「乱れたプラズマの非線型輸送理論について」^{*}

西川 恭治 (京大理)^{**}

(1966年1月20日受理)

Abstract

The nonlinear kinetics of waves in a weakly turbulent classical plasma is investigated from a quantum mechanical viewpoint. It is shown that the lowest order nonlinear effects in the long wave length region arise not only from the Compton scattering of plasmons by electrons, which is the only process previously considered, but also from the absorption and emission of plasmons accompanied by a collision between two electrons. The latter has an effect to smooth out the spectral distribution of the waves, while the former (the Compton scattering process) exhibits two distinct effects depending on the magnitude of the total wave energy E ; for E smaller than a certain critical value E_c the Compton scattering process smooths out the wave distribution, while for E greater than E_c the wave energy is directed towards the longest wave length region. The value of E_c is roughly estimated to be four times the thermal level.

* On the Nonlinear Kinetics in A Weakly Turbulent Plasma

** K. Nishikawa

Dept. of Physics, Kyoto University

§ 1 序

乱れたプラズマにおける波のスペクトル分布を求める問題は、最近、Kadomtsev¹⁾ 及び Frieman-Rutherford²⁾ によって、詳しい理論的考察が進められてきた。外場のない電子プラズマについて、今迄得られた結論の本質的な部分を要約すると次のようになる。

- 1) 長波長領域での非線型効果の最低次は、波の粒子によるコンプトン散乱の過程で現われる。
- 2) コンプトン散乱の効果は、波のエネルギーを長波長領域へ集める方向に働く。

一方、長波長領域では、線型効果（ランダウ減衰と波の自然放出）は指数関数的に小さいので、上の結論によると、励起された波のエネルギーは長波長領域に止めどなく累積される事になる。

本稿では、上の結論を、量子論的観点から批判的に検討し、次の点を指摘する。

- 1) 長波長領域でコンプトン散乱と同程度の効果をもつものとして、粒子間衝突に伴う波の生成・消滅の過程が存在する。この過程は、波のスペクトル分布を一様な分布に近づける方向に働く。
- 2) 仮にコンプトン散乱に話を限っても、今迄知られている項の他に、波のエネルギーを短波長へ運ぶ働きをする項が存在し、コンプトン散乱全体としての効果は、波の全エネルギーがある臨界値以下では一様な分布に、又臨界値以上では長波長に集中する方向に働く。

以下、§ 2 では一般的考察、§ 3 ではボルツマン方程式に基く議論を行い、§ 4 でそれをまとめる。

§ 2 一般的考察

一樣な、外場のない電子プラズマを考える。イオンは連続媒質として扱う。乱れが充分弱ければ、この系は、互いに弱い相互作用をする個別電子とプラズモンから成ると考える事ができよう。そこで、量子論的描像に立って、この系のハミルトニアンを次のように表わそう。

$$H = H_e + H_p + H_{ee} + H_{ep} + H_{pp}$$

ここに H_e 及び H_p は、夫々、自由な個別電子及びプラズモンのハミルトニアン、 H_{ee} 、 H_{ep} 及び H_{pp} は、夫々、個別電子間相互作用、個別電子とプラズモンの相互作用及びプラズモン間の相互作用を表わす。我々はこの相互作用の部分に興味をもつ。

まず、最低次の相互作用は H_{ee} 及び H_{ep} より現われる。この中プラズモンの関与する H_{ep} のみを考えると、最低次は、第一図に示される個別電子によるプラズモンの生成・消滅の過程である。ここに実線は個別電子、波線はプラズモンを表わし、矢印はその進行方向、 k 及び q は個別電

「乱れたプラズマの非線型輸送理論について」

子及びプラズモンの波数を表わす。この過程は、通常、線型又は準線型過程と呼ばれ、ランダウ減衰及びプラズモンの自然放出の項を与える。これらが長波長領域で指数関数的に小さくなる事は、すでに指摘した通りである。

波の間の相互作用は H_{ep} の2次及び H_{pp} から初めて現われる。この中、 H_{pp} の最低次で考えられる3ケのプラズモンが関与する過程は、今の場合選択則で禁じられており、それ以外の H_{pp} の効果はより高次でしか現われないので、 H_{pp} は省略する事にする。 H_{ep} の2次の効果としては、2ケのプラズモンの同時発生(第二図(a))、同消滅(同(b))及びプラズモンの個別電子によるコンプトン散乱(同(c))の三つが考えられるが、この中最初の二つは長波長領域では指数関数的に小さいので省略する事にしよう。すると残るのはコンプトン散乱だけである。

