軸方向に磁化された円柱プラズマからのマイクロ波輻射 II^{*}

下 村 昇 ・ 三 谷 健 次 (京大教養) **

(1964年10月19日 受理)

§ 1 序

磁場中プラズマからのマイクロ波輻射は、そのプラズマの状態、観測条件等により種々興味ある結果を示す。我々は先に、サイクロトロン共鳴の高調波発生について詳しく報告したが、その際、主として、第2高調波の近傍に、更に細かい構造をもつ輻射の現われることにも触れた。¹⁾²⁾³⁾⁴⁾

また、我々は電子温度を考慮しない場合に、プラズマの振動から輻射への転換を Bernstein の方法⁵⁾を用いて考察し、境界の存在によって外部の輻射場では、プラズマ振動数及び hybrid frequency はプラズマの半径により幾分ずれることを示した。⁶⁾ 本論文は温度を考慮した上で、前回同様の方針に従って計算を進めたものである。すなわち、線型化された Boltzmann 及び Maxwell の方程式を、時間に対しては Laplace 変換をとり、空間に対しては Fourier 解析を用い⁷⁾ プラズマ内部の電場と外部のそれとを適当な境界条件によって結び合わせる⁸⁾ という方法である。我々はプラズマ中の横波のみについて考察した結果、hybrid frequency 近傍において、境界の存在によって生じた微細な構造を見出したのでこのことについて簡単に報告する。

§ 2 基礎方程式

Boltzmann の方程式において、衝突項を無視し、波動ベクトルは x 軸方向に、定常な外部一様磁場は z 軸方向に、定

* Microwave Radiation from a longitudinally Magnetized Cylindrical Plasma

** Noboru Shimomura & Kenji Mitani
(Yoshida College, University of Kyoto)

常な外部一様磁場は z 軸方向にとる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

方程式を綿型化するため，電子の分布関数 f ，電場 $\mathbf{E}$ 及び磁場 $\mathbf{B}$ に対して次のようにかく。

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= f_0(\mathbf{v}) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし， f_0 は Maxwell の分布関数で

$$f_0(\mathbf{v}) = N_0 \left(\frac{m}{2\pi K T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m \mathbf{v}^2}{2 K T} \right)$$

添字 0 は定常状態の量，1 は微小変動量を表わしている。(2) を (1) に代入して，

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 - \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \Omega \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

Ω はサイクロトロン振動数である。

ここで，空間に対しては Fourier，時間に対して Laplace の変換を行う。

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} F^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) \quad (4-1)$$

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, s) = \int_0^\infty dt e^{-st} F^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) \quad (4-2)$$

$\mathbf{E}_1$ ， $\mathbf{B}_1$ についても同様の形をとる。これらの変換によって (3) は次のようになる。

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{s + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_x}{\Omega} F = \frac{1}{\Omega} \left\{ \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + F^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t=0) \right\} \quad (5)$$

また，Maxwell の方程式：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ c \nabla \times \mathbf{B} &= 4\pi \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

軸方向に磁化された円柱プラズマからのマイクロ波輻射Ⅱ

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \rho &= -e \int f d^3v \\ \mathbf{j} &= -e \int f \mathbf{v} d^3v \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

は(4)の変換によって

$$\left. \begin{aligned} B_x(\mathbf{k}, s) &= 0 \\ i\mathbf{c}\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, s) &= -s\mathbf{B}(\mathbf{k}, s) + \mathbf{B}^*(\mathbf{k}, t=0) \\ i\mathbf{c}\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, s) &= -4\pi e \int F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, s) \mathbf{v} d^3v + s\mathbf{E}(\mathbf{k}, s) - \mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t=0) \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, s) &= -4\pi e \int F(\mathbf{k}, \mathbf{v}, s) d^3v \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7) から $\mathbf{B}$ を消去し $\mathbf{E}$ に関する次式をうる。

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, s) = \mathbf{a} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに } \mathbf{K} &= (s^2 + c^2 k^2) \mathbb{I} - c^2 \mathbf{k}\mathbf{k} - \frac{4\pi e^2 s}{\Omega m} \int d^3v \int d\theta' G \frac{\partial f_0(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \mathbf{v} \\ \mathbf{a} &= s\mathbf{E}^*(\mathbf{k}, t=0) + i\mathbf{c}\mathbf{k} \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k}, t=0) + \frac{4\pi es}{\Omega} \int d^3v \mathbf{v} \int d\theta' G \cdot \mathbf{F}^*(\mathbf{k}, \mathbf{v}', t=0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$\mathbb{I}$ は単位マトリックス, G は(5)を解くときに導入した積分因数である。¹⁾ すなわち,

$$G = \exp \left[-\frac{s}{\Omega} (\theta - \theta') - \frac{i k v_x}{\Omega} (\sin \theta - \sin \theta') \right] \quad (10)$$

