トロイダル・オクタポール場の数値計算*

鬼 頭 正 史 (電気試験所)

(1968年1月29日受理)

§ 1 まえがき

真直な4本の棒に大きさが同じで、互いに逆向きの電流を流したときできる磁場はヨッヘ場として知られている。このヨッヘ場をトーラスに適用する。即ち真直な4本の棒を、4本のトーラス管に置き換え、それらの管に大きさが同じで互いに逆向きの電流を流したときできる磁場を円環座標を用いて求め、その磁場の等ポテンシャル面を数値計算で求めた。

§ 2, § 3で我々の問題に必要な円環座標の性質を列挙した。§ 4で円環函数を電子計算機で求める際の数値計算法を示した。§ 5でトロイダル・オクタポールのつくる磁場の解析的解を求め、§ 6でその解を電子計算機により求める過程を示した。又 § 7でトロイダル・オクタポールの等ポテンシャル面を画くと図・4に示すような等ポテンシャル面が求まった。

§ 2 円環座標のまとめ

2・1 円環座標(σ, ψ, ϕ)

図・1において、2定点A, Bからの距離の比AP:BPが一定($\neq 1$ を仮定)である点の軌跡は、この2定点を結ぶ線分を、この定比に内分する点Eと外分する点Dを直径の両端とする円周である。(アポロニウスの円)

定点A, Bに対するアポロニウスの円を、図・1に示すZ軸のまわりに回転させるとトーラスが出来る。定点A, Bに関して

* Numerical Calculation of a Toroidal Octupole Field

** Masafumi Kito (Electrotechnical Laboratory)

図・1 円環座標 (σ, ϕ, θ)

$$\sigma = \log \frac{AP}{BP}, \quad \psi = \angle APB, \quad \phi = \angle POC, \quad (1)$$

で作られる座標 (σ, ψ, ϕ) を円環座標という。aspect ratio

2・2 円環座標で直角座標を表わすこと

直角座標を図・1のように定める。即ち2定点A, Bの中心を直角座標の原点Oにとり, AB直線の延長をx軸に, 又原点を通りx軸に直交し, かつアポロニウスの円の平面にある直線をz軸とする。y軸はx, z軸に共に直角にとる。x, y, zは右手系を採用する。

今2定点A, Bの距離を2aとし, 点Pの座標をP(x, y, z)とすると, 図・1の幾何学的関係を2, 3使って次をえる。¹⁾

$$x = \frac{a \sinh \sigma}{\cosh \sigma - \cos \phi} \cdot \cos \phi \quad (2-a)$$

$$y = \frac{a \sinh \sigma}{\cosh \sigma - \cos \phi} \cdot \sin \phi \quad (2-b)$$

$$z = \frac{a \sin \phi}{\cosh \sigma - \cos \phi} \quad (2-c)$$

2・3 aとR, rの関係及び

図・1のような $\sigma = \sigma_0$ のトーラスを考える。そのトーラスの大半径をR, 小半径をrとし2定点A, Bの距離を2aとすると次の関係が成立つ。

$$a^2 = R^2 - r^2 \quad (3)$$

$$\text{aspect ratio} = \frac{R}{r} = \cosh \sigma_0 \quad (4)$$

$$\frac{a}{r} = \sinh \sigma_0 \quad (5)$$

2・4 ϕ と θ の関係

図・1で ψ より θ を用いるのが実際には便利である。その関係を示すと次のようになる。

$$\cos \theta = \frac{\cosh \sigma \cdot \cos \phi - 1}{\cosh \sigma - \cos \phi}, \quad \cos \phi = \frac{\cosh \sigma \cdot \cos \theta + 1}{\cosh \sigma + \cos \theta} \quad (6)$$

