磁場中プラズマの横波*

加地 都夫(北大工), 鬼頭 正史(電試), 小沢 保知(北大工)**
(1964年5月20日 受理)

Abstract

A dispersion relation for transverse plasma waves propagating along a uniform external magnetic field is obtained in the form of an algebraic equation, for an anisotropic velocity distribution.

$$\left[\left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 - \left(\frac{kc}{\omega_p} \right)^2 \right\} \cdot \left\{ \frac{\omega}{\omega_p} \pm \frac{\Omega}{\omega_p} \right\} - \frac{\omega}{\omega_p} \right] \times \left[\frac{\omega}{\omega_p} \pm \frac{\Omega}{\omega_p} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{c} \right)^2 \left(\frac{kc}{\omega_p} \right)^2,$$

where ω_p is the plasma frequency, Ω the cyclotron frequency, and $\sigma_1^2 = \frac{2\pi T_{\perp}}{m}$.

When the range of variable kc/ω_p and parameters σ_1/c , Ω/ω_p is taken such that

* Transverse Plasma Waves in a Magnetic Field

** Ikuo Kaji (School of Engineering, University of Hokkaido)
Masafumi Kito (Electrotechnical Laboratory)
Yasutomo Ozawa (School of Engineering, University of Hokkaido)

$$kc/\omega_p = 0, 0.5, \dots, 9.5, 10,$$

$$\sigma_{\perp}/c = 2^n \times 10^{-1}; n = 0, -1, \dots, -7, -8, -\infty,$$

$$\Omega/\omega_p = 2^n; n = 4, 3, \dots, 0, \dots, -7, -8, -\infty$$

the dispersion relation is solved by the use of the digital computer (HIPAC-103). For the right-handed circularly polarized waves, the dispersion curves are described and the stable region of transverse waves are determined for several parameters.

The dispersion curves consist of two modes of electromagnetic waves, and of modes of growing and damped waves which oscillate in cyclotron frequency. In the absence of the external magnetic field, the growing waves with cyclotron frequency become spontaneously growing waves which was obtained by E.S. Weibel.

§1 まえがき

外部磁場のないとき E.W. Weibel¹⁾ はプラズマ及びマクスウェル方程式から出発して平衡分布に異方性のあるとき、プラズマ中の横波に指数的に増大する不安定のあることを見出し、D. Fried²⁾ はこの不安定の起る物理的機構を議論した。又 F.D. Kahn³⁾ は横波と縦波の結合状態に注目して横波の安定を議論している。次に一様外部磁場があるとき、磁場に平行に進むプラズマ中の横波の安定性は異方性平衡分布に対して P.D.N. Noerdlinger⁴⁾ により又一般平衡分布に対しては我々⁵⁾ により議論されている。これらは全て分散式に不安定根の存在する条件を定性的に求めた議論である。

定量的に数値計算により分散曲線を求める試は、異方性平衡分布にコーシー分布を採用し、波数 k を複素数に、角周波数 ω を実数とした場合 H.B. Liemohn & F.L. Scarf⁶⁾ により行われた。然し彼等はプラズマ内に生じる磁場を省略したので精密な結果ではないように思われる。 k を実数、 ω を複素数として磁場入りプラズマ中の横波の分散曲線を画き、横波の安定を議論する問題は今迄の所、余り行なわれていないようである。

我々は外部磁場に平行に進むプラズマ中の横波の分散式から出発して異方性平行分布

磁場中プラズマの横波

$f_0 = \frac{N}{\pi \sigma_{\perp}^2} \exp \left\{ -\frac{v_{\perp}^2}{\sigma_{\perp}^2} \right\} \times \delta(v_{\parallel})$ に対して、電子計算機 (HIPAC-103) を使って分散曲線を求める。得られた分散曲線は左右の circularly polarized waves の各々に対して、通常の 2 本の電磁波型分散曲線の他に、ほぼサイクロトロン周波数で振動しながら振動的に増大及び減少する分散曲線から成立っている。§2 で横波の分散式を求め、§3 でえられた分散曲線の検討が行われ、横波の安定領域が種々のパラメーターに対して画かれる。なお異方性平衡分布として、コーシー分布を採用した場合の分散曲線の計算は実行中である。

§2 分散式

一様外部磁場のもとで、外部磁場に平行に進むプラズマ中の横波の分散式をブラソフ及びマクスウェル方程式から求める。議論はイオン運動を無視し電子運動に限る。

e_x, e_y, e_z を x, y, z 方向の単位ベクトルとして外部磁場を z 方向にとる。電場、磁場、及び電子の分布函数を線型化する。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 0 + \vec{E}_1(\vec{x}, t), \quad \vec{B} = e_z B_0 + \vec{B}_1(\vec{x}, t), \\ f(\vec{x}, \vec{v}, t) &= f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{x}, \vec{v}, t). \end{aligned} \quad (1)$$

