カusp磁場中の高速プラズマ流

田中正俊

(日本原子力研究所)

(1966年11月1日受理)

Synopsis

High-speed plasma flow in a cusped geometry is investigated in the free-particle approximation to get some clue to the injection of a rarefied plasma into a cusped magnetic field. The density distribution of the plasma in a plane perpendicular to the axis of the field, say $z = z_0$, is known and plasma ions there have a Maxwellian distribution of velocities. Our aim is to calculate the ion density in the downstream flow. The collision-free Boltzmann equation is solved successively by assuming that the flow velocity is much larger than the mean thermal velocity of the ions. When the radial density distribution at $z = z_0$ is gaussian the downstream density distribution turns out also gaussian and its amplitude oscillate along the axis with a period of the order of $4V/\Omega_0$, where V is the flow velocity and Ω_0 is the ion cyclotron frequency at $z = z_0$.

* High-speed Plasma Flow in a Cusped Magnetic Field

** Masatoshi Tanaka (Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Ibaraki-ken)

1. はじめに

カスプ磁場におけるプラズマのふるまいを理解する手がかりとして、そこでの荷電粒子の運動がしらべられている(たとえば^{1) - 4)})。前論文⁵⁾で磁場中へのうすいプラズマの膨脹の問題が自由粒子近似でとかれ、例として強さが軸方向にゆっくり変化する軸対称磁場にたいして、プラズマの膨脹過程がWKB法によりやや詳しく検討された。しかし弱い磁場領域の存在するカスプ磁場にたいしては、WKB法は適用できない。

ここでは(真空中の)カスプ磁場中における高速プラズマ流を対象とする。磁場の軸に垂直な一つの平面においてプラズマの密度分布をあたえる。またそこでイオンはマックスウェル分布とする。われわれの目的は下流におけるプラズマ密度の決定である。実験ではプラズマ流は軸に平行でその速さはイオンの平均熱速度よりずっと大きいことが多い。ここではプラズマの流速がイオンの熱速度を大巾に上まわると仮定して、イオンの運動方程式を逐次近似でとくことにする。面倒な自己場の計算 — これはとくに電子の運動には本質的と思われる — はしない。以下イオンのみ考える。

2. 磁 場

つぎの軸対称磁場を考える。

$$\vec{B} = \left(-\frac{\alpha}{2} x, -\frac{\alpha}{2} y, \alpha z \right) . \quad (1)$$

これはコイルを無限遠にもっていった極限での(真空)カスプ磁場である。

3. 解 法

イオンの分布函数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ は

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{Mc} \vec{v} \times \vec{B} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 , \quad (2)$$

にしたがう。ここで M, e はイオンの質量および電荷。 $z = z_0$ でのイオンの密度分布を $g(x, y)$ 、速度分布は平均速度(軸方向) V のマックスウェル分布とする。

$$f(x, y, z_0, \mathbf{v}) = N_0 \left(\frac{e^2}{\pi} \right)^{3/2} g(x, y) e^{-e^2 \{ v_x^2 + v_y^2 + (v_z - V)^2 \}} . \quad (3)$$

ここで $\ell^2 = M/2T$, T はイオン温度 (eV)。また $\int \int dx dy g(x, y) = 0$ と規格化している。 N_0 は $z = z_0$ 面内における全イオン数。

(2) の特性方程式は

$$\frac{d}{dz} v_z \frac{d\xi}{dz} + i\beta z \frac{d\xi}{dz} + \frac{i\beta}{2} \xi = 0, \quad (4)$$

$$v_z \frac{dv_z}{dz} + \frac{i\beta}{4} (\xi u^* - \xi^* u) = 0, \quad (5)$$

$$u = v_z \frac{d\xi}{dz}$$

ここで $\xi = x + iy$, $u = v_x + iv_y$, $\beta = e\alpha/Mc$ 。これをといて解を

$$\xi_0 = \xi_0(\xi, \bar{\mathbf{v}}), \quad \bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0(\xi, \bar{\mathbf{v}}), \quad (6)$$

とかく。 ξ_0 , $\bar{\mathbf{v}}_0$ は $z = z_0$ におけるイオンの位置および速度。

$z > z_0$ におけるプラズマ密度は*)

$$n(x, y, z) = N_0 \left(\frac{\ell^2}{\pi} \right)^{3/2} \iiint dv_x dv_y dv_z g(x_0, y_0) e^{-\ell^2 \{v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + (v_{z0} - V)^2\}} \quad (6)$$

*) この方法は(2)の特性方程式，すなわちあたえられた場におけるイオンの運動方程式を積分しなければならない。これは必ずしも便利でない。つぎに他の一つの方法をしめす。 $z = z_0$ における分布関数を $F_0(x, y, \bar{\mathbf{v}})$ とする。(2)の解は

$$f(x, y, z, \bar{\mathbf{v}}) = e^{-\frac{z-z_0}{v_z} \left\{ v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{Mc} \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\}} F_0 \quad (*)$$