第一図 プラズモンの個別電子による生成・消滅

(a) プラズモンの同時発生

(b) プラズモンの同時消滅

(c) プラズモンの個別電子によるコンプトン散乱

第二図 H_{ep} の2次効果

第三図 H_{cc} と H_{ep} の混成効果

しかし、波の間の相互作用の他に、相互作用の2次には、 H_{cc} と H_{ep} の混成項が存在する。これは、第三図に示すように、個別電子間衝突にプラズモンの生成・消滅が伴って起る効果を表わす。この効果は、コンプトン散乱と同様、長波長領域へ行っても指数関数的に小さくなる事はない。しかもこの効果は、仮に長波長領域に波が集まってくれば、それを減衰させる方向に働くであろう。

§ 3 ボルツマン方程式による考察

以上の考察を、ボルツマン方程式に立脚して今少し詳しく調べてみよう。準線型近似の範囲内の解析はすでになされているので、³⁾ ここでは相互作用の2次の効果に限る事にする。

1) コンプトン散乱

個別電子及びプラズモンのエネルギー・スペクトルを ϵ_k 及び $\hbar\omega_q$ ($\hbar$ はプランク常数 h を 2π で割ったもの)、それらの分布関数を F_k 及び N_q とすると、第二図(c)の散乱過程を表わす衝突項は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} N \right)_I &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{q'} \sum_k |V(q, q', k)|^2 \times \\ &\quad (q' < q_c) \\ &\quad \delta(\epsilon_{k+q-q'} - \epsilon_k + \hbar(\omega_{q'} - \omega_q)) \times \\ &\quad \{ N_{q'} (1 + N_q) F_{k+q-q'} (1 - F_k) \\ &\quad - N_q (1 + N_{q'}) F_k (1 - F_{k+q-q'}) \} \end{aligned} \quad (1)$$

と表わされる。ここに $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{k})$ は考えている散乱過程に対応する相互作用の行列要素で、Bohm-Pines 理論⁴⁾によれば、古典的極限

$$\hbar \mathbf{q} \rightarrow 0, \hbar \mathbf{q}' \rightarrow 0, \hbar \mathbf{k} \rightarrow m \mathbf{v} \text{ (有限)} \quad (2)$$

(m 及び $\mathbf{v}$ は電子の質量及び速度) において $\hbar \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}$ 程度の値をもつ。 q_c は適当な上限で、今の場合デバイ波長の逆数に選ぶ。ここで(2)の極限をその他の諸量にも適用し、

$$F_{\mathbf{k}} \rightarrow \left(\frac{\hbar}{m}\right)^3 f(\mathbf{v}), \quad \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \left(\frac{m}{\hbar}\right)^3 \int d\mathbf{v},$$

$$(F_{\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - F_{\mathbf{k}}) \rightarrow \left(\frac{\hbar}{m}\right)^3 \frac{\hbar(\mathbf{q}-\mathbf{q}')}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v})$$

$$(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}'} - \epsilon_{\mathbf{k}}) \rightarrow \hbar(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot \mathbf{v}$$

$$2\pi |V(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{k})|^2 \rightarrow \hbar^2 W(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{v})$$

$$N_{\mathbf{q}} \rightarrow E_{\mathbf{q}} / (\hbar \omega_{\mathbf{q}}) \equiv I_{\mathbf{q}} / \hbar$$

とおくと、(1)式は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} I_{\mathbf{q}}\right)_I &= \sum_{\mathbf{q}'} \int d\mathbf{v} W(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{v}) \delta[\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}'} - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{v}] \times \\ &\quad (\mathbf{q}' < q_c) \\ &\quad \left\{ I_{\mathbf{q}} I_{\mathbf{q}'} \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}) - (I_{\mathbf{q}} - I_{\mathbf{q}'}) f(\mathbf{v}) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに $f(\mathbf{v})$ は電子の速度分布関数、 $I_{\mathbf{q}}$ は波数 $\mathbf{q}$ のプラズマ振動のエネルギーをその振動数 $\omega_{\mathbf{q}}$ で割ったものである。右辺第1項(波のエネルギーについて2次の項)は、Kadomtsev¹⁾ 及び