2・5 直角座標 (x, z) で円環座標 (σ, ϕ) を表わすこと

ϕ に関しては $\phi = 0$ の平面を扱う。図・1から次をえる。

$$\tan \phi = \frac{2 a z}{z^2 + x^2 - a^2} \quad (7-a)$$

$$R = \frac{x^2 + a^2 + z^2}{2 x} \quad (7-b)$$

$$r = \frac{1}{2 x} \sqrt{(x^2 + z^2 - a^2)^2 + 4 a^2 z^2} \quad (7-c)$$

§ 3 円環座標の勾配, 発散, 回転等

3・1 円環座標は直交曲線座標である。

基本共変テンソル g_{jk} のつくる行列式を g とすると, 座標曲線がすべて直交する必要十分条件は $g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$ である。²⁾ 円環座標では g は次で与えられる。

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

(2-a), (2-b), (2-c)から右辺の行列式の各要素を計算すると

$$g = \left[\frac{a^3 \sinh \sigma}{(\cosh \sigma - \cos \psi)^3} \right]^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (8)$$

をえる。故に円環座標は直交曲線座標である。又(8)式から円環座標のヤコビアン J は

$$J = \frac{a^3 \sinh \sigma}{(\cosh \sigma - \cos \psi)^3} \quad (9)$$

で与えられる。

3・2 円環座標の勾配，発散，回転等

直交曲線座標である円環座標に関して次が成立つ。³⁾

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \mathbf{e}_\sigma + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi} \mathbf{e}_\psi + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (h_2 h_3 A_\sigma) + \frac{\partial}{\partial \psi} (h_3 h_1 A_\psi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (h_1 h_2 A_\phi) \right] \quad (11)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right] \quad (12)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_\sigma}{h_2 h_3} & \frac{\mathbf{e}_\psi}{h_3 h_1} & \frac{\mathbf{e}_\phi}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} & \frac{\partial}{\partial \psi} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ h_1 A_\sigma & h_2 A_\psi & h_3 A_\phi \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$ds^2 = (h_1 d\sigma)^2 + (h_2 d\psi)^2 + (h_3 d\phi)^2 \quad (14)$$

図・2 円環座標の単位ベクトル e_σ, e_ψ, e_ϕ

但し単位ベクトル e_σ, e_ψ, e_ϕ は図・1 及び図・2 に示すようにとる。又 h_1, h_2, h_3 は次で与えられる。

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2} = \frac{a}{\cosh \sigma - \cos \psi} \quad (15-a)$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2} = \frac{a}{\cosh \sigma - \cos \psi} \quad (15-b)$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2} = \frac{a \sinh \sigma}{\cosh \sigma - \cos \psi} \quad (15-c)$$

3.3 $\nabla^2 V(\sigma, \psi, \phi) = 0$ の解

(12)式へ(15-a), (15-b), (15-c)式を代入し, $V = (\cosh \sigma - \cos \psi)^{1/2} \cdot U$ の置換え, 及び $U = X(\sigma) \cdot Y(\psi) \cdot Z(\phi)$ の変数分離を仮定すると

$$V(\sigma, \psi, \phi) = (\cosh \sigma - \cos \psi)^{1/2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda_{m,n} P_{n-1/2}^m(\cosh \sigma) \cdot \frac{\cos n \psi}{\sin n \psi} \cdot \frac{\cos m \phi}{\sin m \phi} \quad (16)$$

$$\text{又は} = (\cosh \sigma - \cos \psi)^{1/2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda_{m,n} Q_{n-1/2}^m(\cosh \sigma) \frac{\cos n \psi}{\sin n \psi} \cdot \frac{\cos m \phi}{\sin m \phi} \quad (17)$$

をえる。1), 4)

