プラズマ不安定性に対する粘性効果^{*)}

大沼俊朗・八田吉典(東北大工)^{**)}

(1967年11月27日受理)

Abstract;

Effects of electron- and ion-viscosity on plasma instabilities are investigated in the plasma system including ion-neutral and electron-neutral collisions. In the waves propagating parallel to magnetic field, the low frequency mode become unstable with the existence of the viscosity of the drift electrons. The critical velocity for the instability and the unstable region for large wave number are shown with the parameter of T_e/T_i . The waves in a high frequency region is also shown to be excited with the existence of the ion viscosity. Further, the low frequency wave which propagates perpendicular to a weak magnetic field is shown to be excited with the existence of the viscosity of the drift electrons.

^{*)} Effect of Viscosity on Plasma Instabilities

^{**)} Toshiro Ohnuma and Yoshisuke Hatta

(Department of Electronic Engineering, Tohoku University,
Sendai)

I. 序 文

プラズマの不安定現象の内，重要なものである 2 流体不安定性については，多くの発表がある。¹⁾ 2 ストリームの状態を作る方法の 1 つに，プラズマにビームを打込む場合があるが，この場合は系が 3 成分以上になり，その不安定性については，既に発表されている。^{2, 3)} 別の方法として，定常電界を印加することにより，電子とイオンとの間に相対速度を作る方法がある。この場合に，有限のイオン・電子間相対速度を作るには，完全電離の時には，電子-イオン間の衝突が必要であり，弱電離（半導体）プラズマでは，電子，イオン（正孔）-中性分子（格子）間の衝突が必要である。従って，定常電界を印加して不安定性を吟味する場合には，衝突の効果を調べる必要がある。

本論文では，2 流体不安定性に対する粘性（イオン-イオン間の衝突に対応するイオンの粘性，及び，電子-電子間の衝突に対応する電子の粘性）の影響を調べる。最初に，磁場方向に伝わる波（境界の影響がないとしているため，磁場のない場合の一次元問題に帰着する）を磁場方向に電場を印加した場合について報告する。電子-中性分子，イオン-中性分子間の衝突，更に，電離度の高くなった場合に必要なる，電子およびイオンの粘性を考慮に入れる。このモデルでは，低周波振動と高周波振動とが励起される。低周波振動領域では，弱電離プラズマ（電子，イオンの粘性，電子-イオン間の衝突を省略）の場合において，不安定に必要な電子駆動速度を求める。完全電離の場合，低周波振動が電子の粘性により不安定になることは，A. F. Kuckes により調べられている⁴⁾ が，それは長波長近似の場合である。しかし，後述する様に，粘性に起因する波の増大率は， K^2 （ K は波数）に比例し， K の小さい領域では比較的小さい。本論文では， K の大きい所までに拡張して調べる。なお，この場合， $V_{Bo} \ll C_s$ （電子の熱速度）の領域での不安定性を検討しているため，逃走電子（run-away electron）の問題はない。^{5, 6)} 又，逃走電子という問題点より低周波振動の励起を調べている論文もある。^{7, 8)} しかし，これらの取り扱っている不安定性は衝突効果のない 2 ストリーム型をとり，衝突項を考慮した場合⁸⁾ のも，衝突は波に減衰に効くという取扱いである。その点，本論文での電子との衝突（電子-電子衝突，電子-中性分子衝突）が効いて不安定状態が起るといふモデルとは本質的に異なると考えられる。

高周波振動の励起は，半導体プラズマや抵抗型増巾器において報告されている。^{9, 10)} この場合，イオン-中性分子間の衝突が不安定に効く。本論文では，イオンの粘性も不安定性への働きを示すことを示す。

次に，磁場に直角に伝わる静電波（electrostatic wave）において，ドリフト電子の粘性にて低周波振動が励起されることを示す。電子の粘性のかわりに，電子-中性分子衝突が不安定

に効く弱電離プラズマの場合の報告もあるが、^{11, 12)} 磁場方向の波の場合とは、電子とイオンの相対速度が、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, $\nabla n \times \mathbf{B}$ ドリフトで出来ることが異なり、波の不安定性の本質は変らない。

1. 基礎式

プラズマを流体モデルにて取扱う。

連続の式

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad s = e, i \quad (1)$$

ポアソンの式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e), \quad (2)$$

運動量の式

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -en_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \vec{\phi}_e - m_e n_e \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - m_e n_e \nu_{en} \mathbf{v}_e, \quad (3)$$

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = en_i (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \vec{\phi}_i - m_i n_i \nu_{ie} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) - m_i n_i \nu_{in} \mathbf{v}_i, \quad (4)$$

