衝撃波加熱ヘリウム-水素プラズマの電離平衡*

福田 国 彌(京大工)**

岡 阪 令(〃)**

藤 本 孝(京大理)***

(1967年5月18日受理)

§ 1. はじめに

よく知られているように、衝撃波によって作られたプラズマは他の方法で作られたプラズマと異なっており、初期条件と衝撃波速度を与えれば、熱平衡状態を仮定することにより、Rankine-Hugoniot の式およびSaha の電離平衡の式から、プラズマの温度、粒子密度、電離度などを計算できる。筆者等はヘリウム及びヘリウム-水素混合ガスに衝撃波を経験させることにより発生するプラズマについて電離緩和の分光測定を行なっているが、⁽¹⁾ その解析の基礎資料とするためにプラズマ中で何段階かの電離平衡のモデルを設定して、それぞれの場合について上記の計算を行ない、更にその結果から電離緩和時間を概算した。

Fig. 1に電磁衝撃波管と衝撃波のx-tダイアグラムが示してある。分光測定は反射衝撃波 '5' の部分について行なっている。なお、実験から直接衝撃波速度を求めることは困難であったので、ピストンの役割をしている放電アークプラズマの速度を用いた。その大きさはストリーク写真上から読みとられ、 $0.81 \text{ cm}/\mu\text{sec}$ であった。また、初期気圧は11 Torr、水素混入の割合は

* Ionization Equilibrium of He-H Plasma Heated by Shock Wave

** KUNIYA FUKUDA, REI OKASAKA (Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kyoto University)

*** TAKASHI FUJIMOTO (Department of Physics, Faculty of Science, Kyoto University)

3×10^{-2} , 1×10^{-2} , 3×10^{-3} , 1×10^{-3} , 1×10^{-4} , 0 , の 6 通りであり、それぞれの場合について計算を実行した。

§ 2. 基礎式

衝撃波面の前後の圧力，温度，密度，衝撃波速度は Rankine-Hugoniot の式により関係づけられる。衝撃波面での熱損失と管壁との摩擦を無視すると，質量の流れ，運動量の流れ，エネルギーの流れの保存則はそれぞれ次のように書ける。⁽²⁾

$$\rho u = \rho' u' \quad (1)$$

$$p + \rho u^2 = p' + \rho' u'^2 \quad (2)$$

$$H + \frac{1}{2} u^2 = H' + \frac{1}{2} u'^2 \quad (3)$$

ただし u は衝撃波と共に動く座標系からみた粒子の速度， ρ ， p はそれぞれ粒子の密度，圧力， H は単位質量あたりのエンタルピーであり，プライムの有無で衝撃波の後と前をあらわす。更に，電離，解離が生じているときには，その割合を決定する式が必要である。電離の場合には電離平衡が仮定できるときには Saha の電離平衡の式をつけ加えねばならない。いま，一価電離のみを考慮するとして

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{2 Z_i}{Z_a} \frac{(2 \pi \mu k T)^{3/2}}{h^3} \exp \left(- \frac{T_i}{T} \right) \quad (4)$$

または

$$\alpha = \left\{ 1 + \frac{p h^3}{(2 \pi \mu)^{3/2} (k T)^{5/2}} \frac{Z_a}{2 Z_i} \exp \left(\frac{T_i}{T} \right) \right\}^{-1/2} \quad (4')$$

ここで Z_i ， Z_a はそれぞれイオン，原子の分配函数， μ は電子とイオンの換算質量， T_i は原子の電離エネルギーを温度であらわしたもの， α は電離度である。

さらに単原子気体のみを考えると，

$$p = \rho \frac{R}{m} T (1 + \alpha) \quad (5)$$

$$H = \frac{5}{2} \frac{R}{m} T (1 + \alpha) + \alpha \frac{R}{m} T_i \quad (6)$$

R は気体定数， m は気体のグラム分子数である。気体が二成分，たとえばヘリウムと水素であるときには，それぞれの割合を x ， $y = 1 - x$ とすると ρ ， p ， H をつぎのように書きかえねばならない。

$$\rho = x \rho_{He} + y \rho_H \quad (7)$$

$$p = x p_{He} + y p_H \quad (8)$$

$$H = \frac{x m_{He} H_{He} + y m_H H_H}{x m_{He} + y m_H} \quad (9)$$

さらに Saha の式(4)をそれぞれの成分について考えねばならない。ただしそのとき n_e は共通であることに注意する。

(I) 入射衝撃波 — 領域 2 —

衝撃波速度を V_s ，衝撃波通過後の粒子速度を V_A とすれば (Fig. 1)

$$\left. \begin{aligned} u &= V_s \\ u' &= V_s - V_A \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。水素は室温では分子を作っており，それが衝撃波によってすみやかに解離すると考えられる。⁽³⁾ したがって H_H は解離度を 1 とし，

$$H_H = \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{m_H} T (1 + \alpha_{H_2}) + \alpha_{H_2} \frac{R}{m_H} T_{Hi} + \frac{R}{m_H} T_{Hdis} \quad (11)$$