(1) で添字 0 は平衡状態を、又添字 1 をもつ量は次の変動をするものとする。

$$p_1 \exp \{ i k z - i \omega t \} : \text{Im}(\omega) > 0 \quad (2)$$

速度空間に円柱座標

$$\vec{v} = e_x w \cos \phi + e_y w \sin \phi + e_z u \quad (3)$$

を導入すると式(1), (2), (3)のもとでブラソフ方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \frac{e}{m} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

は次のようになる。

$$\frac{\partial f_1}{\partial \phi} + \frac{i}{\Omega} (ku - \omega) f_1 = \frac{e}{\Omega m} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4)$$

但し $\Omega = eB_0/mc$, $e = |e|$. (4) 式の ϕ に関する周期解は次で与えられる。⁷⁾

$$f_1(\phi) = \frac{e}{\Omega m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \frac{ku - \omega}{\Omega} (\phi - \phi') \right\} \left\{ \mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1 \right\} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} d\phi', \quad (5)$$

但し

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} = e_x \cos \phi' \frac{\partial f_0}{\partial w} + e_y \sin \phi' \frac{\partial f_0}{\partial w} + e_z \frac{\partial f_0}{\partial u}.$$

一方マクスウェル方程式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{v} f_1 d^3 v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2}$$

は式(1), (2), (3)のもとで次のように書き直せる。

$$(\omega^2 - c^2 k^2) \mathbf{E}_1 = 4\pi e \omega \int \mathbf{v} f_1 d^3 v. \quad (6)$$

(5) 式を (6) 式に代入し f_1 を消去するとプラズマ中の横波の分散式をえる。

$$k^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 + \left(\frac{\omega_p}{c} \right)^2 \left\{ 1 \pm \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_0(\mathbf{v} \pm \Omega/k)}{k v - \omega} d\mathbf{v} + \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_2'(\mathbf{v} \pm \Omega/k)}{k v - \omega} d\mathbf{v} \right\} = 0, \quad (7)$$

但し

$$g_{2\ell} = \frac{2\pi}{N} \int_0^\infty w^{2\ell+1} f_0(w, u) dw = \frac{1}{N} \iint v_\perp^{2\ell} f_0(v_\perp, v_\parallel) d^2 v_\perp; \ell = 1, 2.$$

平衡分布として次のような異方性をもったものを考える。

磁場中プラズマの横波

$$f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{N}{\pi \sigma_{\perp}^2} \exp \left\{ - \left(\frac{v_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \right)^2 \right\} \delta(v_{\parallel}) \quad (8)$$

但し $\sigma_{\perp}^2 = 2 \kappa T_{\perp} / m$ は異方性を示す量である。分布 (8) に対して分散式 (7) は次のように無次元化された形に書き改められる。

$$\begin{aligned} & \left[\left\{ \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 - \left(\frac{k c}{\omega_p} \right)^2 \right\} \cdot \left\{ \frac{\omega}{\omega_p} \pm \frac{\Omega}{\omega_p} \right\} - \frac{\omega}{\omega_p} \right] \times \left[\frac{\omega}{\omega_p} \pm \frac{\Omega}{\omega_p} \right] \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{\perp}}{c} \right)^2 \left(\frac{k c}{\omega_p} \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式で ω を $-\omega$ で置換えると複号の一方をもつ分散式は他の分散式に移る。従って複号は負符号 (right-handed circularly polarized waves) のものだけを扱うことにする。

§ 3 分散曲線と増大率

分散式 (9) を充す ω のうち、その虚部が正であればプラズマ中の横波は不安定となる。今外部磁場が存在しないときには ($\Omega = 0$)、(9) 式は次式のようになり、指数型増大の不安定根の存在がわかる。

$$\frac{\omega}{\omega_p} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{k c}{\omega_p} \right)^2 \right\}} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{k c}{\omega_p} \right)^2 \right\}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{\perp} k}{\omega_p} \right)^2} \quad (10)$$

(10) 式は Weibel¹⁾ によって求められた結果である。冷たいプラズマ ($\sigma_{\perp} = 0$) の場合

(10) 式は通常の電磁場型分散式 (11) になり、この場合横波は安定である。

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (11)$$

分散式 (10) の 4 根は異方性の影響を受けた電磁波動を示す 2 つの振動根と異方性の存在により始めて生ずる指数的増大又は減少をあらわす根から成立っており、此等に対応して 4 本の分散曲線がえられる。分散式 (9) に戻って、外部磁場の存在が分散曲線に及ぼす影響を調べよう。

まずパラメーター Ω / ω_p 、 $\sigma_{\perp} / c$ の範囲を定める。 $\Omega / \omega_p = \text{Debye length} / \text{gyration radius}$ であるから、その最大値として 10 程度とすることにする。又最高温度と