ここに、 ν_{sn} は s 粒子の中性分子、又は、壁との衝突周波数、 ν_{ei} , ν_{ie} は、各々、電子のイオンに対する、イオンの電子に対する衝突周波数を示す。 $\vec{\phi}_s$ は s 粒子の圧力テンソルを示し、詳しくは “ 附記 ” に示してある。

考察する波は静電波とし、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (5)$$

の近似を用いる。又、温度勾配はないものとする。

II. 磁場方向に伝わる静電波

無限プラズマを考えているので、磁場のない時の一次元モデルとして解く場合に帰着し、運動量の式(3)(4)は、

$$\frac{dv_{iz}}{dt} - \frac{4}{3} \frac{\eta_i}{n_i m_i} \frac{\partial^2 v_{iz}}{\partial z^2} = \frac{e}{m_i} E_z - \frac{C_i^2}{n_0} \frac{\partial n_i}{\partial z} - \nu_{ie} (v_{iz} - v_{ez}) - \nu_{in} v_{iz}, \quad (6)$$

$$\frac{dv_{ez}}{dt} - \frac{4}{3} \frac{\eta_e}{n_e m_e} \frac{\partial^2 v_{ez}}{\partial z^2} = -\frac{e}{m_e} E_z - \frac{C_e^2}{n_0} \frac{\partial n_e}{\partial z} - \nu_{ei} (v_{ez} - v_{iz}) - \nu_{en} v_{ez} \quad (7)$$

となる。ここに、

$$C_s = (T_s / m_s)^{1/2} \quad (8)$$

で、s 粒子の音速を示す。

III-1 定常解と分散式

定常電界 E_{z0} の存在により、電子・イオンの定常ドリフトが出来る。即ち、運動量の式より、

$$\frac{e}{m_i} E_{z0} - \nu_{ie} (v_{izo} - v_{ezo}) - \nu_{in} v_{izo} = 0, \quad (9)$$

$$-\frac{e}{m_e} E_{z0} - \nu_{ei} (v_{ezo} - v_{izo}) - \nu_{en} v_{ezo} = 0, \quad (10)$$

これらより、 v_{izo} 、 v_{ezo} は次の様に求められる。(以下、サフィックス “z” を省略する。)

$$v_{io} = \frac{e \nu_{en} E_0 / m_i}{(\nu_{ie} + \nu_{in})(\nu_{ei} + \nu_{en}) - \nu_{ie} \nu_{ei}} \quad (11)$$

$$v_{eo} = \frac{-e \nu_{in} E_0 / m_e}{(\nu_{ie} + \nu_{in})(\nu_{ei} + \nu_{en}) - \nu_{ie} \nu_{ei}} \quad (12)$$

プラズマ不安定性に対する粘性効果

即ち,

$$m_i \nu_{in} v_{io} - m_e \nu_{en} v_{eo} = 0 \quad (13)$$

が成立つ。これは、電子・イオン間の衝突を考慮しない場合と同じである。又、衝突時の運動量保存則より、

$$m_i \nu_{ie} = m_e \nu_{ei} \quad (14)$$

が成立つ。完全電離の場合には、(11)、(12)の関係式のかわりに、

$$v_{io} - v_{eo} = eE_0 / m_i \nu_{ie} \quad (15)$$

の関係がある。

次に、分散式は、(1)(2)(6)(7)式を線形化し、フーリエ展開することにより(変動分は、 $\exp -j(kz - \omega t)$ に比例する)、

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{pi}^2 - j\nu_{ie}(\omega - KV_{io})}{(\omega - KV_{io})\{\omega - KV_{io} + j(K^2 \eta'_i + \nu_{in})\} - K^2 C_i^2} \\ & + \frac{\omega_{pe}^2 - j\nu_{ei}(\omega - KV_{eo})}{(\omega - KV_{eo})\{\omega - KV_{eo} + j(K^2 \eta'_e + \nu_{en})\} - K^2 C_e^2} = 1, \end{aligned} \quad (16)$$

と求まる。こゝに、

$$\omega_{ps}^2 = \frac{4\pi n_s e^2}{m_s}, \quad s = e, i \quad (17)$$

$$\eta'_s = \frac{4}{3} \frac{\eta_s}{n_s m_s} \quad (18)$$

である。

Ⅱ-2 低周波振動

分散式(16)を書きなおして、

$$\begin{aligned} & [(\omega - KV_{i0}) \{ \omega - KV_{i0} + j(K^2 \eta'_i + \nu_{ie} + \nu_{in}) \} - K^2 C_i^2 - \omega_{pi}^2] \\ & \cdot [(\omega - KV_{e0}) \{ \omega - KV_{e0} + j(K^2 \eta'_e + \nu_{ei} + \nu_{en}) \} - K^2 C_e^2 - \omega_{pe}^2] \\ & = \{ \omega_{pi}^2 - j\nu_{ie}(\omega - KV_{i0}) \} \{ \omega_{pe}^2 - j\nu_{ei}(\omega - KV_{e0}) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、低周波領域の近似として、