T_{Hdis} は水素 1 原子あたりの解離エネルギー $= \frac{1}{2} \times 1$ 分子あたりの解離エネルギーである。

ここでつぎのことを仮定する。

“ 入射衝撃波後は，水素は解離および電離するが，ヘリウムの電離は無視できるほど小さい。 ”

(4)～(11)を代入して(1)，(2)より

$$T_2 = \frac{(1 - \frac{V_A}{V_s}) T_1 + \frac{1}{R} (x m_{He} + y m_H) V_A (V_s - V_A)}{1 + x \alpha_{He2} + y \alpha_{H2}} \quad (12)$$

同様に(3)から

$$T_2 = \frac{2}{5} \left[\frac{5}{2} T_1 + \frac{1}{R} (x m_{He} + y m_H) V_A (V_s - \frac{V_A}{2}) - y T_{Hdis} - x \alpha_{He2} T_{Hei} - y \alpha_{H2} T_{Hi} \right] / (1 + x \alpha_{He2} + y \alpha_{H2}) \quad (13)$$

ここで添字 1, 2 はそれぞれ領域 1, 2, すなわち入射衝撃波の前後をあらわす。仮定によって $\alpha_{He2} = 0$ とする。

(II) 反射衝撃波 — 領域 5 —

実験条件によれば反射衝撃波通過後はインターフェイスの速度, すなわち粒子の速度は実験室系では 0 になる。したがって, 反射衝撃波の速度を V_R (Fig. 1) とすると

$$\left. \begin{aligned} u &= V_A + V_R \\ u' &= V_R \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここでつぎのモデルを設定する。

(イ) 領域 5 —(i) 衝撃波が通過した直後は電離は進まない。したがって $\alpha_{He5} = 0$

$$\alpha_{H5} = \alpha_{H2}$$

(ロ) 領域 5 —(ii) 水素の電離緩和は完了するがそのときもまだヘリウムの電離は無視できるほど小さい。したがって, $\alpha_{He5} = 0$

(ハ) 領域 5 —(iii) ヘリウム及び水素の電離緩和が完了している。

(イ), (ロ) については(12), (13)と同様な式が T_5 について得られる。(ハ)については附録を参照されたい。ただし, 計算結果によれば $y \lesssim 10^{-2}$ のときは n_e の水素系からの寄与は $\lesssim 1/10$ であるので事実上水素の電離は無視でき, 再び(12), (13)と同様の式において $\alpha_{H5} = 0$ としたものを使用する。

§ 3. 計算の方法

(I) 入射衝撃波

V_s , T_2 , α_{H_2} を求めるべき基本式は (4'), (2), (3) の 3 式である。この 3 式を直接連立させて解くことは困難であるので、グラフ解法による。すなわち α_{H_2} をパラメーターにして (2), (3) より $T_2 = T_2(V_s)$ の関係を同一のグラフ上に描く。これにより $T_2 = T_2(V_s, \alpha_{H_2})$ の関係が求められる。それによって、適当な α_{H_2} をしたがって V_s , T_2 を (4') に代入して、イテレーションの方法で正しい解を得る。

(II) 反射衝撃波

この場合も (I) と全く同様である。

§ 4. 計算の結果, 検討

上述の計算を $y = 3 \times 10^{-2}$ の場合について実行した結果を Fig. 2 に示す。領域 5-III の $n_e(H)$, $n_e(H_2)$ はそれぞれ水素とヘリウムのイオン密度、点線および二点鎖線は $\alpha_{H_2} = 0$ として計算した値を示している。 $0 \leq y \leq 1 \times 10^{-2}$ についても同様の計算を行なった。それらの結果を水素の混入率 y を横軸にとってまとめたものが Fig. 3, Fig. 4 である。ふたたび、 $\alpha_{H_2} = 0$ として計算した結果は点線で示してある。

