Axially Symmetrical Unsteady Motion of Plasma in a
Non Uniform Magnetic Channel

浜田 繁 雄 (日大理工)*

(1964年10月26日受理)

Abstract

A successive approximation method is proposed. The method is small β expansion. The plasma is assumed to be an infinitely conductive ideal gas. The hydromagnetic equations are rewritten in a time-dependent curvilinear coordinate system, the one family & coordinate lines of which attaches the field lines frozen with the plasma. The resultant equations are separable into two systems of equations. One of the systems is essentially representing a one dimensional problem along each magnetic line of force. This problem is solvable in itself by numerical calculations when the time variation of the field is already known. The other system

* S. HAMADA (Department of Physics and Atomic Energy Research
Institute, College of Science and Engineering, Nihon University,
Tokyo).

of equations describes that the Lorentz' force $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ must balance the other forces perpendicular to the lines of force; pressure gradient, inertia, centrifugal force and Coriolis force. These circumstances enable us to do iteration when a zeroth order magnetic field, for example, vacuum field, is known and β is sufficiently small compared to unity. The proposed method should be carefully examined in relation to the singularity appearing in the case of small Alfvén number, however, that is now under way.

§. 序 論

時間的に変化する軸対称非均一磁場中の電導度無限大の理想流体の運動を考える。一般に流体は常に磁力線に凍りついて運動する。そこで、一本の細い力線の内部の流体は、恰も、細いパイプの中に流体があって、そのパイプの各部分の断面積やパイプの形状が時間的に変化する場合の運動と全く同じように考えられるであろう。特にパイプの断面積や形状の変化があらかじめ与えられている場合には、このような流体の運動は、パイプの外で何が行われているかには全く関係なく、定まってしまうであろう。その結果として、流体は一次元の運動方程式によって支配されることになる。磁場の変動があらかじめ与えられている時には、パイプの断面積は磁束密度に反比例し、パイプの形状は力線の形状に相当する。このような類推は完全に正しいことが、この論文の中で証明される。そうして、着目された方程式がみちびかれる。すべての力線についての、この方程式の解の集合は、三次元の解を与える。しかし、それでは磁場に対する流体の反作用はどこへ行ったのか？ と云う疑問が起る。この疑問は正しい。このことは、若し、磁場の変動が全く任意に与えられた場合には、上のようにして得た三次元の解は、力線に垂直な二つの方向の圧力勾配、磁気圧勾配、磁気張力、力線の加速度による慣性抵抗、流体が曲率を持った力線に沿って運動することによる遠心力、力線の方が時間と共に変化することによるコリオリの力、の

Axially Symmetrical Unsteady Motion of Plasma in a Non Uniform Magnetic Channel

間の釣合条件を満足していないことのうちに反映される。そこで之等の釣合が満足されるように磁場を補正せねばならない。この補正項は、若しも、第零近似としての磁場を真空磁場とし、また流体の全エネルギー密度の外場のそれより充分小さければ、外場よりも小さくすむであろう。補正された磁場について、再び同じことを繰返せば、より正確な解に近づくであろう。磁場の補正は、次のようにして行われる。磁場が流体におよぼす力を電流密度と磁場の積の形に書き、力線に垂直方向の方程式を立てる。磁場が与えられていると、釣合に必要な電流密度の成分は単に代数的な手続きで求めることが出来る。この電流値から磁場の補正が求められる。

力線に沿っての一次元の方程式を求めるためには、理想磁気流体方程式を時間的に変化する曲線座標系で表現し、ついで、流体に凍りついて変動し、しかも座標線の一組が力線と一致しているような座標系に移ることによって行われる。

§ 2 磁気流体方程式の共変形式

この節から第6節までは、軸対称性を仮定しない。曲線座標系への変換を容易ならしめるために、磁気流体方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla P + \mathbf{B} \times \mathbf{j} = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P \rho^{-\gamma}) + \mathbf{v} \cdot \nabla (P \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (2.6)$$