2) Frieman-Rutherford²⁾ によって求められたものと同型である。この項が波のエネルギーを長波長方向に運ぶ働きをする事は、すでに調べられている通りである。注目すべきは(3)式右辺第2項(波のエネルギーについての線型項)の存在である。この項は、在来の理論のように熱的揺動の効果をも不完全に取り扱ったのでは得られない項で、(3)式から明らかなように、第1項で長波長へ選ばれた波を短波長へもどす役割をする。

そこで(3)式全体としての効果を見るために、コンプトン散乱以外の効果をすべて無視して、(3)式の定常解を求めてみよう。まず $(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}'})$ は $(q^2 - q'^2)$ 程度の微量であるから、速度積分は $\mathbf{v}$ の小さい処のみがきくであろう。そのような速度領域では $f(\mathbf{v})$ は温度 T のマクスウェル分布で近似してよいとすると、

$$\frac{(q - q')}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}) = \frac{(q - q') \cdot \mathbf{v}}{\kappa T} f(\mathbf{v}) = \frac{\omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}'}}{\kappa T} f(\mathbf{v})$$

(κ はボルツマン常数)と書かれる。これを(3)に代入すると、定常解として、

$$I_{\mathbf{q}} = \frac{\kappa T}{\omega_{\mathbf{q}} - \alpha} \quad (4)$$

がえられる。ここに α は、波の全エネルギーを E として、

$$E = \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} I_{\mathbf{q}} \quad (5)$$

($q < q_c$)

できる定数だが、 $I_{\mathbf{q}} \geq 0$ の条件から

$$\alpha \leq \omega_0 \quad (\text{プラズマ振動数})$$

でなければならない。一方、 $\alpha = 0$ はプラズモンの熱平衡分布を与え、且つ E は α の単調増大関数であるから、乱れのある状態では $\alpha > 0$ が期待される。

ところで、(4)は、 α の値、従って E の値に応じて、2つの異った特徴を示す。即ち、まず $\alpha < \omega_0$ 、或は E が小さい処では、 $I_{\mathbf{q}}$ は長波長領域では定数 $\kappa T / (\omega_0 - \alpha)$ をとり、波のエネルギー分布はほぼ一様となる。これに対して、 $\alpha \rightarrow \omega_0$ 或は E が大きい処では、波のエネルギーは最長

波長の領域に累積される。これは、完全ボーズ気体のボーズ凝縮の現象に対応するものである。*)

そこで、最長波長への凝縮の起る臨界エネルギー E_c を評価してみよう。

$$\omega_{\mathbf{q}} = \omega_0 (1 + q^2 / q_c^2)$$

と近似すると、ロンドンのボーズ凝縮の理論⁵⁾との類推から、

$$E_c = \frac{V}{8\pi^3} \int_{q < q_c} d\mathbf{q} \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{q}} - \omega_0} = 4 E_{eq} \quad (6)$$

がえられる。ここに V は体積、又 E_{eq} は熱平衡状態に於ける波の全エネルギーである。

II) 個別電子間衝突に伴うプラズモンの生成・消滅

前と同じ記号で、第三図の過程に対応するボルツマン方程式をたてると、次式ようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} N_{\mathbf{q}} \right)_{II} = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{q}'} \quad |V(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \times \\ & (q' > q_c) \\ & \delta[\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}'+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} - \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}'} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}] \times \\ & \{ F_{\mathbf{k}+\mathbf{q}'+\mathbf{q}} F_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} (1-F_{\mathbf{k}}) (1-F_{\mathbf{k}'}) (1+N_{\mathbf{q}}) \\ & - F_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}'} (1-F_{\mathbf{k}+\mathbf{q}'+\mathbf{q}}) (1-F_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}'} N_{\mathbf{q}} \} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで行列要素 $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ は $q \rightarrow 0$ では $\sqrt{\hbar} q$ に比例する。ここで前と同様の古典的極限をとるわけだが、それが意味のある結果をうるためには

$$\hbar \mathbf{q}' \rightarrow 0, \quad \hbar \mathbf{k}' \rightarrow m\mathbf{v}' \quad (\text{有限})$$