$P_{n-1/2}^m(\cosh \sigma)$, $Q_{n-1/2}^m(\cosh \sigma)$ を円環函数といい, 一般のルジャンドル陪函数の特別な場合である。今 σ を固定して σ_0 とすると, それは1つのトーラスを決定する。

$$\sigma_0 < \sigma \text{ に対して } (\cosh \sigma - \cos \psi)^{1/2} P_{n-1/2}^m(\cosh \sigma) \text{ は有限}$$

$$\sigma_0 > \sigma \text{ に対して } (\cosh \sigma - \cos \psi)^{1/2} Q_{n-1/2}^m(\cosh \sigma) \text{ は有限}$$

なることが知られている。1) それ故 $P_{n-1/2}^m$ は与えられたトーラスの外部問題に, $Q_{n-1/2}^m$ は内部問題に適用される。

§4 円環函数 $P_{n-1/2}^m(z)$, $Q_{n-1/2}^m(z)$ の数値計算法

4.1 円環函数の漸化式

電子計算機により円環函数の数値計算を行うとき, その漸化式がわかると演算速度の短縮, 記憶容量の節約等好都合である。円環函数 $P_{n-1/2}^m(z)$ に関して次の漸化式が成立つ。5)

$$\left(n - \frac{1}{2} + m\right) \cdot P_{n-1-1/2}^m(z) - \left(n - \frac{1}{2} - m\right) z \cdot P_{n-1/2}^m(z) + \sqrt{z^2 - 1} \cdot P_{n-1/2}^{m+1}(z) = 0 \quad (18)$$

$Q_{n-1/2}^m(z)$ に関しても全く同じ関係が成立つ。今 $m \geq 0$, $n \geq 1$ を仮定すれば, $P_{n-1-1/2}(z)$, $P_{n-1/2}(z)$ 及び $Q_{n-1-1/2}(z)$, $Q_{n-1/2}(z)$ がわかれば (18) 式から全ての $P_{n-1/2}^m$, $Q_{n-1/2}^m$ が求められる。 $P_{n-1-1/2}$, $P_{n-1/2}$ に関しては又次の漸化式が成立つ。⁵⁾

$$(n + \frac{1}{2}) \cdot P_{n+1-1/2}(z) - 2n \cdot z \cdot P_{n-1/2}(z) + (n - \frac{1}{2}) \cdot P_{n-1-1/2}(z) = 0 \quad (19)$$

$Q_{n-1-1/2}$, $Q_{n-1/2}$ に関しても全く同じ関係が成立つ。故に我々は $P_{-1/2}$, $P_{1/2}$ 及び $Q_{-1/2}$, $Q_{1/2}$ が求まれば, $m > 0$, $n > 1$ なる全ての $P_{n-1/2}^m$, $Q_{n-1/2}^m$ を (18), (19) 式の漸化式で求めることが出来る。

4・2 円環函数のガウスの超幾何級数による展開

円環函数 $P_{n-1/2}(z)$, $Q_{n-1/2}(z)$ の変数 z は通常 $z > 1$ を扱う場合が多い。従って z が大きいとき漸近式をも与える展開を採用すると, ⁵⁾ 次のようになる。

$$P_{n-1/2}(z) = \left(\frac{z+1}{2} \right)^{n-1/2} \cdot F\left(-n + \frac{1}{2}, -n + \frac{1}{2}, 1; \frac{z-1}{z+1}\right) \quad (20)$$

$$Q_{n-1/2}(z) = \frac{\pi(2n-1)!!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{(2z)^{n+1/2}} \cdot F\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}, \frac{n}{2} + \frac{3}{4}, n+1; \frac{1}{z^2}\right) \quad (21)$$

但し $(2n-1)!!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$, 又 $F(\alpha, \beta, r; z)$ は次で定義されるガウスの超幾何級数である。

$$F(\alpha, \beta, r; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n \cdot (\beta)_n}{(r)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (22)$$

但し $(\alpha)_n = \alpha \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2) \cdots (\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$, $(\beta)_n$, $(r)_n$ も同様。