$$\begin{aligned} \omega_{pe}^2, K^2 C_e^2 & \gg (\omega - KV_{e0})^2, |(\omega - KV_{e0}) K^2 \eta'_e|, \\ & |(\omega - KV_{e0}) \nu_{ei}|, |(\omega - KV_{e0}) \nu_{en}|, \end{aligned} \quad (20)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} (\omega - KV_{i0})^2 + \frac{m_e}{m_i} \frac{(\omega - KV_{e0})^2}{(1 + \frac{K^2}{K_{De}^2})} &= K^2 C_i^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{(1 + \frac{K^2}{K_{De}^2})} \\ &- j \left[(\omega - KV_{i0}) \left(K^2 \eta'_i + \frac{\nu_{ie}}{1 + \frac{K^2}{K_{De}^2}} + \nu_{in} \right) \right. \\ &\left. + (\omega - KV_{e0}) \left\{ \frac{m_e}{m_i} \frac{K \eta'_e}{(1 + \frac{K^2}{K_{De}^2})^2} - \nu_{ie} \frac{K_{De}^2 / K^2}{(1 + \frac{K^2}{K_{De}^2})^2} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\nu_{en}}{(1 + \frac{K^2}{K_{De}^2})^2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

K を実数とし、 $\omega = \omega_r + j\omega_j$ ($|\omega_r| \gg |\omega_j|$, $\omega_j > 0$ は不安定状態を表わす) とおくことにより、

$$\omega_r - KV_{i0} = \pm KV_p, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 2\omega_j = & - \left\{ \frac{m_e}{m_i} \frac{K^2 \eta'_e}{(1+K^2/K_{De}^2)^2} - \nu_{ie} \frac{K_{De}^2/K^2}{(1+K_{De}^2/K^2)^2} \right. \\
 & + \frac{m_c}{m_i} \frac{\nu_{en}}{(1+K^2/K_{De}^2)^2} + K^2 \eta'_i + \frac{\nu_{ie}}{1+K_{De}^2/K^2} + \nu_{in} \left. \right\} \\
 & + \frac{(V_{eo} - V_{io})}{V_p} \left\{ \frac{m_e}{m_i} \frac{K^2 \eta'_e}{(1+K^2/K_{De}^2)^2} - \nu_{ie} \frac{K_{De}/K}{(1+K_{De}^2/K^2)^2} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\nu_{en}}{(1+K^2/K_{De}^2)^2} \right\},
 \end{aligned} \quad (23)$$

ここに,

$$V_p = (K^2 C_i^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1+K_{De}^2/K^2})^{1/2}, \quad (24)$$

$$K_{De}^2 = \omega_{pe}^2 / C_c^2, \quad (25)$$

である。(22)の+符号の速進波 (fast wave) に着目すると, 不安定になるために必要な電子・イオン間の相対速度は,

$$\begin{aligned}
 V_{eo} - V_{io} \geq V_p \left[1 + \frac{K^2 \eta'_c + \frac{\nu_{ie}}{1+K_{De}^2/K^2} + \nu_{in}}{\frac{m_c}{m_i} \frac{K^2 \eta'_e}{(1+\frac{K^2}{K_{De}^2})^2} - \frac{\nu_{ie}}{(1+\frac{K_{De}^2}{K^2})^2} + \frac{m_c}{m_i} \frac{\nu_{en}}{(1+\frac{K^2}{K_{De}^2})^2}} \right], \quad (26)
 \end{aligned}$$

と求まる。

(23) 式より, 上記のイオン波 (プラズマ音波 $\omega/K = ((T_e + T_i)/m_i)^{1/2}$, イオンプラズマ振動 $\omega = \omega_{pi}$, イオン音波 $\omega/K = (T_i/m_i)^{1/2}$ を含む) に対しては, イオンの粘性, 電子-イオン衝突, イオン-電子衝突, イオン-中性衝突は波の減衰の役割をし, 電子の粘性, 電子-中性分子衝突は, 電子のドリフト速度の存在に伴い, 不安定性への役割をはたしていることが分かる。次に, 成長率について考える。(23)より分かる様に, ドリフト電子の粘性項の波の不安

定性の帰与は、 $K^2 \sim K_{De}^2$ で最大になる。これは、電子-中性分子衝突項が、 $K^2 \ll K_{De}^2$ において、最大成長率をとる事と、対照的である。ここで扱っている流体モデルでは、粒子間平均自由行程より小さい波長の波は正確には扱えないが、上記の粘性項の性質は、電子-中性分子衝突より帰与する性質とは異なると言えるであろう。