§ 3 $\mathbf{K}$ と $\mathbf{a}$

K_{ij} は $\lambda = \frac{KT}{m} \cdot \frac{k^2}{\Omega^2} \ll 1$ という仮定を用いると

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= s^2 + \omega_p^2 \frac{s^2}{s^2 + \Omega^2} \left(1 - \lambda \frac{3\Omega^2}{s^2 + 4\Omega^2} \right) \\ K_{12} &= -\omega_p^2 \frac{s\Omega}{s^2 + \Omega^2} \left(1 - \lambda \frac{6\Omega^2}{s^2 + 4\Omega^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_{21} &= -K_{12} \\
 K_{22} &= s^2 + c^2 k^2 + \omega_p^2 \frac{s^2}{s^2 + \Omega^2} \left(1 - \lambda \frac{\Omega^2}{s^2} \frac{s^2 - 8\Omega^2}{s^2 + 4\Omega^2} \right) \\
 K_{13} &= K_{23} = K_{31} = K_{32} = 0 \\
 K_{33} &= s^2 + c^2 k^2 + \omega_p^2 \left(1 - \lambda \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

今, 初期条件として, 電子の初期分布が, 波数 k_1 の 0 次の Bessel 関数で与えられるものとする。

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t=0) = N_1 \left(\frac{m}{2\pi K T} \right)^{3/2} J_0(k_1 x) \exp\left(-\frac{m v^2}{2 K T}\right) \quad (12)$$

これより $\mathbf{a}$ の各成分は, $k_1^2 > k^2$ なる条件のもとに,

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_x &= s E_x^*(k, t=0) - i \lambda \frac{2 e N_1}{\sqrt{k_1^2 - k^2}} \cdot \frac{s}{k} \cdot \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} \\
 \alpha_y &= s E_y^*(k, t=0) - i c k B_z^*(k, t=0) - i \lambda \frac{2 e N_1}{\sqrt{k_1^2 - k^2}} \cdot \frac{\Omega}{k} \cdot \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} \\
 \alpha_z &= s E_z^*(k, t=0) + i c k B_y^*(k, t=0)
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(11) 及び (13) より (8) は

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{a} \quad (14)$$

z 成分のみは他の 2 成分と分離して解くことが出来る。

§ 4 Ordinary wave

(14) より直に,

$$E_z(k, s) = \frac{\alpha_z}{K_{33}} \quad (15)$$

(4-2) の逆変換から

$$E_z^*(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} e^{st} \cdot \frac{\alpha_z}{K_{33}} ds \quad (16)$$

$K_{33} = 0$ の根を $s = s_n$ とし, K'_{33} で s に関する微分を表わすと $K_{33} = (s - s_n) K'_{33} + \dots$
結局, (16) は

$$E_z^*(k, t) = e^{s_n t} \left(\frac{\alpha_z}{K'_{33}} \right)_{s=s_n} \quad (17)$$

この E_z^* を電場に対する (4-1) に用いて

$$E_{1z}(x, t) = \int dk e^{ikx + s_n t} \left(\frac{\alpha_z}{K'_{33}} \right)_{s=s_n} \quad (18)$$

ここに, s_n は k の関数である。(17) より

$$E_z^*(k, t=0) = \left(\frac{\alpha_z}{K'_{33}} \right)_{s=s_n}$$

であるから, (18) はまた次のように書いてもよい。

$$E_{1z}(x, t) = \int dk e^{ikx + s_n t} E_z^*(k, t=0) \quad (19)$$

今, 電場の初期条件として, 波数 k_2 の 0 次の Bessel 関数を仮定する:

$$E_{1z}(x, t=0) = A J_0(k_2 x) \quad (20)$$

A はある定数である。

(4-1) の形の変換から

$$E_z^*(k, t=0) = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^2 - k^2}}$$

従って,

$$E_{1z}(x, t) = \frac{A}{\pi} \int dk e^{ikx + s_n t} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^2 - k^2}}, \quad k_2^2 > k^2 \quad (21)$$