4・3 円環函数の微分に関する漸化式

次が成立つ。⁵⁾

$$(z^2 - 1) \cdot \frac{d P_{n-1/2}(z)}{dz} = (n + \frac{1}{2}) \cdot [P_{n+1/2}(z) - z \cdot P_{n-1/2}(z)] \quad (23)$$

特に $z = \cosh \sigma$ とおくと

$$\sinh \sigma \cdot \frac{d P_{n-1/2}(\cosh \sigma)}{d \sigma} = (n + \frac{1}{2}) \cdot [P_{n+1/2}(\cosh \sigma) - \cosh \sigma \cdot P_{n-1/2}(\cosh \sigma)] \quad (24)$$

$Q_{n-1/2}(z)$ に関しても全く同じ関係が成立つ。

§ 5 トーラス表面電流のつくる磁場

問題を簡単化するため、完全導体で厚さ無限小のトーラス管を考え、表面電流密度 $\mathbf{J} = e_\phi J_\phi$ (σ, ϕ) なる一定表面電流が ϕ 方向に、このトーラス管表面に流れているものとする。 J_ϕ によってトーラス管外部に生じる磁場を求める。R. J. Tayler⁶⁾ は aspect ratio の大きいトーラス管に関して、そのトーラス管表面の電流分布を求めている。然し我々は aspect ratio 大小に無関係に、トーラス管に流れる電流により生じる磁場を求める。(勿論トーラス管表面の電流分布も求める)

トーラス管の aspect ratio を $\cosh \sigma_0$ とすると、上の假定のもとで次の境界条件が成立つ。⁷⁾

$$B_\sigma(\sigma_0, \phi) = 0, \quad H_\phi(\sigma_0, \phi) = J_\phi(\sigma_0, \phi) \quad (25)$$

ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ に対して $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ のもとで、トーラス外部で次が成立つ。

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (26)$$

但し $\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$ で A_x, A_y, A_z は σ, ϕ の函数である。今表面電流密度が $\mathbf{J} = e_\phi J_\phi(\sigma, \phi)$ なので $\mathbf{A} = e_\phi A_\phi(\sigma, \phi)$ を假定する。 A_ϕ は図・1を参照して

$$e_\phi A_\phi = e_x A_x + e_y A_y \quad (27)$$

となる。(27) 式の両辺に e_ϕ の内積をとると

$$A_\phi = -\sin \phi \cdot A_x + \cos \phi A_y \quad (28)$$

となる。40式から $\nabla^2 A_x = 0$, $\nabla^2 A_y = 0$ の解として次を選ぶ。

$$A_x = -(\cosh \sigma - \cos \phi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos n \phi \cdot \sin \phi \cdot P_{n-1/2}^1(\cosh \sigma)$$

$$A_y = (\cosh \sigma - \cos \phi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos n \phi \cdot \cos \phi \cdot P_{n-1/2}^1(\cosh \sigma)$$

これらを(28)式に代入して

$$A_\phi = (\cosh \sigma - \cos \phi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos n \phi \cdot P_{n-1/2}^1(\cosh \sigma) \quad (29)$$

をえる。43式を使って $B = \nabla \times e_\phi A_\phi$ から磁場が次のように求まる。

$$B_\sigma = - \frac{(\cosh \sigma - \cos \phi)^{1/2}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot P_{n-1/2}^1(\cosh \sigma) \times \left[(\cosh \sigma - \cos \phi) \cdot n \cdot \sin n \phi + \frac{1}{2} \cdot \sin \phi \cdot \cos n \phi \right] \quad (30)$$

$$B_\phi = - \frac{(\cosh \sigma - \cos \phi)^{1/2}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos n \phi \cdot \left(n - \frac{1}{2} \right) \times \left[\left\{ n \cdot \cosh \sigma - \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \cos \phi \right\} \cdot P_{n-1/2}^1(\cosh \sigma) + \frac{1}{2} P_{n-1-1/2}^1(\cosh \sigma) \right] \quad (31)$$