完全電離プラズマを考える。(26)式で、 $\nu_{in} = \nu_{en} = 0$ にすればよい。A. F. Kuckes は、 $K^2 \ll K_{De}^2$ の時について調べ、電子の粘性が不安定に効く結果を得ている。⁴⁾ 本論文でも、程々同じ結果であるが、前述の様に、その成長率は K^2 に比例している。即ち、 $K^2 \ll K_{De}^2$ の場合は、成長率が比較的小さく不安定になり易い領域でなく、 $K^2 \approx K_{De}^2$ の領域の方が粘性による不安定性が起りやすい。完全電離の場合に、不安定になるに必要な電子-イオン間の相対速度を T_e / T_i をパラメータとして求めたのを図1に示す。 $T_e / T_i \approx 10^2$ で、イオン粘性による減衰が小さくなっている。

弱電離プラズマの場合、簡単のために、電子-イオン間の衝突、粘性を省略すると、(26)式は、

$$V_{eo} - V_{io} \geq V_p \left[1 + \frac{m_i \nu_{in}}{m_e \nu_{en}} \left(1 + \frac{K^2}{K_{De}^2} \right) \right], \quad (27)$$

になる。即ち、電子-イオン間の相対速度が、波の位相速度とイオン-中性分子間の衝突による減衰効果との和より大きければ不安定になることを示している。 V_{eo} と V_{io} との間には、(13)なる関係があることより、(27)式は、

$$V_{eo} \geq V_p \frac{\nu_{in} m_i}{\nu_{en} m_e} \left\{ 1 + \frac{m_i \nu_{in}}{m_e \nu_{en}} \frac{(1 + \frac{K^2}{K_{De}^2})^2 - 1}{1 + \frac{m_i \nu_{in}}{m_e \nu_{en}}} \right\}, \quad (28)$$

になる。 $K^2 \ll K_{De}^2$ の場合を求えると、

$$V_{eo} \geq V_p \frac{\nu_{in} m_i}{\nu_{en} m_e} \quad (29)$$

即ち、 $\nu_{in} m_i / \nu_{en} m_e < 1$ の場合は、電子のドリフト速度が波の位相速度より小さい場合でも不安定になりうる。これは、常識に反する様に思われるが、次の様に考えればよい。不安定になるには、(27)式より分かる様に、 $V_{eo} - V_{io}$ は波の位相速度より大きくなければならない。

プラズマ不安定性に対する粘性効果

一方，観測系（中性分子静止系）よりみると，(11)より，波の反対方向にイオンがドリフトしている。そのドリフト速度だけ，観測系よりみた電子のドリフト速度が小さくとも不安定になりうる。即ち，電子ドリフト速度が波の位相速度より小さい場合でも不安定になりうる。このことは，弱電離プラズマではイオンのドリフト速度を省略してはいけないという結論にもなる。

目-3 高周波振動

高周波領域では，イオンはその重さ故に，電子の速い運動に追随しにくいという考えを根底におく。分散式(10)に，

$$\begin{aligned} K^2 \eta'_i + \nu_{in} &\gg |\omega - KV_{io}| \\ |\omega| &\gg |KV_{io}| \\ |\omega (K^2 \eta'_i + \nu_{in})| &\gg K^2 C_i^2 \end{aligned} \quad (30)$$

の近似を用いると，

$$\frac{\omega_{pi}^2 - j\nu_{ie}\omega}{j\omega(K^2 \eta'_i + \nu_{in})} + \frac{\omega_{pe}^2 - j\nu_{ei}(\omega - KV_{eo})}{(\omega - KV_{eo})\{\omega - KV_{eo} + j(K^2 \eta'_e + \nu_{en})\} - K^2 C_e^2} = 1 \quad (31)$$

ここに， $\omega = \omega_r + j\omega_j$ とおき，

$$|\omega_r| \gg |\omega_j| \quad (32)$$

$$1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i} \gg \left| \frac{\omega_j}{\omega_r} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})} \right| \quad (33)$$

$$\omega_{pe}^2 \gg |\omega_j \nu_{ei}| \quad (34)$$

の成立つ場合には次式をうる。

プラズマ不安定性に対する粘性効果

$$\omega_r - KV_{eo} = - \frac{\frac{\nu_{ei} \omega_{pi}^2}{2\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})}}{\left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right)^2 + \left\{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})}\right\}^2} \pm \left[\frac{\frac{\nu_{ei} \omega_{pi}^2}{2\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})}}{\left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right)^2 + \left\{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})}\right\}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right)}{\left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right)^2 + \left\{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})}\right\}^2} + K^2 C_e^2 \right]^{1/2} \quad (35)$$

$$2\omega_j = -(K^2 \eta'_e + \nu_{en})$$

$$- \frac{\nu_{ei} \left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right) + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in}) (\omega_r - KV_{eo})}}{\left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right)^2 + \left\{\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})}\right\}^2}, \quad (36)$$

