*

サイクロトロン高調波の強度分布

下村 昇, 三谷健次 (京大教養)**

(1967年5月26日受理)

Abstract

In this paper, the intensity distribution of cyclotron harmonics of a magneto-plasma with electron beams will be discussed. In this calculation it will be found that for ω_b (beam plasma frequency) / ω_p (background plasma frequency) < 1 , the fundamental has only one peak for λ and the higher harmonics have two peaks but as ω_b/ω_p becomes greater and greater, both the fundamental and the harmonics come to have only one peak. Further it will be known that by controlling the intensity of electron beams, any higher harmonic can be excited.

---

* Intensity Distribution of Cyclotron Harmonics of Magneto-Plasma with Electron Beams

** Noboru Shimomura, Kenji Mitani
(Yoshida College, Kyoto University)

§ 1. 序

磁気プラズマ中を伝わるサイクロトロン高調波については多くの研究がある^{1)~6)} Bernstein の用いたプラズマモデルでは、時間的な波の増巾は起らないことが証明されているが、²⁾ プラズマが電子流を含む場合、ある条件のもとに波と電子流との相互作用が強くなり、波が不安定になることが Crawford 等によって示された。^{3) 4) 5)} 彼等は、このときの波の成長率そのものよりも、むしろ波が不安定になる周波数領域に主眼をおいて考察している。

我々は、プラズマ中の高調波のうちで、任意の次数のものを任意の強さに制御する問題について興味をもっているが、この研究はそれに対する情報を得るためになされたものである。こゝでは波の増巾に必要なエネルギー源として電子流を用い、これと波との相互作用のもとに得られる時間的な成長率を以て波の強さと考え、各高調波の強さの分布状態を調べる。電子流は静磁場の方向にとるが、波がその方向に進むときはランダウ減衰を受けるので、我々は強いランダウ減衰を避けるため、波の進行方向は静磁場に対して極めて直角に近いという立場をとる。

§ 2. 分散式

プラズマは z 軸方向の一様な静磁場中にあり、正イオンの運動および粒子間の衝突の効果を無視する。電子の速度分布関数 f は Vlasov の式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

に従う。また、電場はスカラーポテンシャル ϕ から導かれるものとすれば、電場は次の関係式を満足しなければならない。

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (3)$$

$$\rho = -e \int f d\mathbf{v} \quad (4)$$

こゝに、 ρ は電荷密度である。以上の4式において、各微小変動量は $\exp \{ i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \}$ で表わされる振動項をもつものとして線型化される。 $E_y = 0$ として一般性を失うことはないか

ら、電場の振動面を xz 平面にとると、(2)から波もこの平面上を伝わることになる。

(2)と(3)はポアソンの方程式

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (5)$$

に帰せられるが、我々の取り扱うプラズマ中に電子流がある場合では、(5)の右辺の ρ は、プラズマ電子および電子流の電荷密度 ρ_p および ρ_b との和を用いなければならない。これらはそれぞれの電子群に対する分布関数を用いた(1)の解 f_i によって与えられる。我々は、初期の速度分布関数を

$$\text{プラズマ電子 : } f_{op} = n_{op} \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2\kappa T} (v_{\perp}^2 + v_z^2) \right\} \quad (6)$$

$$\text{電子流 : } f_{ob} = \frac{n_{ob}}{2\pi v_{R0}} \delta(v_R - v_{R0}) \delta(v_z - v_0) \quad (7)$$

として(1)を解く。ここに、 n_{op} 、 n_{ob} 、 $v_{\perp}$ 、 v_R はそれぞれプラズマおよび電子流における電子の数と磁場に直角方向の速度成分を表わす。

このようにして得られたプラズマに対する(1)の解と(4)とから ρ_p は次のように書ける。

$$4\pi\rho_p = \omega_p^2 \phi \left\{ k_z^2 \frac{1}{\omega^2} e^{-\lambda} I_0(\lambda) + k_{\perp}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n(\lambda)}{\omega^2 - n^2 \omega_c^2} \right\} \quad (8)$$