(30)式を(25)式の境界条件に代入し係数 A_n を決定する。即ち

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot P_{n-1/2}^1(\cosh \sigma_0) \left[(\cosh \sigma_0 - \cos \phi) \cdot n \cdot \sin n \phi + \frac{1}{2} \sin \phi \cdot \cos n \phi \right] = 0$$

を次のように変形し

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{n+1} \cdot P_{n+1-1/2}^1(\cosh \sigma_0) \cdot (\cosh \sigma_0 - \cos \phi) \cdot (n+1) \cdot \sin(n+1)\phi + \frac{A_n}{2} \sin \phi \cdot \cos n \phi \cdot P_{n-1/2}^1(\cosh \sigma_0) \right] = 0$$

トロイダル・オクタポール場の数値計算

これが恒等的に成立つように A_n を定めると A_n は次のような漸化式を充すことがわかる。

$$A_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos n \psi}{\cosh \sigma_0 - \cos \psi} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin(n+1) \psi} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{P_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh \sigma_0)}{P_{n+1-\frac{1}{2}}^1(\cosh \sigma_0)} \cdot A_n \text{ for } n \geq 0 \quad (32)$$

但し $\psi = 0, \pi$ において

$$\begin{aligned} \frac{\sin \psi}{\sin(n+1) \psi} &= \frac{1}{n+1} \quad \text{as } \psi \rightarrow 0 \\ &= \frac{1}{n+1} \quad \text{as } \psi \rightarrow \pi \quad n: \text{偶数} \\ &= -\frac{1}{n+1} \quad \text{as } \psi \rightarrow \pi \quad n: \text{奇数} \end{aligned}$$

§ 6 計算コード

§ 5 で求めたトーラス表面電流のつくる磁場及びそのポテンシャルの数値計算に必要な計算コードを作成した。その詳述は避け、サブ・プログラムを列挙して、§ 5 の磁場及びポテンシャルを求める計算過程を追ってみる。

1) FUNCTION GAUSS (A,B,C,Z,)

(22) 式のガウスの超幾何函数の計算コード。相対誤差 10^{-6} 以下とした。A, B, C は α, β, r に相当する。

2) FUNCTION PHALF (Z,N)

1) の GAUSS (A, B, C, Z) を用いて 20 式 $P_{n-\frac{1}{2}}^1(Z)$ を求める。

3) FUNCTION QHALF (Z,N)

2) と同様 (21) 式の $Q_{n-\frac{1}{2}}^1(Z)$ を求める。

4) FUNCTION VCTA (Z,PSI,N)

(32)式の係数 A_n を決定する。 Z はトーラス管の aspect ratio, PSI は ψ で N を与える
と A_n が決定する。なお出発値として $A_0 = Z$ にとった。又(32)式の $P_{n-1/2}^1$ 及び $P_{n+1-1/2}^1$
は $P_0 = PHALF(Z, 0)$, $P_1 = PHALF(Z, 1)$ から(8), (9)式の漸化式を使って求
めた。

5) FUNCTION VAPHI (ZO,PSI,Z)

ZO =トーラス管の aspect ratio, $PSI = \psi$, $Z = \cosh \sigma$ で4)のVCTAを呼出して
 A_n を求めて(29)式の A_ψ を求める。相対誤差 10^{-6} 以下とした。

6) SUBROUTINE BFIELD (A,Z,PSI,ZO,BS,BP)

入力 $A = a$, $Z = \cosh \sigma$, $PSI = \psi$, ZO =トーラス管の aspect ratioで4)の
VCTAを呼出して A_n を求めて、出力 BS , SP によって(30)式の B_σ , (31)式の B_ψ が求
まる。この場合も $P_{n-1/2}^1$ に関する漸化式を有効に使った。誤差は B_σ と B_ψ の相対誤差の和を
 10^{-6} 以下とした。

7) SUBROUTINE TRSTA (A,X,Z,ASPCT,PSI)