領域 2 においては y の値にかかわらず温度は約 1×10^4 K である。(Fig. 3) また、それは水素の電離度にも関係しない。このときの電離の進み具合を計算してみる。

一般的に、衝撃波によって加熱された気体の電離は先駆電子および高温の輻射による電離を無視すれば、最初原子-原子の衝突による電離が進み、それによって発生した電子の密度がある値に達するとその後は原子-電子衝突による電離が支配的となる。⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾ またオ-の過程において原子-原子衝突による電離は一度の衝突で完了するのではなく、一度励起状態に励起されたのち電離される過程が支配的であり、その速さを支配するのは励起が生じる速さであるといわれている。⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾

X 原子系に Y 原子系が衝突して電離が進む割合は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \frac{d n_e}{d t} &= S_{X-Y} = n_X n_Y q_{X-Y} \\
 &= n_X n_Y A_{X-Y} \sqrt{\frac{2 k T_Y}{\pi \mu_{X-Y}}} k (T_X^* + 2 T_Y) \exp\left(-\frac{T_X^*}{T_Y}\right) \quad (5)
 \end{aligned}$$

ここで衝突電離断面積は $E_X^* = kT_X^*$ から直線的に増大すると近似し, A_{X-Y} はその勾配である。そして $E_X^* = kT_X^*$ は X 原子の下限反応エネルギー (threshold reaction energy) である。しかしながら水素-ヘリウム, ヘリウム-ヘリウムについての A_{X-Y} の値は現在知られていない。したがって高エネルギーでの電離断面積,⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ 低エネルギーでのアルゴン, キセノン, クリプトンの値⁽⁸⁾⁽¹¹⁾ などから推定し, $A_{H-He} = A_{He-He} = 1 \times 10^{-20} \text{ cm}^2 / \text{eV} = 6.25 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 / \text{erg}$ とした。

水素-ヘリウム, ヘリウム-ヘリウム衝突による電離を比較してみる。 $T_{He} = 1 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$, T_H^* に水素のオー励起エネルギーを採用して $1.18 \times 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$, 同様に $T_{He}^* = 2.30 \times 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$ とすれば, $q_{H-He} = 7.51 \times 10^{-19} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$, $q_{He-He} = 1.13 \times 10^{-23} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$ となる。したがって $y = 1 \times 10^{-4}$ の場合にも電離緩和過程の初期においては水素の電離のみを考慮すれば良いことがわかる。

つぎに原子-電子衝突による電離の割合と比較する。

$$\frac{dn_e}{dt} = S_{H-e} = n_H n_e q_{H-e}^* \quad (16)$$

ここで q_{H-e}^* は水素原子-電子衝突による基底状態からオー励起状態への励起の断面積である。 $T = 1.0 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ のとき $q_{H-e}^* = 3.8 \times 10^{-14} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-1}$ ⁽¹²⁾⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾ であり, (15), (16) より

$$\frac{S_{H-He}}{S_{H-e}} = \frac{n_{He}}{n_e} \frac{q_{H-He}}{q_{H-e}^*} = 1.9 \times 10^{-5} \frac{n_{He}}{n_e} \quad (17)$$

すなわち $n_e^c = 1.9 \times 10^{-5} n_{He} = 2.7 \times 10^{13} / \text{cm}^3$ で電離の主要な過程が原子-原子衝突から原子-電子衝突に移行する。 $n_e \leq n_e^c$ のときは(15)を積分して

$$\left. \begin{aligned} n_e &= 1.45 \times 10^{14} t / \text{cm}^3 & (y = 1 \times 10^{-4}) \\ n_e &= 4.7 \times 10^{16} t / \text{cm}^3 & (y = 3 \times 10^{-2}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

一方, 光電測光は反射板から $3 \sim 10 \text{ mm}$ の点で行なっている。計算された衝撃波速度から推定すると, 観測点で静止した気体は, 入射衝撃波に繰り込まれてから $3 \sim 10 \times 10^{-6} \text{ sec}$ 経過していることになる。したがって $n_e < n_e^c$ であり, 領域 2 で水素のみが電離平衡に達したときは

$$\left. \begin{aligned} n_c &= 1.3 \times 10^{14} / \text{cm}^3 & (y = 1 \times 10^{-4}) \\ n_e &= 6.0 \times 10^{15} / \text{cm}^3 & (y = 3 \times 10^{-2}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

であることを考慮すると電離緩和はほとんど進んでいないと結論できる。したがって最初に述べた仮定は成立しないわけであり、実際の状態は(12), (13)において α_{H_2} も0と置いて解いた場合に対応する。ただしその場合でもその後の計算結果にはほとんど影響しない。