を時空四次元空間でのテンソル方程式に書直す。但し、ここで $\rho, \mathbf{v}, P, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \gamma$ は夫々流体の密度、速度、圧力、磁場の強さ、電流密度、比熱の比、である。三次元直交座標を x_1, x_2, x_3 とし、 $t = x_0$ と書く。

更に、速度、磁場、電流密度のベクトル成分を夫々 (v^1, v^2, v^3) , (B^1, B^2, B^3) , (J^1, J^2, J^3) とし、之等に対する四元ベクトルを夫々、

$$v \rightarrow (1, v^1, v^2, v^3) \quad (2.7)$$

$$B \rightarrow (0, B^1, B^2, B^3) \quad (2.8)$$

$$j \rightarrow (0, J^1, J^2, J^3) \quad (2.9)$$

で定義する。そうすると、(2.1)と(2.2)は一つの式

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho v^\alpha v^\beta) + \Delta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} P + \sigma^\alpha_{\beta\gamma} B^\beta J^\gamma = 0 \quad (2.10)$$

にまとめられる。但しギリシヤ字の添字は0から3までの値を取り、同じ添字については0から3までの和を取るものとする。また、 $\Delta^{\alpha\beta}$ は

$$\Delta^{\alpha\beta} = \Delta^{\alpha 0} = 0, \quad \Delta^{ij} = \delta_{ij} \quad (2.11)$$

で定義される。但し、 δ_{ij} はクロネッカーの δ で、英小文字の添字は今後1から3までの値を取るものとする。更に $\sigma^\alpha_{\beta\gamma}$ は、 α, β, γ について逆対称なテンソルであって、

$$\sigma^\alpha_{\beta\gamma} = -\sigma^\alpha_{\gamma\beta} = -\sigma^\beta_{\alpha\gamma} \quad (2.12)$$

であり、また、

$$\sigma^0_{\beta\gamma} = 0 \quad (2.13)$$

更に

$$\sigma^1_{23} = 1 \quad (2.14)$$

と定義される。

次に、(2.3)は

$$J^\alpha = \frac{1}{4\pi} \sigma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial B^\gamma}{\partial x_\beta} \quad (2.15)$$

となり、(2.4)と(2.5)はまとめて、

Axially Symmetrical Unsteady Motion of Plasma in a Non Uniform Magnetic Channel

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (B^{\alpha} v^{\beta} - B^{\beta} v^{\alpha}) = 0 \quad (2.16)$$

となり, (2.6) は,

$$v^{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (P \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (2.17)$$

となる。(2.10) で $\alpha = 0$ とおけば (2.1) が得られ, その他のときは, (2.2) となる。また, (2.16) で $\alpha = 0$ とおけば, (2.4) になり, その他のときは, (2.5) になる。

§ 3 曲線座標系への変換

直交座標系 (x_0, x_1, x_2, x_3) から曲線座標系 $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ への変換を考えよう。
但し, 時間については,

$$x_0 = \xi_0 \quad (3.1)$$

でその他については,

$$x_i = x_i(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (3.2)$$

とする。但し, (3.2) の右辺は必要な階数まで連続的に微分可能な任意関数であって, しかもヤコビアン

$$\sqrt{g} = \frac{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \quad (3.3)$$

は零でないとする。このような変換に対して前節の諸量は一定の変換を受ける。 x 座標での諸量は今後左側に添字 0 をつけて示すことにする。

ρ はスカラー密度とする。従って

$$\rho = \sqrt{g_0} \rho \quad (3.4)$$

である。 P はスカラーとする。

$$P = {}_0 P \quad (3.5)$$

v^α と B^α は 反変ベクトルであるとする。従って、例えば、

$$B^\alpha = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} \circ B^\beta \quad (3.6)$$

である。

J^α は反変ベクトル密度であるとする。従って、

$$J^\alpha = \sqrt{g} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\beta} \circ J^\beta \quad (3.7)$$