この積分を実行して実部をとれば，プラズマ内部における電場を知る事が出来る。一方外部における解は(21)の右辺でプラズマに特有なすべての量を0とおけばよい。

E_{1z} は境界に接線的であり，その成分は(6)の第2式より境界を通じて連続しなければならない。プラズマの半径をRで表わせば，この要請は次のように書ける。

$$\frac{A}{\pi} \int dk e^{ikR + s_n t} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^2 - k^2}} = \frac{A}{\pi} \int dk e^{ikR - ickt} \cdot \frac{1}{\sqrt{k_2^2 - k^2}} \quad (22)$$

任意の時刻において，常に上式が成立つためには $R_e(e^{ikR}) = \cos kR = 0$

$$\therefore k = \frac{\pi}{2R} (2m+1), m=0, 1, 2 \dots \quad (23)$$

すなわち，プラズマの境界では常に振巾が0となって内部に定在波が立ち，その波数は(23)で示されるように制限される。

ここに用いた s_n は， $K_{33}=0$ よりえられた一つの根で， λ^2 までとると，

$$-s_n^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 + \lambda \omega_p^2 \frac{\Omega^2}{\omega_p^2 + c^2 k^2 - \Omega^2} - \lambda^2 \frac{\Omega^4}{\omega_p^2 + c^2 k^2 - \Omega^2} \left\{ \frac{\omega_p^2}{(\omega_p^2 + c^2 k^2 - \Omega^2)^2} - \frac{3}{\omega_p^2 + c^2 k^2 - 4\Omega^2} \right\} \quad (24)$$

このとき，(24)の他に，その支配的な項が $(n\Omega)^2$ なる形の振動数が二つえられるが，いずれも外部には出ない。

§ 5 Longitudinal wave と Extraordinary wave

longitudinal wave と extraordinary wave は外部磁場を通じて結合している。

(14) より

$$E_x(k, s) = \frac{\begin{vmatrix} a_x & K_{12} \\ a_y & K_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad E_y(k, s) = \frac{\begin{vmatrix} K_{11} & a_x \\ K_{21} & a_y \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (25)$$

ただし， $\Delta = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}$

軸方向に磁化された円柱プラズマからのマイクロ波輻射Ⅱ

これらを § 4 と全く同様な方法で、逆変換によってもとの E_1 に戻す。

$$\begin{aligned}
 E_x^*(k, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} E(k, s) ds \\
 &= e^{s_0 t} \left[\frac{\begin{vmatrix} a_x & K_{12} \\ a_y & K_{22} \end{vmatrix}}{\Delta'} \right]_{s=s_0} \\
 \therefore E_x^*(k, t=0) &= \left[\frac{\begin{vmatrix} a_x & K_{12} \\ K_{21} & a_y \end{vmatrix}}{\Delta'} \right]_{s=s_0} \\
 \text{同様にして,} \quad E_y^*(k, t=0) &= \left[\frac{\begin{vmatrix} K_{11} & a_x \\ K_{21} & a_y \end{vmatrix}}{\Delta'} \right]_{s=s_0}
 \end{aligned} \tag{26}$$

(26) の右辺は (11) 及び (13) から

$$\begin{aligned}
 E_x^*(k, t=0) &= - \frac{f \cdot K_{22} + \{ i c k B_z^*(k, t=0) + g \} \cdot K_{21}}{\Delta' - s(K_{11} + K_{22})} \Big|_{s=s_0} \\
 E_y^*(k, t=0) &= \frac{f \cdot K_{21} - \{ i c k B_z^*(k, t=0) + g \} K_{11}}{\Delta' - s(K_{11} + K_{22})} \Big|_{s=s_0} \\
 \text{ここに, } f &= \lambda e N_1 \frac{2i}{\sqrt{k_1^2 - k^2}} \cdot \frac{s}{k} \cdot \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} \\
 g &= \lambda e N_1 \frac{2i}{\sqrt{k_1^2 - k^2}} \cdot \frac{\Omega}{R} \cdot \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2}
 \end{aligned} \tag{27}$$

これらを用いて、電場の x, y 成分は

$$\begin{aligned}
 E_{1x}(x, t) &= \int e^{ikx + s_0 t} \cdot E_x^*(k, t=0) dk \\
 E_{1y}(x, t) &= \int e^{ikx + s_0 t} \cdot E_y^*(k, t=0) dk
 \end{aligned} \tag{28}$$