(35) (36) より、遅進波 (slow wave) が不安定になる可能性があることが分る。イオンの粘性とイオン-中性分子間衝突が不安定性への働きをし、電子の粘性項と、電子-中性分子間衝突、イオン-電子間衝突とが波を減衰させる働きをしている。これは、低周波振動の場合と逆である。更に、

$$\omega_{pe}^2 \left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right) \left[\left(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}}\right) + \left\{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})}\right\}\right] \gg \frac{\nu_{ei} \omega_{pi}^2}{2\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})} \quad (37)$$

の成立領域では，(35) (36) より，次の条件が満たされれば不安定状態になる。

$$\frac{\omega_{pe} \omega_{pi}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{ie} + \nu_{in})} \geq K^2 \eta'_e + \nu_{en} + \frac{\nu_{ie} (1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}})}{(1 + \frac{\nu_{ie}}{K^2 \eta'_i + \nu_{in}})^2 + \{ \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r (K^2 \eta'_i + \nu_{in})} \}^2}, \quad (38)$$

これは，電子-イオン間の衝突，電子・イオンの粘性を省略すると，

$$\frac{\omega_{pe} \omega_{pi}^2}{\omega_r \nu_{in}} \geq \nu_{en} \quad (39)$$

になる。これは半導体プラズマの場合¹⁰⁾と同じで，不安定になる周波数の上限を与えるものである。(38)式は，電子，イオンの粘性が効く場合に拡張されたものである。不安定になる周波数の下限が求まらないのは，(32)の近似を用いたためである。抵抗型不安定性においては，しばしば $\omega_r \approx \omega_j$ になり，上記周波数下限もこの領域で出てくる。

又，高周波領域でも，低周波領域の如く，完全電離の場合の取り扱いが考えられるが，逃走電子が出来ない領域 $V_{e0} \ll C_e$ では，ドリフト電子の後進波的性質はなくなるので，上記不安定性は起らない。 $V_{e0} > C_e$ なら，上記の不安定性は起り得るが，この場合は逃走電子の問題があり，上記の取り扱いでは不十分である。以上より，上記の計算は，若干の中性分子も存在した上で，イオンの粘性項が不安定に効くという結果を示している。

IV. 磁場に直角に伝わる静電波

定常電界を x 方向, 磁場を z 方向, 考える波は y 方向に伝わる場合を考察する。

IV-1 定常解

(3)(4)式より,

$$-en_{eo}(\mathbf{E}_o + \mathbf{V}_{eo} \times \mathbf{B}_o) - \nu_{ei}(\mathbf{V}_{eo} - \mathbf{V}_{io}) - \nu_{en}\mathbf{V}_{eo} = 0, \quad (40)$$

$$en_{io}(\mathbf{E}_o + \mathbf{V}_{io} \times \mathbf{B}_o) - \nu_{ie}(\mathbf{V}_{io} - \mathbf{V}_{eo}) - \nu_{in}\mathbf{V}_{io} = 0, \quad (41)$$

これより, 電子とイオンの y 方向へのドリフト速度を求めると,

$$\begin{aligned} V_{eyo} = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{e}{m_e} E_{xo} \omega_{ce} \{ \omega_{ci}^2 + (\nu_{ie} + \nu_{in})^2 \} \right. \\ \left. + \frac{e}{m_i} E_{xo} \nu_{ei} \{ \nu_{in} \omega_{ce} - (\nu_{ei} + \nu_{en}) \omega_{ci} \} \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} V_{iyo} = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{e}{m_i} E_{xo} \omega_{ci} \{ \omega_{ce}^2 + (\nu_{ei} + \nu_{en})^2 \} \right. \\ \left. - \frac{e}{m_e} E_{xo} \nu_{ie} \{ \nu_{in} \omega_{ce} - (\nu_{ei} + \nu_{en}) \omega_{ci} \} \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

ここに,

$$\begin{aligned} D = \{ \omega_{ce}^2 + (\nu_{ei} + \nu_{en})^2 \} \{ \omega_{ci}^2 + (\nu_{ie} + \nu_{in})^2 \} \\ + \nu_{ei}^2 \nu_{ie}^2 - \nu_{ei} \nu_{ie} \omega_{ce} \omega_{ci} - 2 \nu_{ei} \nu_{ie} (\nu_{ie} + \nu_{in})(\nu_{ei} + \nu_{en}), \end{aligned} \quad (44)$$