である。変換 (3.1) と (3.2) に対しては、常に

$$v^\circ = 1, \quad B^\circ = J^\circ = 0 \quad (3.8)$$

であることは (3.6) と (3.7) から容易にたしかめられる。

更に、 $\Delta^{\alpha\beta}$ は反変二次のテンソル密度であるとする。従って、(2.11) によって、

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha\beta} &= \sqrt{g} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\delta} \circ \Delta^{\gamma\delta} \\ &= \sqrt{g} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.9)$$

である。(3.9) から

$$\Delta^{\circ\beta} = \Delta^{\alpha\circ} = 0, \quad \Delta^{\alpha\beta} = \Delta^{\beta\alpha} \quad (3.10)$$

なる性質の保存されていることが判る。

次に $\sigma^\alpha_{\beta\gamma}$ は反変一次共変二次のテンソルであるとする。従って、(2.12) と (2.13) 及び (2.14) から

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha_{\beta\gamma} &= \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\delta} \frac{\partial x_\eta}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial x_\theta}{\partial \xi_\gamma} \circ \sigma^\delta_{\eta\theta} \\ &= \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\gamma} \circ \sigma^i_{jk} \quad (i \neq j \neq k) \end{aligned}$$

Axially Symmetrical Unsteady Motion of Plasma in a
Non Uniform Magnetic Channel

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_\beta} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_\beta} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_\beta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_\gamma} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_\gamma} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_\gamma} \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

である。(3.11)から,

$$\sigma^0_{\beta\gamma} = 0 \quad (3.12)$$

$$\sigma^\alpha_{\beta\gamma} = -\sigma^\alpha_{\gamma\beta} \quad (3.13)$$

なる性質の保存されていることが判る。

次に曲線座標系への変換には所謂 affine 接続の係数 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ が入って来るが、今の場合空間が平らで、 x -座標系はその測地座標であるから、 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial x_\delta}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial x_\eta}{\partial \xi_\gamma} \\ &= -\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\eta} \frac{\partial^2 x_\eta}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma} \\ &= -\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\gamma} \end{aligned} \quad (3.14)$$

但し、最後の式は(3.1)から得られる。(3.14)は $\xi = x$ のとき $\Gamma = 0$ となることを示している。また常に、

$$\Gamma^0_{\beta\gamma} = 0 \quad (3.15)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \quad (3.16)$$

なることは容易に見られる。

以上の準備により， ξ -座標での方程式は直ちに書下される。即ち，(2.10)は，

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (\rho_v \alpha_v^\beta) + \Delta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \beta_\beta} P + \sigma_{\beta\gamma}^\alpha B^\beta J^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \rho_v^\beta v^\gamma = 0 \quad (3.17)$$

となり，(2.15)は，

$$J^\alpha = \frac{\sqrt{g}}{4\pi} \sigma^{\alpha\beta}{}_\gamma \left(\frac{\partial B^\gamma}{\partial \xi_\beta} - \Gamma_{\delta\beta}^\gamma B^\delta \right) \quad (3.18)$$

となり，(2.16)は

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \sqrt{g} (B^\alpha v^\beta - B^\beta v^\alpha) = 0 \quad (3.19)$$

となり，(2.17)は

$$v^\beta \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (P \rho^{-\gamma} \sqrt{g}{}^\gamma) = 0 \quad (3.20)$$

となる。但し(3.18)の $\sigma^{\alpha\beta}{}_\gamma$ は，反変二次共変一次のテンソルで

$$\sigma^{\alpha\beta}{}_\gamma = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\delta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_\eta} \frac{\partial x_\theta}{\partial \xi_\gamma} \sigma^\delta{}_\theta \quad (3.21)$$

で

$$\sigma^{\alpha\beta}{}_\gamma = -\sigma^{\beta\alpha}{}_\gamma \quad (3.22)$$

$$\sigma^{\alpha\beta}{}_\gamma = \sigma^{\alpha\beta}{}_\gamma = 0 \quad (3.23)$$