として求められる。

ここで、共鳴周波数近傍の振動数について考察してみる。

(11) 及び (14) から、 $ck \rightarrow \infty$ のときは、電場の x , y の 2 成分の結合が解けて、縦波成分のみ残ることが容易にわかる。しかし、 ck がそれ程大きくないときは、両者はまだ弱い結合を示し、 $\Delta = 0$ は次式のように書ける：

$$s^4 + c^2 k^2 (s^2 + \omega_p^2 + \Omega^2 + \lambda \frac{\omega_p^2 \Omega^2}{c^2 k^2}) = 0 \quad (29)$$

s は純虚数でなければならないから、 $s^2 = -\omega^2$ とかき、

$$\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \eta, \quad \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 = r^2, \quad \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = \alpha, \quad \frac{KT}{mc^2} = \beta$$

とおくと、(29) は

$$\eta = (\beta - 1) \left(r^2 - 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (30)$$

ここで、温度 0 で resonance を考えると、 $\beta = 0$, $\frac{1}{\alpha} = 0$, このとき $\omega^2 = \omega_p^2 + \Omega^2$ なる分散式をうる。

さて、(30) の α , すなわち k は § 4 で見たと同様、ある境界条件によって許される値のみをとりうる。我々は extraordinary wave に興味があるので、ここでは (28) の中で第 2 式に注目することにする。被関分関数である $E_y^*(k, t=0)$ は (27) で示されているが、これの正確な表式は非常に煩雑であるため、主要部分だけを書き下してみると、

$$E_y^*(k, t=0) = -i \frac{s \left\{ \frac{2\lambda eN_1}{k\sqrt{k_1^2 - k^2}} \Omega^3 (c^2 k^2 + \omega_p^2 - 16\Omega^2) \{ c^4 k^4 + c^{10} k^{10} + c^8 k^8 (4\omega_p^2 - 22\Omega^2) + c^6 k^6 (6\omega_p^4 - 6\omega_p^2 \Omega^2) \right. \right.}{c^2 k^2 (2\omega_p^2 - 5\Omega^2) + \omega_p^4 \} - ck B^*(k, t=0) (c^2 k^2 + \omega_p^2 - 16\Omega^2) + 105\Omega^4 - 6\lambda\omega_p^2 \Omega^2) + \dots \left. \right\} \times \{ c^6 k^6 + c^4 k^4 (2\omega_p^2 - 6\Omega^2) + c^2 k^2 (\omega_p^4 - 9\omega_p^2 \Omega^2 + 9\Omega^4) + \dots \}}{c^2 k^2 (2\omega_p^2 - 5\Omega^2) + \omega_p^4 \} - ck B^*(k, t=0) (c^2 k^2 + \omega_p^2 - 16\Omega^2) + 105\Omega^4 - 6\lambda\omega_p^2 \Omega^2) + \dots \times \{ c^6 k^6 + c^4 k^4 (2\omega_p^2 - 6\Omega^2) + c^2 k^2 (\omega_p^4 - 9\omega_p^2 \Omega^2 + 9\Omega^4) + \dots \}}$$

カスプ型磁界中のプラズマに対する複探針測定

$E_{1\psi}$ は境界に対して接線的であるから、 E_{1z} と同様 $E_{1\psi}$ もプラズマの境界を通じて連続でなければならない。すなわち、 $x=R$ において、 $E_{1\psi}$ の実部が任意の時刻において等しくなければならないことから、この場合は

$$\sin k R = 0$$

$$\therefore k = \frac{n\pi}{R}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

従って、(30)の α は(32)で与えられる不連続な値をもつことになる。Fig.1には、 $\omega = 2\pi f$, $f = 10^{10}$ cycle/s, $R = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$ の場合の分散関係を、いくつかの n の値に対してプロットした。 $\beta \neq 0$ のときは、各直線の n 軸との交点是不動に保ちつつ、その勾配を僅かにゆるやかにする。

Fig.1

下 村 ・ 三 谷

最後に、本研究について、終始懇篤な指導を賜った京都大学多田政忠教授に厚く御礼を申し上げると共に、常に熱心な討論をして下さった名古屋大学プラズマ研究所田中茂利助教授、京都大学久保熙氏並びにグループの諸兄に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 田中, 三谷; 核融合研究 7 '61 167, 376
- 2) 三谷, 久保, 田中; 核融合研究 9 '62 267
- 3) 三谷, 久保, 田中; 核融合研究 9 '62 188
- 4) 三谷, 久保, 田中, 暁道; J. Phys. Soc. Japan 19 '64 211, 221
- 5) I.B. Bernstein & S.K. Trehan; Nuclear Fusion 1.3 '60
- 6) 下村, 三谷; 核融合研究 11 '63 11
- 7) I.B. Bernstein; Phys. Rev. 109 10
- 8) J.A. Stratton; Electromagnetic Theory- 360