電子流に対しては

$$4\pi\rho_b = \omega_b^2 \phi \left[k_z^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(\omega - k_z v_0)^2 + n^2 \omega_c^2}{\{(\omega - k_z v_0)^2 - n^2 \omega_c^2\}^2} J_n^2(\mu) \right. \\ \left. + 4k_{\perp}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 J_n(\mu) J'_n(\mu)}{\mu \{(\omega - k_z v_0)^2 - n^2 \omega_c^2\}} \right] \quad (9)$$

$$\text{ここに, } \omega_c = \frac{eB_0}{mc}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_{op}}{m}, \quad \omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 n_{ob}}{m}$$

$$\lambda = \frac{\kappa T}{m} \left(\frac{k_{\perp}}{\omega_c} \right)^2 = (R k_{\perp})^2, \quad R: \text{ラーマー半径}$$

$$\mu = \frac{k_{\perp} v_{Ro}}{\omega_c}, \quad S_n(\lambda) = \frac{2n^2}{\lambda} e^{-\lambda} I_n(\lambda)$$

J_n, I_n は n 次のベッセルおよび変形ベッセル関数

$$J_0 = 1, \quad J_n = 2 \quad (n \neq 0)$$

我々はいま、磁場方向の電子流とそれにほぼ直角に進む周波数 $n\omega_c$ の波との相互作用に注目しているので、電子流の磁場に垂直な運動を無視して $\mu=0$ とおく、このような配位のもとに存在しうる波は(5)、(8)および(9)から次の分散式に従う

$$k_z^2 \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} e^{-\lambda} I_0 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_z v_o)^2} \right. \\ \left. + k_{\perp}^2 \left\{ 1 - \omega_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n(\lambda)}{\omega^2 - n^2 \omega_c^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_z v_o)^2 - \omega_c^2} \right\} \right\} = 0 \quad (10)$$

以下においては、電場の周波数および電子流の速度は

$$\omega \sim n\omega_c \quad \text{および} \quad \omega \sim k_z v_o \quad (11)$$

の関係を満たすように選ばれるものとする。

§ 3. 解 析

波数 k を実数とし、 $\omega = \omega_r + i\omega_i$ を(10)に代入して実部と虚部に分けると

$$1 - \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_r} \right) e^{-\lambda} I_0 - \omega_b^2 \frac{(\omega_r - k_z v_o)^2 - \omega_i^2}{\{ (\omega_r - k_z v_o)^2 + \omega_i^2 \}^2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{k_{\perp}}{k_z} \right)^2 \left[1 - \omega_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n \{ \omega_r^2 - (n\omega_c)^2 - \omega_i^2 \}}{\{ \omega_r^2 - (n\omega_c)^2 - \omega_i^2 \}^2 + 4\omega_r^2 \omega_i^2} \right. \\
 & \left. - \omega_b^2 \frac{(\omega_r - k_z v_0)^2 - \omega_c^2 - \omega_i^2}{\{ (\omega_r - k_z v_0)^2 - \omega_c^2 \}^2 + 4\omega_i^2 (\omega_r - k_z v_0)^2} \right] = 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega_p^2}{\omega_r^3} e - \lambda I_0 + \omega_b^2 \frac{\omega_r - k_z v_0}{\{ (\omega_r - k_z v_0)^2 + \omega_i^2 \}^2} \\
 & + \left(\frac{k_{\perp}}{k_z} \right)^2 \left[\omega_p^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n \cdot \omega_r}{\{ \omega_r^2 - (n\omega_c)^2 - \omega_i^2 \}^2 + 4\omega_r^2 \omega_i^2} \right. \\
 & \left. + \omega_b^2 \frac{\omega_r - k_z v_0}{\{ (\omega_r - k_z v_0)^2 - \omega_c^2 \}^2 + 4\omega_i^2 (\omega_r - k_z v_0)^2} \right] = 0 \quad (13)
 \end{aligned}$$