とかける。指数の上の演算子は可換でないので面倒であるが，たとえば久保先生の定理⁶⁾を適用すれば， $z - z_0$ の巾展開として具体的な形がもとまる。

まず積分変数を v_z から v_{z0} にかえる。 $V \gg \ell^{-1}$ のとき $\exp\{-\ell^2 (v_{z0} - V)^2\}$ は $v_{z0} = V$ であるようなピークをもつ。他のスムーズな因子を $v_{z0} = V$ において積分の外に出すことができる、

$$n(x, y, z) = N_0 \frac{\ell^2}{\pi} \iint dv_x dv_y \left| \frac{\partial v_z}{\partial v_{z0}} \right| g(x_0, y_0) e^{-\ell^2 (v_{x0}^2 + v_{y0}^2)} \Big|_{v_{z0}=V}, \quad (7)$$

がえられる。他の量、たとえばイオン電流等々も同様に求められる。

4. 特性方程式の近次解

$V \gg \ell^{-1}$ と仮定して(4), (5)を逐次近似でとく。解を

$$v_z = V (= v_{z0}^0) + v_z^1 + \dots,$$

$$u = u^0 + u^1 + \dots, \quad (8)$$

$$\xi = \xi^0 + \xi^1 + \dots,$$

とかくと

$$\frac{d^2 \xi^0}{dz^2} + \frac{i\beta z}{V} \frac{d\xi^0}{dz} + \frac{i\beta}{2V} \xi^0 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dv_z^1}{dz} + \frac{i\beta}{4V} (\xi^0 u^{0*} - \xi^{0*} u^0) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \xi^1}{dz^2} + \frac{i\beta z}{V} \frac{d\xi^1}{dz} + \frac{i\beta}{2V} \xi^1 = -\frac{1}{V} \frac{d}{dz} \left(v_z^1 \frac{d\xi^0}{dz} \right), \quad (11)$$

がえられる。 $z = z_0$ で

$$\begin{aligned} v_z^1 &= v_z^2 = \dots = 0, \\ u^0 &= u_0, \quad u^1 = u^2 = \dots = 0, \\ \xi^0 &= \xi_0, \quad \xi^1 = \xi^2 = \dots = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

とおく。

(9)を積分すると

$$\xi^0 = \frac{\pi S_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{S_0}\right)^{1/4} e^{-i(S-S_0)} \left[\{ \Delta_-(S_0) J_{1/4}(S) + \Delta_+(S_0) J_{-1/4}(S) \} \xi_0 - \frac{2D}{\beta_{z_0}} u_0 \right] \quad (13)$$

$$u^0 = \frac{\pi S_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{S}{S_0}\right)^{1/4} e^{-i(S-S_0)} \left[\{ J_{-1/4}(S_0) \Delta_+(S) + J_{1/4}(S_0) \Delta_-(S) \} u_0 + \frac{\beta_{z_0}}{2} \{ \Delta_-(S_0) \Delta_+(S) - \Delta_+(S_0) \Delta_-(S) \} \xi_0 \right] \quad (14)$$

ここで

$$S = \frac{\beta_z^2}{4V}, \quad S_0 = \frac{\beta_{z_0}^2}{4V},$$

$$\Delta_+(x) = J_{-3/4}(x) - i J_{1/4}(x), \quad \Delta_-(x) = J_{3/4}(x) + i J_{-1/4}(x), \quad (15)$$

$$D = J_{-1/4}(S_0) J_{1/4}(S) - J_{1/4}(S_0) J_{-1/4}(S),$$

また $J_p(x)$ は p 次のベッセル函数。

(10)もすぐ積分できて

$$v_z^1 = -\frac{i\beta}{4V} \int_{z_0}^z dz (\xi^0 u^{0*} - \xi^{0*} u^0)$$

さらに常数変化法により(11)から

$$\begin{aligned} \xi^1 = & \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{z}{2}} e^{-\frac{i\beta z^2}{4V}} \left[J_{1/4}\left(\frac{\beta z^2}{4V}\right) \int_{z_0}^z dz z^{1/2} e^{\frac{i\beta z^2}{4V}} J_{-1/4}\left(\frac{\beta z^2}{4V}\right) \Phi(z) \right. \\ & \left. - J_{-1/4}\left(\frac{\beta z^2}{4V}\right) \int_{z_0}^z dz z^{1/2} e^{\frac{i\beta z^2}{4V}} J_{1/4}\left(\frac{\beta z^2}{4V}\right) \Phi(z) \right] \end{aligned}$$