(7-a), (7-b), (7-c)の関係を求めるもので, A, X, Z が入力で $ASPCT = R/r$, $PSI = \psi$ が出力である。このサブ・プログラムは x, z 平面を多数分割して等ポテン
シャル面を求める際有効であった。

§7 トロイダル・オクタポールの等ポテンシャル面

§6の計算コードを使って図・3に示す4本のトーラス管よりなるトロイダル・オクタポールの
等ポテンシャル面を計算してみよう。この場合4本のトーラス管には互いに反対方向の表面電流 I_ψ
が流れ、然もその大きさは全て同じとする。(ヨッへのトーラス化)

図・3に示す任意の点 $P(x, z)$ への4本のトーラス管の寄与を求めると計算コードの形で書
いて次のようになる。

```
FUNCTION QUPL (R1,SR1,R2,SR2,ZA,X,Z)
A1 = SQRT (R1**2-SR1**2)
```

トロイダル・オクタポール場の数値計算

図・3 トロイダル・オクタポールの配置図

図・3 トロイダル・オクタポールの配置図

鬼 頭

```

A2 = SQRT (R2**2-SR2**2)
Z1 = R1/SR1
Z2 = R2/SR2
CALL TRSTA (A1,X,Z-ZA,ASPCT,PSI)
VA1 = VAFHI (Z1,PSI,ASPCT)
CALL TRSTA (A2,X,Z-ZA,ASPCT,PSI)
VA2 = VAFHI (Z2,PSI,ASPCT)
CALL TRSTA (A2,X,Z+ZA,ASPCT,PSI)
VA3 = VAFHI (Z2,PSI,ASPCT)
CALL TRSTA (A1,X,Z+ZA,ASPCT,PSI)
QUPL = VA1-VA2+VA3-VA4
RETRRN
END

```

R1 = 7.0 , R2 = 13.0 , SR1 = SR2 = 1.0 , ZA = 3.0 の場合 FUNCTION QUPL
 を使って等ポテンシャル面を画いたのが図・4である。なお計算に際しては当所の電子計算機
 FACOM230-50を使用した。

真直な4本の棒からなる通常のヨッヘ場とトロイダル・ヨッヘ場の等ポテンシャル面を比較する
 と次の表・1のようになる。

図・4 トロイダル・オクタポールの等ポテンシャル面

	単 純 ヨ ッ ヘ	トロイダル・ヨッヘ
等ポテンシャル 面の概念図
零 点	4 極の極の中心にある	トーラス中心方向にズレる
Separatrix	零点を通り各極間の中心を通る直交 2 直線	上下の極に対してはその中心を通る 直線。左右の極に対して零点を通り トーラス中心方向に曲げられた曲線
等ポテンシャル 面	I, II, III, IV の各々大きさは同じ である。	内部の I, IV 及び外部の II, III は大 きさ同じ。然し内部と外部では大き さを異にする。

表・1 単純ヨッヘとトロイダル・ヨッヘ場の比較

終りにこの問題に関し有益な御助言をいただいた北海道大学教授加地郁夫先生に感謝致します。
又この問題を取上げる動機は川俣修一郎宇都宮大学教授及び電気試験所杉浦賢氏のトーラス実験事実によるものです。ここに御礼申し上げます。

参考文献

- 1) E.W.Hobson : The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics (1933) P433-P443
- 2) 矢野健太郎：幾何学（岩波講座，現代応用数学）
- 3) 安達忠次：ベクトルとテンソル（培風館）
- 4) P.M.Morse & H. Feshbach : Methods of Theoretical Physics (1953) PART II P1301.
- 5) 森口繁一，宇田川銑久，一松 信：数学公式集（岩波全書）
- 6) R.J. Tayler: The Distribution of Currents on The Surface of a Toroidal Conductor(1960) AERE-M563
- 7) J.A. Stratton : Electromagnetic Theory (1941) P37