領域5においては温度がかなり高いので、非平衡電離状態では電子温度の原子温度からのずれを考慮しなければならない。 Q_a , Q_i を電子系がそれぞれ原子系, イオン系との弾性衝突によって得るエネルギーの割合として,

$$\begin{aligned} & Q_{Ha} + Q_{Hi} + Q_{Hea} + Q_{Hei} \\ &= k S_{H-e} \left(T_{Hi} + \frac{5}{2} T_e \right) + k S_{Hc-e} \left(T_{Hei} + \frac{5}{2} T_e \right) \quad (20) \end{aligned}$$

を解いて T_e を求める。計算は Q_{Ha} を無視して行い、その結果は $y < 10^{-2}$ の場合、 $n_c \leq 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ならば常に $T_e \simeq 2.3 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ である。この温度における原子-原子および原子-電子衝突による電離の断面積はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} q_{H-Hc} &= 2.0 \times 10^{-15} & (T_{Hc} = 2.57 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}) \\ q_{He-Hc} &= 2.4 \times 10^{-17} & (\quad \quad \quad " \quad \quad) \\ q_{H-e}^* &= 5.4 \times 10^{-11} & (T_e = 2.3 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}) \\ q_{Hc-e}^* &= 2.3 \times 10^{-13} & (\quad \quad \quad " \quad \quad) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$y \sim 3 \times 10^{-3}$ のときに水素とヘリウムから出る電子の割合は同程度となる。したがって y が非常に大きい場合を除いては、ヘリウムの電離が進む以前に水素だけが電離緩和するというモデルは成立しない。

$y < 3 \times 10^{-3}$ の場合についてヘリウムの電離について考察する。電離の主要な過程が原子-原子衝突から原子-電子衝突に移行するまでの時間は $\tau_1 = 1.3 \times 10^{-6} \text{ sec}$ である。ただし $n_e^c = 6.6 \times 10^{14} / \text{cm}^3$ である。 $n_c \geq n_e^c$ のときは

$$\frac{dn_e}{dt} = n_{He} n_e q_{He-e}^* = 7.8 \times 10^5 n_e \quad (22)$$

出発点を $t = 0$ として積分して

$$n_e(t) = n_e^0 e^{7.8 \times 10^5 t} = 6.6 \times 10^{14} e^{7.8 \times 10^5 t} \quad (23)$$

電離緩和が完了したときには, $n_e = 1.5 \times 10^{17}$ であり, それに達するに要する時間は $\tau_2 = 7.7 \times 10^{-6}$ sec したがって電離緩和時間は

$$\tau_{rel} = \tau_1 + \tau_2 = 9.0 \times 10^{-6} \text{ sec}$$

またヘリウム中の水素の電離緩和時間もヘリウムのそれに比べて著しく短いということはない。

§ 5. おわりに

反射衝撃波加熱領域では (21) より $y \lesssim 10^{-5}$ においては, 水素が混入していることは, 電離のどの段階においてもヘリウムの電離に大きな影響を及ぼさない。と同時に $y < 10^{-2}$ では電離緩和が完了したときは, 水素はヘリウムの電離度に影響しないということが明らかになった。

それらの事実を考慮してここでは簡単なモデルを設定して電離緩和時間を推定したわけであるが, 実際の電離緩和過程では複雑なさまざまな要素を考慮しなくてはならない。例えば衝撃波到達前の先駆電子による電離の可能性もあり, 衝撃波後方のプラズマからの高温輻射による気体の電離, 管壁の光電子放出などは電離緩和の進行を速めるであろう。しかしながらここではそれらは考慮されていない。

さらにヘリウムと水素の間の excitation transfer, 分子生成の現象などが, 大きな役割を演じている可能性もある。それらについてのより詳しい議論, 実験との比較などは別の機会にゆずりたい。