なる性質がある。

§ 4 凍りつき座標

ξ_1 を動かして得られる座標線がすべて力線に一致している場合を考えよう。このとき，

$$B^0 = B^2 = B^3 = 0 \quad B^1 \neq 0 \quad (4.1)$$

である。

このとき，(3.19)は，

$\alpha = 0$ のとき，

Axially Symmetrical Unsteady Motion of Plasma in a
Non Uniform Magnetic Channel

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\sqrt{g} B^1) = 0 \quad (4.2)$$

$\alpha=1$ のとき,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} (\sqrt{g} B^1) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\sqrt{g} B^1 v^2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (\sqrt{g} B^1 v^3) = 0 \quad (4.3)$$

$\alpha=2, 3$ のとき,

$$\frac{\partial v^2}{\partial \xi_1} = 0, \quad \frac{\partial v^3}{\partial \xi_1} = 0 \quad (4.4)$$

となる。但し(4.3) (4.4)を導くとき(4.2)を使用する。(4.4)は、 v^2 と v^3 が ξ_0, ξ_2, ξ_3 のみの函数であることを示している。それ故、 ξ_2, ξ_3 座標を適当に選んでやれば、一般性を失わずに、

$$v^2 = 0, \quad v^3 = 0 \quad (4.5)$$

とおけることを意味している。このように一組の座標線が力線に一致していても流体に凍りついて動くような座標をあらためて、 $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ と書くことにする。すると、(4.2)と(4.3)は夫々

$$\frac{\partial}{\partial \eta_1} (\sqrt{g} B^1) = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_0} (\sqrt{g} B^1) = 0 \quad (4.7)$$

となる。この二つの式の物理的な意味は次のようにすれば明かである。まず力線に沿って測った長さを ℓ とすれば

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \ell} \sqrt{g} d\eta_2 d\eta_3$$

は $d\eta_2 d\eta_3$ に対応する面積である。力線方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。(4.6) (4.7)の両辺に $d\eta_2 d\eta_3$ をかけて、 $\xi_2 - \xi_3$ 曲面上の任意の閉曲線で囲まれた面上で積分すると

$$\int \sqrt{g} B^1 d\eta_2 d\eta_3 = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \frac{\partial \eta_1}{\partial \ell} \sqrt{g} d\eta_2 d\eta_3 = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds = \text{一定} \quad (4.8)$$

が一定であることが判る。すなわち η 座標に固着した力管中の磁束は力線に沿って、また時間的にも一定である。これは、力線に沿った座標が η 座標であるための必要条件である。(4.6) (4.7)

が満足される以上は、 η_2, η_3 を適当にえらぶと

$$\frac{\partial}{\partial \eta_2} (\sqrt{g} B^1) = \frac{\partial}{\partial \eta_3} (\sqrt{g} B^1) = 0 \quad (4.8)$$

即ち $\sqrt{g} B^1$ が一定であるような座標にすることが可能である。今後は η 座標と云えば(4.8)をも満足するものとする。即ち

$$\sqrt{g} B^1 = 1 \quad (4.9)$$

においても一般性を失わない。さて、 η 座標が存在することは以上の議論によって明かであるが、この座標で、(4.9)と(4.5)を成立させておけば(4.2)、(4.3)、(4.4)即ち、(3.19)が自動的に満足していることになる。従って吾々は残りの(3.17)、(3.18)、(3.20)だけを考えればよいことになる。一般の場合に、 η 座標を求める間はしばらくおくとして、軸対称でしかも対称軸が力線と一致している場合には、磁場が与えられさえすれば、 η 座標を求めることは容易であろう。それには対称軸を中心に回転面を作り、その上で η_2 一定とし、 η_3 は軸のまわりの回転角に比例するようにとればよい。

§ 5 力線に沿っての運動

η 座標では方程式(3.20)は、(4.5)によって、

$$\frac{\partial}{\partial \eta_0} (P \rho^{-r} \sqrt{g}^r) + v_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} (P \rho^{-r} \sqrt{g}^r) = 0 \quad (5.1)$$