*) (4)は、励起エネルギー・スペクトル $(\omega_{\mathbf{q}} - \omega_0) \hbar$ ，化学ポテンシャル $(\alpha - \omega_0) \hbar$ の完全ボーズ分布の古典的極限に他ならない。

としなければならない。以下前と同様の処方で次式をうる。

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{\mathbf{q}} \parallel = \sum_{\mathbf{q}'} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}' W(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{v}, \mathbf{v}') \delta[(\mathbf{q}' + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{v}' - \omega_{\mathbf{q}}] \times$$

$$(\mathbf{q}' > \mathbf{q}_c) \quad (8)$$

$$\left\{ I_{\mathbf{q}} \left[\frac{(\mathbf{q}' + \mathbf{q})}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\mathbf{q}'}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right] + 1 \right\} f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}')$$

ここに

$$2\pi |\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \rightarrow \hbar W(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{v}, \mathbf{v}')$$

とおいた。

(8)式の右辺は $I_{\mathbf{q}}$ に関する一次式であるから、(8)の定常解は簡単に求められる。今、長波長の極限 ($q \rightarrow 0$) では $\mathbf{q}$ は $\mathbf{q}'$ に比べて無視でき、 $\omega_{\mathbf{q}}$ は ω_0 で近似できる事、及び $W(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{v}, \mathbf{v}') \sim q^2 W(\mathbf{q}', \mathbf{v}, \mathbf{v}')$ という近似を用いると、(8)の定常解は $\mathbf{q}$ によらない定数となる。従って、(8)で表わされる過程は、波のエネルギー分布を長波長領域で一様分布に近づける方向に働く事が分る。

§ 4 結 語

以上の結果を要約すると、

- i) 非線型相互作用による波のエネルギー分布の緩和過程は、長波長領域での最低次では、波の個別電子によるコンプトン散乱の過程と、個別電子間衝突に伴う波の生成・消滅の過程とから成る。
- ii) コンプトン散乱の効果は、波の全エネルギー E がある臨界値 E_c 以下では波のエネルギー分布を一様分布に近づける方向に働き、 E_c 以上では、長波長極限に集める方向に働く。 E_c の値は、熱平衡値の4倍程度である。
- iii) 粒子間衝突に伴う波の生成・消滅の過程は、波のエネルギー分布を一様分布に近づける方向に働く。

上の結論は、しかしながら、現実の波の定常分布については何も明らかにしていない。実際、定常分布をきめるには、まず速度分布関数の形がきまらなければならない。これは、今の場合、暗に外的条件(例えば粒子源)によって与えられているとしている。更に、仮に速度分布関数が与えら

「乱れたプラズマの非線型輸送理論について」

れたとしても、現実の定常分布をきめるには、上にのべた二つの非線型過程に準線型過程を加えたものの複雑な複合効果を考慮に入れなければならない。例えば、 $E < E_c$ においては、逆ランダウ減衰による波（長波長領域）の励起、コンプトン散乱等による励起された波の再分配（一様化）、短波長領域でのランダウ減衰、というサイクルが考えられる。一方、 $E > E_c$ では、逆ランダウ減衰で励起された波は、コンプトン散乱で長波長極限へ運ばれ、それが粒子間衝突に伴う波の生成・消滅過程で短波長へ引きもどされる、というサイクルが考えられる。このようなサイクルのより定量的な考察は、今後の問題として考えて行きたい。なお、この報告で量子論的に導いた緩和方程式 (3) 及び (8) は、純粹に古典的リウビル方程式からも導く事ができ、それについては、プロGRESSに近く投稿する予定である。

最後に、この研究の初期段階での重大な誤りを指摘して下さい Nozières 教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) B.B. Kadomtsev, Plasma Turbulence, Academic Press, London and New York, (1965).
- 2) E. Frieman and P. Rutherford, Ann. Phys. 28, 134 (1964).
- 3) D. Pines and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 125, 804 (1962).
- 4) D. Bohm and D. Pines, Phys. Rev. 92, 609 (1953).
- 5) F. London, Superfluid II, John Wiley & Sons, Inc. New York, and Chapman & Hall, Limited, London (1954).