして、そのずれは小さいという仮定を採用した。(40') が示すように、この仮定は正しいことがたしかめられた。この事情は Fig. 2 にまとめられている。磁場は plasma の中に

$$\lambda_H = \frac{\lambda_D}{\sqrt{(1 + \frac{m}{M}) \nu/2}} \quad (41)$$

プラズマの境界層

という距離ぐらいしみこんでいる。この距離は(40)を用いると

$$\left. \begin{aligned} \lambda_H &= \frac{C}{\sqrt{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2}} \\ \omega_{pi}^2 &= \frac{n_o e^2}{\epsilon M}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{n_o e^2}{\epsilon m} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

となる。更に plasma 外部の磁場を B_0 と書くと, (20) から, pressure balance の式

$$\frac{B_0^2}{2\mu} = n_o \left[m u_e^2 + M u_i^2 \right] \quad (43)$$

を得る。(43)と(42)から n_o を消去すると

$$\left. \begin{aligned} \lambda_H &= \sqrt{2 \left\{ \frac{M}{M+m} \rho_-^2 + \frac{m}{M+m} \rho_+^2 \right\}} \\ \rho_- &= \frac{m u_e}{e B_0} : \text{electron Larmor radius} \\ \rho_+ &= \frac{M u_i}{e B_0} : \text{ion Larmor radius} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

を得る。(44)から判るように $\rho_+ \gg \rho_-$ であれば(普通の場合にはそうになっている。)

$$\lambda_H \sim \sqrt{2 \frac{m}{M+m} \rho_+^2} \sim \sqrt{\frac{2m}{M}} \rho_+ \quad (44')$$

一方, $\rho_- \gg \rho_+$ であれば,

$$\lambda_H \sim \sqrt{2} \rho_- \quad (44'')$$

となる。ionとelectron が equal velocity ($u_i = u_e$) のときには, (44') を用いて

$$\lambda_H \sim \sqrt{\rho_+ \rho_-}$$

という結果を得る。

(44)と§3の ϕ_B に関する議論から判るように, electron は殆ど magnetic field によって曲げられる。一方 ion に対する magnetic field の影響は小さくて, ion は electron がひきかえすことによって生じる space charge の影響をうけて運動することになる。

一方, charge separation によって生じた electrostatic potential は殆ど (44) で与えられている。これに homogeneous solution の影響が加わって potential に少ししわがよる。この potential のしわの波長は Debye length の order のものである。

§3 では完全に neutral な solution を求めたが, ここでは surface charge の影響をしらべておこう。inhomogeneous part の影響は小さいのでおとすことにする。 ϕ の neutral に対応した solution を ψ_1 とし, わずかばかり charge up した solution を ψ_2 とする。 ϕ は linear $eq.$ であるので,

$$\psi_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} = \text{const.} \quad (45)$$

という関係を得る。plasma の充分内部では

$$\psi_1 = A_1 \sin \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{2}} \xi + \delta_1 \right)$$

$$\psi_2 = A_2 \sin \left(\sqrt{\frac{1+\tau}{2}} \xi + \delta_2 \right)$$

と書ける。したがって, (45) は

$$\sqrt{\frac{1+\tau}{2}} A_1 A_2 \sin(\delta_1 - \delta_2)$$

となる。一方(4)を用いて

$$\psi_1 \frac{d\psi_2}{d\xi} - \psi_2 \frac{d\psi_1}{d\xi} = (\varphi_1 - \varphi_n) \frac{d\varphi_2}{d\xi} - (\varphi_2 - \varphi_n) \frac{d\varphi_1}{d\xi} - (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{d\varphi_n}{d\xi}$$

を得る。これを $\xi=0$ のところでしらべておく。

$\xi=0$ では、 $\varphi_1 = \varphi_B = \varphi_n$ 、 $\frac{d\psi_1}{d\xi} = 0$ であるから、次の様な関係式が得られる。

$$(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{d\varphi_n}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \sqrt{\frac{1+\tau}{2}} A_1 A_2 \sin(\delta_1 - \delta_2) \quad (46)$$

ψ_1 と ψ_2 の差が小さい場合には

$$\delta_1 - \delta_2 \equiv -\Delta\delta$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \Delta\varphi$$

$$A_1 \approx A_2 = \varphi_0$$

として、(46)は

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_B} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2(1+\tau)}{\nu(1+\frac{m}{M})}} \frac{\varphi_0^2}{\varphi_B^2} \Delta\delta \quad (47)$$

と書ける。(47)は boundary に於ける potential の変化とそれに対応した plasma 内の potential のしわの位相のずれを結びつけている。(40') 及び Table 1 の値を用いて、最終的には

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_B} = -9.6 \left(\frac{\nu(1+\frac{m}{M})}{2(1+\tau)} \right)^2 \Delta\delta \quad (47')$$

を得る。 $\nu \ll 1$ に注意すると, plasma surfaceでの potential の変化は plasma 内部の periodic potential の位相を大きく変える。このことは, 表面の影響が plasma 内部に利いていることを示している。

こゝでは簡単なモデルの下に境界層の問題を扱ったわけであるが, collisionless plasma の場合にはたとえ plasma の速度分布が Maxwell 分布をしていても同じような結論が得られるものと思う。たと collision が利いているような場合には事情はかなり変わってくるであろう。

References

- 1) R. Garwin, A. Rosenbluth and M. Rosenbluth, LA-1850
 L. Tonks, Phys. Rev., 113, 400, 114, 637
 V.N. Zhigulev, Doklady, 134, 1313
 V.P. Shabanskij, Sov. Phys. JETP, 13, 746
 A.I. Morozov and L.S. Solovév, Sov. Phys. JETP, 13, 927
 E.G. Harris; Nuovo Cimento, 23, 116
 H. Grad, Phys. of Fluids, 4, 1366
 W. Paskievici, A. Sestero and H. Weitzner, N.Y.O-9193
 G. Schmidt and D. Finkelstein, Phys. Rev. 126, 5
 G. Laval and R. Pellat, EUR-CEA-FC-No.184
- 2) 伏見, 矢島, 都築, 核融合研究, 6, 137, 7, 435