である。電子とイオンとの成対速度を作るため,

$$\nu_{ei} \ll \nu_{en}, \nu_{ie} \ll \nu_{in}, \nu_{en} \ll \omega_{ce}, \omega_{ci} \ll \nu_{in} \quad (45)$$

の条件の満たされる状態を考えると,

$$V_{iyo} \approx \frac{-\frac{e}{m_i} E_o \omega_{ci}}{\nu_{in}^2} \ll -\frac{CE_{xo}}{B_o} \quad (46)$$

$$v_{ey0} \approx -\frac{CE_{x0}}{B_0} \quad (47)$$

と，電子は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトする。以下の不安定性に対する考察は上記の状態をみたすものとする。

IV-2 分散式と不安定性

圧力テンソルの変化が y 方向だけとした場合の運動量の式は，(67)等を用いて，

$$\frac{dv_{ix}}{dt} - \eta'_{i3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{ix} - \eta'_{iz} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{iy} = \omega_{ci} v_{iy} - \nu_{ie} (v_{ix} - v_{ex}) - \nu_{in} v_{ix}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{iy}}{dt} - \eta'_{i1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{iy} + \eta'_{i2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{ix} \\ = -\frac{c}{m_i} \frac{\partial}{\partial y} \phi - \frac{C_i^2}{n_i} \frac{\partial}{\partial y} n_i - \omega_{ci} v_{ix} - \nu_{ie} (v_{iy} - v_{ey}) - \nu_{in} v_{iy}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\frac{dv_{ex}}{dt} - \eta'_{e3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{ex} - \eta'_{e2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{ey} = \omega_{ce} v_{ey} - \nu_{ei} (v_{ex} - v_{ix}) - \nu_{en} v_{ex}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{ey}}{dt} - \eta'_{e1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{ey} + \eta'_{e2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_{ex} \\ = -\frac{c}{m_e} \frac{\partial}{\partial y} \phi - \frac{C_e^2}{n_e} \frac{\partial}{\partial y} n_e + \omega_{ce} v_{ex} - \nu_{ei} (v_{ey} - v_{iy}) - \nu_{en} v_{ey}, \end{aligned} \quad (51)$$

ここで， η'_{s1} 等は，磁場中粘性係数を $n_s m_s$ で割ったもので，

$$\eta'_{s1} = \frac{\frac{4}{3} \eta_s \{1 + (\frac{2}{3} \omega_{cs} \tau_s)^2\}}{n_s m_s \{1 + (\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s)^2\}} \quad (52)$$

$$\eta'_{s2} = \frac{\eta_s \cdot \frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s}{n_s m_s \{ 1 + (\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s)^2 \}}, \quad (53)$$

$$\eta'_{s3} = \frac{\eta_s}{n_s m_s \{ 1 + (\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s)^2 \}}, \quad (54)$$

である。

以上より分散式を求める。(45)の条件を満たし、且つ、

$$\omega_{ci}^* \gg \nu_{ic}, \quad \omega_{ce}^* \gg \nu_{ei} \quad (55)$$

の場合を取り扱くと、

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2 W_i}{(\omega - K_y V_{iy0})(W_i W_i' - \omega_{ci}^{*2})} + \frac{\omega_{pe}^2 W_e}{(\omega - K_y V_{ey0})(W_e W_e' - \omega_{ce}^{*2})} \\ - j \frac{W_i W_e - \omega_{ce}^* \omega_{ci}^*}{(W_i W_i' - \omega_{ci}^{*2})(W_e W_e' - \omega_{ce}^{*2})} \left\{ \frac{\omega_{pe}^2 \nu_{ic}}{\omega - K_y V_{iy0}} + \frac{\omega_{pi}^2 \nu_{ei}}{\omega - K_y V_{ey0}} \right\}, \quad (56)$$

が求まる。ここに、

$$W_e = \omega - K_y V_{ey0} + j(K_y^2 \eta'_{e3} + \nu_{ei} + \nu_{en}) \quad (57)$$

$$W_e' = \omega - K_y V_{ey0} + j(K_y^2 \eta'_{e1} + \nu_{ei} + \nu_{en}) - \frac{K_y^2 C_e^2}{\omega - K_y V_{ey0}} \quad (58)$$

$$W_i = \omega - K_y V_{iy0} + j(K_y^2 \eta'_{i3} + \nu_{ie} + \nu_{in}) \quad (59)$$

$$W_i' = \omega - K_y V_{iy0} + j(K_y^2 \eta'_{i1} + \nu_{ie} + \nu_{in}) - \frac{K_y^2 C_i^2}{\omega - K_y V_{iy0}} \quad (60)$$