いま

$$\left. \begin{aligned}
 & (k_{\perp}/k_z)^2 \gg 1, \quad \omega_r \sim n\omega_c, \quad (\omega_p/\omega_c)^2, (\omega_b/\omega_c)^2 \sim O(1), \\
 & (\omega_r - k_z v_0)/\omega_c \equiv \varepsilon, \quad \omega_i/\omega_c \equiv y, \quad |\varepsilon|, |y| \ll 1
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

とすれば, (12), (13) から ε と y は次式で関係づけられる。

$$\varepsilon^2 + 2ay^2\varepsilon - y^2 = 0 \quad (15)$$

こゝに

$$a \equiv \frac{2(\omega_r/\omega_c)}{(\omega_p/\omega_c)^2 S_n} \left\{ 1 + \left(\frac{\omega_b}{\omega_c} \right)^2 + \frac{(\omega_p/\omega_c)^2 S_n}{4(\omega_r/\omega_c)^2} \right\} \quad (16)$$

一方, (13) における最も支配的な第2項, 第3項から $\varepsilon < 0$, すなわち, 電子流の速さはその方向の波の位相速度を越えるものでなければならないが, (14) から得られる2つの ε のうち, 波の増巾 $y < 0$ に対応する ε は次のようになる。

$$\varepsilon = y (\sqrt{a^2 y^2 + 1} - ay), \quad y < 0. \quad (17)$$

これを(13)に用いると

$$y (a^2 y^2 + 1) (\sqrt{a^2 y^2 + 1} - ay) = -A \quad (18)$$

あるいは

$$y^6 + 2 \frac{1+aA}{a^2} y^4 + \frac{1+2aA}{a^4} y^2 - \frac{A^2}{a^4} = 0 \quad (19)$$

$$\text{こゝに} \quad A \equiv \frac{\omega_r}{\omega_c} \left(\frac{\omega_b}{\omega_p} \right)^2 \frac{1}{S_n(k_\perp/k_2)^2} \quad (20)$$

(i)いま, (19)の解の近似値を知るために左辺の第1項を省略すると

$$y^4 + \frac{1}{a^2} y^2 - \frac{A^2}{2a^2(1+aA)} = 0$$

さらに, 電子流が比較的強くて $(\omega_b/\omega_c)^2 > 1$, $(\omega_b/\omega_p)^2 > 1$ と考えられる場合には

$$y^2 = \frac{\sqrt{2aA}}{2a^2} \propto \frac{S_n(\lambda)}{n} \quad (21)$$

これより, $\lambda \ll 1$ では波の強さは低次の高調波ほど強く, $\lambda \gg 1$ では逆に高次のものが強くなっていることがわかる。

(ii) 我々は(19), (20)の左辺において, $\frac{\omega_r}{\omega_c} \sim n$ に対して $\left\{ \left(\frac{\omega_r}{\omega_c} \right)^2 - n^2 - y^2 = 4 \left(\frac{\omega_r}{\omega_c} \right)^2 y^2 + O(y^4) \right\}$ として $O(y^4)$ を落したが, このことは周波数が $\left(\frac{\omega_r}{\omega_c} \right)^2 = n^2 + y^2$ であるとき。

最もよく成り立つ, 従って, (19)から得られる y は

$$\frac{\omega_r}{\omega_c} = n + \frac{y^2}{2n} \quad (22)$$

なる周波数に対するものとする。こゝにおける強さが極大値であることは次のようにしてわかる。

$\frac{\omega_r}{\omega_c} = n$ および $n + \frac{y^2}{n}$ における y を得るために、先に落した項を残して a と A を補正すると、(23)における y を y_0 と書けば

$$a_1 = a + \alpha, \quad \alpha = \frac{y_0^2 \{1 + (\omega_b/\omega_c)^2\}}{2(\omega_r/\omega_c)(\omega_p/\omega_c)^2 S_n} + \frac{2(\omega_r/\omega_c)^2}{S_n} (\epsilon^2 - y_0^2) > 0 \quad (24)$$

$$A_1 = A - \beta, \quad \beta = \frac{(\omega_b/\omega_p)^2 y_0^2}{4(\omega_r/\omega_c)(k_\perp/k_z)^2 S_n} > 0 \quad (25)$$