或は

$$\frac{\partial}{\partial \eta_0} (P_0 \rho^{-r}) + v_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} (P_0 \rho^{-r}) = 0 \quad (5.2)$$

となる。ここには、 η_1 座標線上での諸量と、その方向のベクトル成分のみが表われていることに注意すべきである。次に、(3.17)について調べよう。 $\alpha = 0$ とおき、(4.5)、(2.7)、(3.10)

(3.12)、(3.15)によって、 $\alpha = 0$ のとき、

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\beta} (\rho v^\beta) = \frac{\partial \rho}{\partial \eta_0} + \frac{\partial}{\partial \eta_1} (\rho v^1) = 0 \quad (5.3)$$

を得る。この式も(5.2)と同じように力線に沿っての情報だけをふくんでいる。

Axially Symmetrical Unsteady Motion of Plasma in a
Non Uniform Magnetic Channel
次に、共変ベクトル B_α を

$$B_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} B^\beta \quad (5.4)$$

によって導入する。よく知られているように

$$B_\alpha B^\alpha = |B|^2 \quad (5.5)$$

が成立する。特に η 座標では、

$$B_1 B^1 = |B|^2 \quad (5.6)$$

である。 η_1 を力線に沿った長さ ℓ に等しいとすれば、

$$B_1 = B^1 = |B| \quad (5.7)$$

である。

また、(3.9) と (3.6)、(5.4) によって、

$$B_\alpha \triangle^{\alpha\beta} = B^\beta \sqrt{g} \quad (5.8)$$

である。次に、(2.12) によって、

$$B_\alpha \sigma^\alpha_{\beta\gamma} B^\beta J^\gamma = \sigma^\alpha_{\beta\gamma} B^\alpha J^\gamma = 0 \quad (5.9)$$

である。更に、 η 座標で $\eta_1 = \ell$ とすれば、

$$\begin{aligned} B_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \rho^\beta v^\gamma &= - B^i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_0 \partial \eta_0} \rho + 2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_1 \partial \eta_0} \rho v^1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_1 \partial \eta_1} \rho v'^2 \right) \\ &= - B^i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_0^2} \rho = - |B| \frac{\partial x_i}{\partial \eta_1} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_0^2} \rho \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。但し、(3.14) を保った。 $\frac{\partial x_i}{\partial \eta_1} \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_0^2}$ は、力線方向の加速度成分であり、これを a とかけば、 η 座標で、

$$B_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \rho^\beta v^\gamma = - |B| a \rho \quad (5.10')$$

となる。(3.17)の両辺を B_α で縮約すれば、(4.8)、(4.5)、(5.7)、(5.8)、(4.1)、(5.9) (5.10)によって、

$$\rho \frac{\partial v^1}{\partial \eta_0} + \rho v^1 \frac{\partial v^1}{\partial \eta_1} + \frac{\partial P}{\partial \eta_1} - a \rho = 0 \quad (5.11)$$

を得る。この方程式も力線に沿っての情報だけをふくんでいる。(5.1)或は(5.2)と、(5.3)と (5.11)は、磁場を与えればそれ自身で閉じた一組の方程式である。これ等の式を物理的意味が 明かになるように書いておく。そのため $\eta_0 = t$ 、 $\eta_1 = \ell$ とし、 ρ を ${}_0\rho$ で書き、また v^1 は 通常の相対的の速さに一致していることに注意して v と書き、(4.9)を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial t} ({}_0\rho^{-r}) + v \frac{\partial}{\partial \ell} ({}_0\rho^{-r}) = 0 \quad (5.2')$$

$$\frac{\partial {}_0\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \ell} ({}_0\rho v) - \frac{{}_0\rho}{B} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{{}_0\rho v}{B} \frac{\partial B}{\partial \ell} = 0 \quad (5.3')$$

$${}_0\rho \frac{\partial v}{\partial t} + {}_0\rho v \frac{\partial v}{\partial \ell} + \frac{\partial P}{\partial \ell} - a {}_0\rho = 0 \quad (5.11')$$