$$\omega_{ci}^* \equiv \omega_{ci} - K_y^2 \eta'_{i2} \quad (61)$$

$$\omega_{ce}^* \equiv \omega_{ce} - K_y^2 \eta'_{e2} \quad (62)$$

低周波領域の近似として電子の慣性項よりの帰与を省略し，

$$|\{\omega - K_y V_{iy0} + j(K_y^2 \eta'_{i3} + \nu_{ie} + \nu_{in})\}(K_y^2 \eta'_{e3} + \nu_{ei} + \nu_{en})| \gg |\omega_{ce}^* \omega_{ci}^*|, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & |\{\omega - K_y V_{iy0} + j(K_y^2 \eta'_{i3} + \nu_{ie} + \nu_{in})\} \{\omega - K_y V_{iy0} + j(K_y^2 \eta'_{i1} + \nu_{ie} + \nu_{in}) \\ & \quad - \frac{K_y^2 C_c^2}{\omega - K_y V_{iy0}}\}| \gg \omega_{ci}^{*2}, \end{aligned} \quad (64)$$

の成立つ領域では(56)は書きかえられて，

$$\begin{aligned} (\omega - K_y V_{iy0})^2 &= K_y^2 (C_i^2 + \frac{m_e}{m_i} C_e^2) \\ &\quad - \{(K_y \eta'_{i1} + \nu_{in})(\omega - K_y V_{iy0}) \\ &\quad + \frac{m_e}{m_i} (K_y \eta'_{e1} + \nu_{en}) \{1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\frac{m_e}{m_i} (K_y \eta'_{e3} + \nu_{en})(K_y \eta'_{e1} + \nu_{en})}\} \\ &\quad (\omega - K_y V_{ey0})\}, \end{aligned} \quad (65)$$

(65) 式は，磁場方向に伝播する波の場合の(21)と程々同じ形をしている。ドリフト電子の磁場中粘性が波の不安定性に効いている。前と同様に不安定条件として，

$$V_{ey0} - V_{iy0} \geq V_p \left[1 + \frac{K_y^2 \eta'_{i1} + \nu_{in}}{\frac{m_e}{m_i} (K_y^2 \eta'_{e1} + \nu_{en}) \{1 + \frac{\omega_{ce}^2}{\frac{m_e}{m_i} (K_y^2 \eta'_{e1} + \nu_{en})(K_y \eta'_{e3} + \nu_{en})\}} \right], \quad (66)$$

プラズマ不安定性に対する粘性効果

が求まる。磁場のない場合(Ⅲ)との違いは、磁場中の粘性係数を用いている点と、定常の電子ドリフトを $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0$ で作っている点であるが、波の不安定の本質においては程んど差異はない。又、(66)式は、完全電離プラズマにおいても不安定状態が、電子の粘性存在により、起り得ることを示している。その場合、 ν_{in} をイオンと壁との衝突と考えて、電子とイオンとの相対速度が出てくる。

V. まとめ

プラズマに定常電場が印加されている時の不安定性に対する粘性の影響を調べ、磁場方向に伝わる静電波の場合、高周波振動の励起にはイオンの粘性が効き、電子の粘性は減衰に働くことが分かった。低周波振動の励起には、駆動電子の粘性が不安定に効き、電子-イオン間の衝突、イオンの粘性は減衰に効く。又、粘性による波の成長率は波数の2乗に比例するため、 $K^2 \sim K_{De}^2$ の領域の波数の波が励起され易く、 $K^2 \ll K_{De}^2$ の近似解では不十分である。弱磁場に直角に伝わる静電波がドリフト電子の粘性により不安定になりうる。但し、この不安定性の本質は、磁場方向に伝わる波の場合と同じであることを調べた。

粘性が不安定性に効く理由を考察してみる。以前より、抵抗型増巾器⁹⁾ というものがあり、これは、電子ビームの負エネルギーをもつ遅進波が抵抗壁にエネルギーを失なうことにより負エネルギーが増大し、その結果、波が増大する機構になっている。プラズマの場合を考える場合は、その抵抗壁をイオン-中性分子衝突に置き換えればよい。これが、通常、抵抗型不安定性と言われるものである。低周波振動では、電子-中性分子衝突がその役目を演ずる。これと同じことが、電子の粘性(電子-電子間衝突)、イオンの粘性(イオン-イオン間衝突)の場合にも拡張出来るであろう。即ち、電子の波に対しては、イオンの粘性が、イオンの波に対しては、ドリフト電子の粘性が、波の不安定に効くと考えられる。抵抗(resistivity)に基因する場合を抵抗型不安定性(resistive instability)と呼ぶなら、粘性(viscosity)に基因する場合を粘性型不安定性(viscous instability)とも呼ばれるべきであろうが、不安定性の本質は同じであると考える。