β は分母に $(k_\perp/k_z)^2$ を含み α に比して小さいからここでは $\beta = 0$ ，すなわち A の変化はなものとす。このようにして得られる y_0^2 の増分を r で表わすと、(24)と(25)から

$$r = \frac{2\alpha(aA+2)}{3a^3} \cdot \frac{y_0^4 + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{3aA+2}{aA+2} y_0^2 - \frac{2A^2}{a^2(aA+2)}}{y_0^4 + \frac{4}{3} \cdot \frac{aA+1}{a^2} y_0^2 + \frac{2aA+1}{3a^4}} \quad (26)$$

あるいは、(26)を用いて近似的に

$$r = -\frac{\alpha}{a} y_0^2 < 0$$

と書くことが出来る。従って、各高調波が最大の強さとなる周波数は(24)であり、強い波程鋭い極大をもつことがわかる。

§ 4. 解の検討

各高調波の強さを定める式(24)において、パラメーターとして $(k_\perp/k_z)^2 = 1000$ ， $(\omega_p/\omega_c)^2$ および $(\omega_b/\omega_c)^2$ がそれぞれ 0.1, 1, 10 の場合について数値解を求め、 k に対する強さの分布を得た。6 次までの高調波について得られた結果をグラフで表わすと第 2，

サイクロトロン高調波の強度分布

3, 4, 5図のようになる。これらの結果から次のような著しい特徴を挙げる事ができる。以下において ω_n ($n=1, 2, 3, \dots, 6$) は n 次の高調波の強さを表わすものとする。

Fig. 2 $\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^2 = 0.1$

Fig. 3 $(\frac{\omega_b}{\omega_c})^2 = 1$

サイクロトロン高調波の強度分布

Fig. 5

サイクロトロン高調波の強度分布

(1) $\omega_b/\omega_p = 1$ を境にして, λ に対する強さの変化のしかたが反転する。例えば, $\omega_b/\omega_p = 0.1$ である第3図の(3)では

$$\lambda < 2.4 \text{ で } \omega_2 > \omega_1, \lambda > 2.4 \text{ で } \omega_2 < \omega_1$$

であるに対し, $\omega_b/\omega_p = 10$ である第3図の(1)では

$$\lambda < 2.4 \text{ で } \omega_2 < \omega_1, \lambda > 2.4 \text{ で } \omega_2 > \omega_1$$

となる。更に,

第3図の(3)では $\lambda = 1.2$ で ω_2 は極小値をとり,

第3図の(1)では $\lambda = 1.2$ で ω_2 は極大値をとる。

他の高調波に対しても同様なことがいえる。

(2) 各高調波の強さが等しくなる $\lambda^{1/2} = Rk_{\perp}$ の値は第1表の通りである。

	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
ω_1	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
ω_2		2.6	3.0	3.4	3.8
ω_3			3.4	4.0	4.5
ω_4				4.5	5.0

(第1表)

これより, $\omega_{\ell} = \omega_m$ ($\ell \neq m$) となる $Rk_{\perp}$ の値はおおよそ

$$Rk_{\perp} = \frac{\ell + m}{2} \quad (28)$$

なる関係があることがわかる。

(3) 第2, 3, 4図に共通に現われている強さの極値を与える λ は第2表上段の数値である。これ

については次のように考えることが

できる。電場の波の z 成分から電子

流のエネルギーが入り, 波は強さを

増すが, 更に, この波の磁場に垂直

な成分とプラズマ電子の相互作用を考えると,

	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
数 値 解	1.2	3.0	5.4	8.4	12.2
$\bar{v}^2/v_{ph\perp}^2 = 1$	1.3	3.0	5.3	8.3	12.0

$$\bar{v}^2/v_{ph\perp}^2 = 1 \quad (29)$$

のとき強い結合が起り，波とプラズマの間でエネルギーの授受が行なわれるであろう。ここに， $\bar{v}^2$ はプラズマ電子の平均の運動エネルギーに対応する速度であり， $v_{ph\perp}$ は波の磁場に垂直な位相速度の成分である。いま我々の用いた変数 λ は $\bar{v}^2$ を使って

$$\lambda = \frac{\kappa T}{m} \left(\frac{k_{\perp}^2}{\omega^2} \right) = \frac{\bar{v}^2}{3} \cdot \frac{k_{\perp}^2}{\omega_c^2} \quad (30)$$