加地・鬼頭・小沢

して 10^8 °K 程度をとることにすれば, $\sigma_{\perp}/c$ の最大値は 10^{-1} 程度となる。そこでパラメタ $-\Omega/\omega_p, \sigma_{\perp}/c$ として次の値を採用することにした。

$$\frac{\Omega}{\omega_p} = 2^n; n = 4, 3, \dots, 0, \dots, -7, -8, -\infty. \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_{\perp}}{c} = 2^n \times 10^{-1}; n = 0, -1, \dots, -7, -8, -\infty.$$

次に変数 kc/ω_p は 0.5 きざみで 10 までとる。

$$\frac{kc}{\omega_p} = 0, 0.5, \dots, 9.5, 10. \quad (13)$$

(12) のパラメタ及び (13) の変数に対して, 分散式 (9) は ω に関する実係数 4 次方程式となる。此等の代数方程式のすべての根を HIPAC-103 を用いて計算した。4 根を大さの順に Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 とする。但し Y は ω/ω_p を表わす。 Y_1, Y_4 は実根, Y_2, Y_3 は実根又は共軛複素根である。従って $\text{Im}Y_2$ があれば横波は不安定である。図・1 は得られた結果の一部に対して縦軸に ω/ω_p を, 横軸に kc/ω_p をとり, Ω/ω_p 及び $\sigma_{\perp}/c$ をパラメタとしてプラズマ中の横波の分散曲線を描いたものである。又図・2 で横波の増大率をパラメタとして安定及び不安定領域を $\sigma_{\perp}/c, \Omega/\omega_p$ 空間の中に地図化した。

記号表

ω : 角周波数	Ω : サイクロトロン周波数
$\sigma_{\perp}$: 外部磁場に垂直方向 の平均熱速度	C : 光速
ω_p : プラズマ角周波数	k : 波数
$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 = \omega/\omega_p$	

図・1-a は外部磁場のないとき ($\Omega = 0$), 即ち Weibel の結果に対する分散曲線である。 Y_1, Y_4 が電磁波型振動根, Y_2 が指数型不安定根, Y_3 が指数型安定根に対応する分散曲線である。図・1-b, 図・1-c, 図・1-d に異方性 ($\sigma_{\perp}$) 一定, 外部磁場増大に対する分散曲線の変化を示した。逆に磁場一定, 異方性増大に対する分散曲線の変化は図・1-e と図・1-f で与えられる。此等の分散曲線において, $\text{Re}Y_i$ は i モードの振動部分を, $\text{Im}Y_i$ は同じモー

磁場中プラズマの横波

図・1-a

図・1-b

図・1-c

図・1-d

図1 プラズマ中横波の分散曲線

図・2 横波の増大率と安定及び不安定領域。図中のパラメータは増大率 $\text{Im} \omega / \omega_p$ の大きさを示す。

磁場中プラズマの横波

一の減衰又は増大部分を表わす。図・1の分散曲線から次の結果をえる。

〔A〕 異方性一定，磁場増大

- Ⅰ) 指数型不安定根 Y_2 ，又は安定根 Y_3 に対応する分散曲線は外部磁場の導入により，それぞれサイクロトロン周波数に近い振動数をもった振動的不安定根又は安定根に対応する分散曲線に移る。此等をそれぞれ Y_2 ， Y_3 モードとよぶ。
- Ⅱ) 外部磁場の増大と共に安定な波数 k の範囲が増大する。
- Ⅲ) Y_3 モードには群速度に負の領域がある。然し不安定の発生と共に正の群速度に移行し波数 k の増大と共に群速度は0に近づく。
- Ⅳ) 電磁波型振動根 Y_1 ， Y_4 に対する分散曲線に分離が生じ，この傾向は磁場と共に増大する。此等をそれぞれ Y_1 ， Y_4 モードとよぶ。
- Ⅴ) 磁場の増大につれて Y_2 ， Y_3 モードは Y_1 ， Y_4 モードに接近する。

〔B〕 磁場一定，異方性増大

- Ⅰ) 異方性の増大につれて不安定の増大率，及び不安定領域が増加する。
- Ⅱ) Y_1 ， Y_4 モードは異方性にあまり影響されない。

次に図・2から次の結果をえる。

〔C〕 不安定領域

- Ⅰ) 波数 k の大きい程不安定領域は増す。
- Ⅱ) 波数 k の大小に拘らず，異方性の減少及び外部磁場の増大に対して不安定領域から安定領域への移行は急激である。

参 考 文 献

- 1) E.S. Weibel; Phys. Rev. Letters 2, 83 (1959).
- 2) D. Fried; Phys. of Fluid 2, 337 (1959).
- 3) F.D. Kahn; J. Fluid Mech 14, 321 (1962).
- 4) P.D. Noerdlinger; Phys. Rev 118, 879 (1960).
- 5) 加地，鬼頭，物理学会講演（秋1961）
- 6) H.B. Liemohn and F.L. Scarf; Phys. of Fluid 6, 388 (1963).
- 7) I.B. Bernstein; Phys. Rev. 109, 10 (1958).
- I. Kaji and M. Kito; J. Phys. Soc. Japan. 15 1851 (1960).