$$u^1 = V \frac{d \xi^1}{d z} + v_z^1 \frac{d \xi^0}{d z}$$

がえられる。ここで

$$\Phi(z) = - \frac{1}{V} \frac{d}{d z} v_z^1 \frac{d \xi^0}{d z}$$

5. 下流のイオン密度

最低次の近似で $z > z_0$ でのイオン密度をもとめる。(13), (14)から

$$\xi_0 = \frac{\pi S}{\sqrt{2}} \left(\frac{S_0}{S} \right)^{1/4} e^{i(S-S_0)} \left\{ \left\{ J_{-1/4}(S_0) A_+(S) + J_{1/4}(S_0) A_-(S) \right\} \right. \\ \left. \xi^0 - \frac{2D}{\beta z} u^0 \right\}, \quad (16)$$

$$u_0 = \frac{\pi S}{\sqrt{2}} \left(\frac{S_0}{S} \right)^{3/4} e^{i(S-S_0)} \left\{ \left\{ A_-(S_0) J_{1/4}(S) + A_+(S_0) J_{-1/4}(S) \right\} u^0 \right. \\ \left. - \frac{\beta z}{2} \left\{ A_-(S_0) A_+(S) - A_+(S_0) A_-(S) \right\} \xi^0 \right\}, \quad (17)$$

がえられる。つぎに(7)の右辺の積分変数を (v_x, v_y) から (x_0, y_0) にかえる。(16)からヤコービアンは

$$\frac{\partial(v_x^0, v_y^0)}{\partial(x_0, y_0)} = \frac{2}{\pi^2 S^2} \left(\frac{S}{S_0} \right)^{1/2} \frac{\beta^2 z^2}{4 D^2}. \quad (18)$$

下流におけるイオン密度は

$$n(x, y, z) = N_0 \frac{\ell^2}{\pi} \frac{2}{\pi^2 S^2} \left(\frac{S}{S_0} \right)^{1/2} \frac{\beta^2 z^2}{4D^2} \iint dx_0 dy_0 g(x_0, y_0) \times$$

$$- \frac{\ell^2 \beta^2 z_0^2}{4D^2} \left| \frac{\sqrt{2}}{\pi S_0} \left(\frac{S_0}{S} \right)^{1/4} e^{i(S-S_0)} \varepsilon - \left\{ A_-(S_0) J_{1/4}(S) + A_+(S_0) J_{-1/4}(S) \right\} \right|^2,$$

(19)

であたえられる。

例として

$$g(x, y) = \frac{a^2}{\pi} e^{-a^2(x^2+y^2)}, \quad (20)$$

としよう。このとき

$$n(x, y, z) = N_0 \frac{a^2 A^2(S)}{\pi} e^{-a^2 A^2(S)(x^2+y^2)}, \quad (21)$$

となる。ここで

$$A^2(S) = \frac{2}{\pi^2 S_0^2} \left(\frac{S_0}{S} \right)^{1/2} \left\{ \left| A_-(S_0) J_{1/4}(S) + A_+(S_0) J_{-1/4}(S) \right|^2 + \frac{L^2 D^2}{S_0^2} \right\}^{-1},$$

$$\frac{L^2}{S_0^2} = \frac{4a^2}{\ell^2 \beta^2 z_0^2}, \quad (22)$$

である。 L^2/S_0^2 はイオンの平均ラーマー半径の $z = z_0$ におけるイオン密度分布の巾にたいする比である。

(21) から下流における径方向の密度分布はやはりガウス型で、その巾は $(aA)^{-1}$ である。軸上の“規格化”された密度 A^2 は、 z の振動函数でその周期はおよそ $4V/\Omega_0$ である。 Ω_0 は $z = z_0$ におけるイオンのサイクロトロン振動数。図 1, 2, 3 に S および L^2 をパラメタとし A^2 を S の函数としてしめす。

議論して頂いた森さんはじめ研究室の方々、とくに § 3 の脚注の問題についていろいろ教えて頂

いた岩田義一先生に感謝します。

References

- 1) G.Schmidt: Phys. of Fluids, 5 (1962) 994.
- 2) H.Grad and R van Norton: Nuclear Fusion, 1962 Supplement, Part 1, 61.
- 3) 伊藤, 松山: 核融合研究, 10 (1963) 492.
- 4) 科野: 核融合研究, 15 (1965) 35.
- 5) M.Tanaka: JAERI-memo 2302 "Expansion of a Rarefied Plasma into a Magnetic Field" (1966).
- 6) 岩波講座現代物理学 統計力学(下) p 233.

Figure Captions

The normalized ion density on the axis $A^2(s)$, eq. (22), for several values of parameters L^2 and S_0 .

Fig. 2

$$S = \frac{\beta Z^2}{4V}$$

Fig. 3

$$S = \frac{\beta Z^2}{4V}$$