最後に、有益な討論をして下さった、佐藤益美氏、佐藤徳芳氏、西田靖氏に深く謝意を表します。

附 記

運動量の式中の圧力テンソル $\vec{\phi}_s$ は、磁場方向を z とすると、S. Chapman & T. G. Cowling¹³⁾により、次の様で与えられる。

$$\phi_{szz} = P_s - \frac{2}{3} \eta_s \dot{e}_{zz}$$

$$\phi_{sxx} = P_s - \frac{2\eta_s}{1 + \left(\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s\right)^2} \left\{ \dot{e}_{xx} + \frac{1}{2} (\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy}) \left(\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s\right)^2 + \dot{e}_{xy} \frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s \right\}$$

$$\phi_{syy} = P_s - \frac{2\eta_s}{1 + \left(\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s\right)^2} \left\{ \dot{e}_{yy} + \frac{1}{2} (\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy}) \left(\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s\right)^2 - \dot{e}_{xy} \frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s \right\}$$

$$\phi_{sxy} = \phi_{syx} = - \frac{2\eta_s}{1 + \left(\frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s\right)^2} \left\{ \dot{e}_{xy} + \frac{1}{2} (\dot{e}_{yy} - \dot{e}_{xx}) \frac{4}{3} \omega_{cs} \tau_s \right\}$$

$$\phi_{szx} = \phi_{sxz} = - \frac{2\eta_s}{1 + \left(\frac{2}{3} \omega_{cs} \tau_s\right)^2} \left\{ \dot{e}_{zx} + \frac{2}{3} \omega_{cs} \tau_s \dot{e}_{zy} \right\}$$

$$\phi_{szy} = \phi_{syz} = - \frac{2\eta_s}{1 + \left(\frac{2}{3} \omega_{cs} \tau_s\right)^2} \left\{ \dot{e}_{zy} - \frac{2}{3} \omega_{cs} \tau_s \dot{e}_{zx} \right\}$$

(67)

ここに、 P_s はスカラー圧力を示し、状態方程式より、

$$P_s = n_s T_s \quad (68)$$

で与えられる。 η_s は S 粒子の磁場のない場合の粘性係数を示し、

$$\eta_s \approx \frac{2}{3} P_s \tau_s, \quad (69)$$

$\omega_{cs} = eB_0/m_s C$ はS粒子のサイクロトロン角周波数を示し、 τ_s はS粒子間衝突時間を示す。

以上より、粘性の効果を調べることは、同種間衝突の効果を調べることに同じである。又、テンソル $\mathbf{e}$ は、

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right), & \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right), & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right), & \frac{1}{3} \left(2 \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \end{array} \right) \quad (70)$$

で与えられる。

参 考 文 献

- 1) 例えば, O. Bunemann; Phys. Rev. 115, 503 (1959).
- 2) T. Ohnuma and Y. Hatta; Phys. Fluids, 9, 1422 (1966),
T. Ohnuma and Y. Hatta; J. Phys. Soc. Japan, 21, 986 (1966).
- 3) B.D. Fried and A.Y. Wong; Phys. Fluids, 9, 1084 (1966).
- 4) A.F. Kuckes; Phys. Fluids, 7, 511 (1964).
- 5) L. Spitzer; "Physics of Fully Ionized Gases".
Interscience Publishers, Inc., New York (1956).
- 6) J.L. Delcroix; "Introduction to the Theory of Ionized
Gases". Interscience Publishers, Inc., New York (1960).
- 7) E.C. Field and B.D. Fried; Phys. Fluids, 7, 1937 (1964).
- 8) G.F. Reiter; Phys. Fluids, 10, 703 (1967).
- 9) C.K. Birdsall, G.R. Brewer and A.V. Haef;
Proc. IRE. 41, 865 (1953).
- 10) A. Hasegawa; J. Phys. Soc. Japan 20, 1072 (1965).
- 11) A.V. Timofeev; Sov-Phys.-Doklady 8, 890. (1964).
- 12) N. Sato and Y. Hatta; J. Phys. Soc. Japan 21, 1080 (1966).
- 13) S. Chapman and T.G. Cowling; "The Mathematical Theory of
Non-Uniform Gases" Cambridge (1960).

Figure Captions

Fig.1 The critical velocities for the instability of the low
frequency region in a fully ionized plasma; $T_e=10^4$ ($^{\circ}\text{K}$).
— ; $n=10^{12}(\text{1/cm}^3)$, — — — ; $n_0=10^{10}(\text{1/cm}^3)$
S and U stand for stable and unstable, respectively.