なお, この小論をまとめるにあたって多大の努力を払われた杉山征人氏に対して感謝の意を表す。

文 献

- 1) K. Fukuda, K. Ishii, R. Okasaka and T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Japan 20 2309 (1965)
- 2) 例えば
A. Ferri ed., Fundamental Data Obtained from Shock-Tube Experiments. AGARDO graph NO.41 Pergamon Press, New York (1961)
- 3) E.A. Sutton, J. Chem. Phys. 36 2923 (1962)
- 4) J.W. Bond Jr., Phys. Rev. 105 1683 (1957)
- 5) H. Petscheck and S. Byron, Ann. of Phys. 1 270 (1957)
- 6) L.M. Bibermann and I.J. Yakubov, Soviet Physics-Technical Physics 8 1001 (1964)
- 7) E.J. Morgann and R.D. Morrison, Phys. of Fluids 8 1608 (1957)
- 8) K.E. Harwell and R.G. Jahn, Phys. of Fluids 7 214 (1964)
- 9) E.S. Soloviev, R.N. Ilin, V.A. Oparin and N.V. Fedorenko, "Atomic Collisssion Process" edited by M.R.C. McDowell (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964) P.692
- 10) H.C. Hayden and N.G. Utterback, Phys. Rev. 135 A 1575 (1964)
- 11) A.J. Kelly, J. Chem. Phys. 45 1723 (1966)
- 12) H.W. Drawin, EUR-CER-FC -236 Report (1963)
- 13) A.E. Kingston, Proc. Phys. Soc. 87 193 (1966)
- 14) W.L. Fite, R.F. Stebbings, and R.T. Brackmann, Phys. Rev. 116 356 (1959)

附 録

ヘリウム-水素系に対する電離平衡の計算

Saha の式(4)においてヘリウム，水素に対するものをそれぞれ f ， g とおき変形すると，

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{(n_{\text{He}i} + n_{\text{He}a})\alpha_{\text{He}} + (n_{\text{H}i} + n_{\text{H}a})\alpha_{\text{H}}}{1/\alpha_{\text{He}} - 1} \\ g &= \frac{(n_{\text{He}i} + n_{\text{He}a})\alpha_{\text{He}} + (n_{\text{H}i} + n_{\text{H}a})\alpha_{\text{H}}}{1/\alpha_{\text{H}} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

$1/\alpha_{\text{He}} \gg 1$ であることを考慮して $1/\alpha_{\text{He}}$ に比べて1を省略する。(A-1)より

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{He}}^3 + \left(\frac{f}{g} + \frac{n_{\text{H}i} + n_{\text{H}a}}{n_{\text{He}i} + n_{\text{He}a}} \right) \alpha_{\text{He}}^2 - \frac{f}{n_{\text{He}i} + n_{\text{He}a}} \alpha_{\text{He}} \\ - \frac{f}{g} \cdot \frac{f}{(n_{\text{He}i} + n_{\text{He}a})} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ここで係数はすべて V_{R} と T_5 の関数であるが α_{He} をパラメーターとした V_{R} ， T_5 のグラフを描くことができる。一方(2)(3)と同様な T_5 に対する式から $\alpha_{\text{H}5}$ を消去して

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{He}5} = \frac{1}{2x(T_{\text{He}i} - T_{\text{H}i})} \left\{ 2(y\alpha_{\text{H}2} + 1) - \frac{1}{\text{R}}(xm_{\text{He}} + ym_{\text{H}})V_{\text{A}}^2 \times \right. \\ \left. \left\{ \left(3 + 2 \frac{T_{\text{H}i}}{T_5} \right) \frac{V_{\text{R}}}{V_{\text{A}}} - 1 \right\} - 5T_2 \frac{1 + y\alpha_{\text{H}2}}{1 + V_{\text{A}}/V_{\text{R}}} \left(\frac{2}{5} \frac{T_{\text{H}i}}{T_5} - \frac{V_{\text{A}}}{V_{\text{R}}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

(A-2)，(A-3)より $\alpha_{\text{He}5}$ ， V_{R} ， T_5 の関係を得ることができる。(A-1)のオ-式より

$$\alpha_{\text{H}} = \frac{1}{n_{\text{H}i} + n_{\text{H}a}} \left\{ f \cdot \frac{1}{\alpha_{\text{He}}} - (n_{\text{He}i} + n_{\text{He}a})\alpha_{\text{He}} \right\} \quad (\text{A-4})$$

(12)と同様な式から

$$\alpha_{H5} = \left\{ \frac{1}{y T_5} \left\{ T_2 (1 + y \alpha_{H2}) \frac{1}{1 + V_A N_R} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{R} (x m_{He} + y m_H) - (1 + x \alpha_{He5}) \right\} \right\} \quad (A-5)$$

(A-2), (A-3)より得られた関係を使って(A-4), (A-5)よりグラフ解法によって α_{H5} , α_{He5} を求める。

Fig. 1 $x-t$ Diagram

注: 0.972^4 は 0.972×10^4 のこと

Fig. 2

γ : Mixing Ratio of H

Fig. 3

Fig. 4