となる。

§ 6 力線に垂直な方向の方程式

さて、残った方程式は、(3.17)の $\alpha = 2$ と3の場合と、(3.18)である。前者についてみる と、 η 座標では、(4.5)によって第一項が消える。(3.9)によって、

$$\Delta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} P = \sqrt{g} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad (6.1)$$

を得る。右辺は、 $\alpha = 2, 3$ に対して、力線に垂直な方向の圧力勾配に比例した量である。次 に(3.14)によって

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \rho v^\beta v^\gamma = - \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_0^2} \rho + 2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_0 \partial \eta_1} \rho v^1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \eta_1^2} \rho v'^2 \right) \quad (6.2)$$

を得る。右辺第一項は、力線の加速度による慣性抵抗、第二項はコリオリの力、第三項は遠心 力の力線に垂直な成分に比例している。但し、 $\eta_1 = \ell$ としたときの話である。(3.17)によると 之等の力が電流と磁場の力につり合っていることになる。今

Axially Symmetrical Unsteady Motion of Plasma in a
Non Uniform Magnetic Channel

$$A^\alpha = \Delta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \eta_\beta} P + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \rho v^\beta v^\gamma \quad (6.3)$$

とおく。(A^α はベクトルでないことに注意しなければならない。) そうすると力線に垂直な方向の方程式は、 η 座標で、

$$\begin{aligned} \sigma^2_{1\gamma} J^\gamma &= -A^2/B^1 \\ \sigma^3_{1\gamma} J^\gamma &= -A^3/B^1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

となる。この方程式で右辺は既知であり、また、(3.13)によって式中には、 J^1 が入っていないので、 J^2 と J^3 について解くことが出来る。

即ち、

$$J^2 = -\frac{1}{B^1} \frac{\begin{vmatrix} A_2 & \sigma^2_{13} \\ A^3 & \sigma^3_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma^2_{12} & \sigma^2_{13} \\ \sigma^3_{12} & \sigma^3_{13} \end{vmatrix}} \quad (6.5)$$

$$J^3 = -\frac{1}{B_1} \frac{\begin{vmatrix} \sigma^2_{12} & A^2 \\ \sigma^3_{12} & A^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma^2_{12} & \sigma^2_{13} \\ \sigma^3_{12} & \sigma^3_{13} \end{vmatrix}} \quad (6.6)$$

となる。こうして η 座標で、(6.5)と(6.6)を満足するような、 J^2 と J^3 を取れば、(3.17)は満足されることになり、残るのは、(3.18)だけである。 x 座標にもどって考えることにより、

$$(3.18) \text{ から } \frac{\partial J^\alpha}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial J^\alpha}{\partial \eta_\alpha} = 0 \quad (6.7)$$

がみちびかれる。(6.7)から(6.5)と(6.6)によって

$$\frac{\partial J^1}{\partial \eta_1} = S \quad (6.8)$$

とおいたときの S の値が既知函数として知られる。力線が閉じていないときは、(6.8) から常に J^1 が求まる。(unique ではない。)

§ 7 軸対称な場合の逐次近似法

この場合には、前述の方法により、 η 座標が求められる。そこで、(5.2) (5.3) (5.11) を数値的に解いて A^2 と A^3 を求め (6.5) と (6.6) によって J^2 と J^3 を求める。対称性から $J^1 = 0$ とおく。そのようにしても (6.7) が満足されていることは明かである。こうして求まった J の値は、流体のエネルギー密度の磁場のそれに対する比の程度であることは (6.5) と (6.6) から判る。従ってそれから求めた磁場の補正も同程度の小ささを有する。

終りに、川上一郎氏が熱心に討論して下さいたことを感謝いたします。

尙この研究は、谷内先生が力線に垂直な方向の力の釣合を考えなければならないことを指摘されたことが動機となって行なわれたことを付記し、感謝いたします。