と書ける。(29)と(30)から

$$\lambda = \frac{n^2}{3}, \quad (n \neq 1) \quad (31)$$

となり，波とプラズマの結合が最も強くなるこの λ において波の強さは極値をとるものと考えられる。第2表の下段に与えた λ の値は (31) から算出したものであるが，数値解による結果とよく一致している。これらの λ は，特徴の(1)で述べたように， $\omega_b/\omega_p < 1$ では強さの極小値を与えるのに対し， $\omega_b/\omega_p > 1$ では極大値を与える。

以上の考察から次のことがいえる。すなわち， $\omega_b/\omega_p < 1$ の場合，波は電子流から得たエネルギーをプラズマに向かって放出するため波自身の強さは減少して極小となり， $\omega_b/\omega_p > 1$ の場合，波は電子流のエネルギーだけでなく，プラズマの磁場に垂直なエネルギーをも吸収して波の強さは更に増加し極大となる。従ってこれを波の媒質（プラズマ + 電子流）の速度分布関数で考えると，第6図のように電子流の存在による形の非対称性は，波との相互作用によってその凹凸が平均され，より滑らかな分布に近づくであろう。

実線：波との相互作用の前，点線：波との相互作用の後

第6図 媒質（プラズマ + 電子流）の電子の速度分布

サイクロトロン高調波の強度分布

(4) $\omega_b/\omega_p < 1$, $\lambda \lesssim 1$ の場合, λ の変化に対する第 2 次以上の高調波の強さの変動が激しいのでこれを第 7 図に示した。こゝでは, 基本波の強さは他の高調波に比べて一般に極めて弱い

第 7 図

ことが注目される。これは、基本波が電子流から吸収したエネルギーの大部分は、分布関数の平均化に費やされるためと考えられる。

(5) 我々は各高調波の強さを λ の関数として取り扱い、 λ の変化によって強さの順序が変わることをみた。しかし、第2図等で確かめられるように、例えば λ 、 ω_b/ω_c を固定して ω_p/ω_c を変化させても同様のことが起り得る。

§ 5, 結 論

以上の結果を考慮して、 λ および ω_b/ω_p の変化に対する各高調波の強度分布を横型的に表わしたのが第7図である。各曲線の高さは強度を、それら曲線群の原点に記入した数値は ω_b/ω_p のおよその値を示す。この図からわかるように、 $\omega_b/\omega_p < 1$ では基本波は1つの極大値を、他はそれぞれ強さの等しい2つの極大値をもっている。 ω_b/ω_p の増加とともに、2つの極大は次第に接近して、 $\omega_b/\omega_p > 1$ ではすべての波はたゞ1つの極大値しか持たなくなる。 $\omega_p/\omega_p = 0$ では λ の全域にわたって $\omega_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であり、これは Barnstain の結果と一致する。

このようにして、電子流の強度を適当に変えることにより、サイクロトロン高調波の任意の次数を強くすることが出来ることがわかる。

最後に、本研究について終始、懇篤な御指導を賜った京都大学高橋勲教授に厚く御礼申し上げると共に、電子計算機で御協力下さった名古屋大学プラズマ研究所大内昭司氏、並びに熱心に討論して下さい京都大学教養部久保照、中村定男両氏に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) F.W. Crawford, J.A. Tataronis: J. Appl. Phys. 36 (1965) 2930.
- 2) I.B. Bernstein: Phys. Rev. 109 (1957) 10.
- 3) F.W. Crawford: M.L. Report No.1210, 1215, 1216, 1273, Stanford University, Stanford, California (1964).
- 4) F.W. Crawford, G.S. Kino: M.L. Report No. 1204 (1964).
- 5) J.A. Tataronis, F.W. Crawford: Proc. 7th Internat. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.
- 6) Stix, T.H.: The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill, 9, New York.