電子プラズマの “四波”相互作用の運動方程式*

電 試 倉 沢 孝

(1968 年 3 月 19 日受理)

第一章 序 論

電子プラズマ波の“四波”相互作用 (four-wave interaction) を記述する運動方程式 (Kinetic equation) は, すでに Vedenov¹⁾ や Kovrizhnykh²⁾ や Zakharov³⁾ らにより議論されている。Vedenov は Low⁴⁾ により得られたラグランジアンから, そして Kovrizhnykh は Vlasov の式から, 又 Zakharov は流体の式から出発して, それぞれ, 波に対する運動方程式を求めた。しかしながら, 彼等の得た結果の間には, あるくいちがいが存在している。それは, Kovrizhnykh の得たある波数 K の波のエネルギーの単位時間当たりの時間変化は, Vedenov や Zakharov の得たそれらよりも $(K_e/K)^4$ 倍も大きくなっているのである。(ここで K_e は Debye 波数である。)

この論文では, 我々は, Bohm-Pines⁵⁾ のハミルトニアンから出発して, “四波”相互作用を記述する波の運動方程式を求め, そして, その結果を上記の今までに得られている他の方法による結果と比較する。我々の得た結果は, Vedenov や Zakharov の結果と同じオーダーとなる。以下, 第二章で, “四波”相互作用を記述するハミルトニアンが求められ, 第三章で, そのハミルトニアンを用いて波についての運動方程式が得られる。

* Kinetic Equation of "Four-wave" Interaction of Electron Plasma Wave.

** Takasi Kurasawa
Electrotechnical Laboratory, Tokyo, Tanasi-si

第二章 ハミルトニアン

この章では、我々は、電子プラズマ波の“四波”相互作用のハミルトニアンを求める。我々は、イオンが一様にならされている電子プラズマを考える。電子プラズマのハミルトニアン H は、電子の運動エネルギーと電子間のクーロンエネルギーとの和で表わされるから

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (2.1)$$

となる。ここで、 $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{r}_i$, m , $-e$ は、それぞれ電子の運動量、位置、質量、電荷である。

ここで、クーロンエネルギーの項を、単位体積の箱の中で、フーリエ変換すると

$$H = H_{0e} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}}^2 \rho_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} + H_s \quad (2.2)$$

となる。ここで $H_{0e} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$ は運動エネルギーであり、 $M_{\mathbf{k}}$ は $M_{\mathbf{k}}^2 = 4\pi e^2 / k^2$ で定義されている。さらに、 $\rho_{\mathbf{k}}$ は電子密度の $(\mathbf{k})$ フーリエ成分であり、 $\rho_{\mathbf{k}} = \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i)$ で定義されている。 H_s は、 $H_s = -n_0 / 2 \sum_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}}^2$ で表され、(2.2) の右辺第二項に $i = j$ の項を含めたことにより生じた、項である。 n_0 は電子の全粒子数である。以下の計算において H_s は必要ないので、これより後では、 H_s を無視する。

第一節 集団座標の導入

さて、我々は、プラズマが、個々の運動をしている粒子と集団運動の結果として起る波から成っているとみなす。ここで、我々は、次のような交換関係

$$[P_{\mathbf{k}}, Q_{\mathbf{l}}] = P_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{l}} - Q_{\mathbf{l}} P_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar}{i} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{l}} \quad (2.3)$$

$$[Q_{\mathbf{k}}, Q_{\mathbf{l}}] = [P_{\mathbf{k}}, P_{\mathbf{l}}] = 0$$

を満たす集団座標 $(Q_{\mathbf{k}}, P_{\mathbf{k}})$ を導入する。

我々は、ハミルトニアン H を、次のように

$$H_1 = H_{0e} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} < k_c} (M_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} + P_{\mathbf{k}}) (M_{\mathbf{k}} \rho_{-\mathbf{k}} + P_{-\mathbf{k}}) + H_{\text{short}} \quad (2.4)$$

電子プラズマ波の“四波”相互作用の運動方程式

拡張する。ここで、 k_c は集団座標の限界の波数であり、 H_{short} はクーロンエネルギーの k が k_c より大きな部分であり

$$H_{\text{short}} = \frac{1}{2} \sum_{k < k_c} M_k^2 \rho_k \rho_{-k} \quad (2.5)$$

で定義されている。 H_1 が H と同等の役割を持つためには、次の補助条件

$$P_k \phi_1 = 0 \quad (k < k_c) \quad (2.6)$$

が必要となる。ここで、 ϕ_1 は拡張された系での波動関数である。

まず、集団座標と電子の密度揺動とを関連づける正準変換をする。その変換作用素 U_1 は、次の母函数

$$S_1 = -\frac{i}{\hbar} \sum_{k < k_c} M_k \rho_k Q_k \quad (2.7)$$

を用いて、 $U_1 = \exp(S_1)$ のように表わされる。波動関数を、 $\phi_1 = U_1 \phi_2$ とおくことにより、シュレジンガーの式 $H_1 \phi_1 = E_1 \phi_1$ は、 $H_2 \phi_2 = E \phi_2$ に変換される。ここで

$$H_2 = U_1^{-1} H_1 U_1 \quad (2.8)$$

である。上の式の右辺は

$$\exp(-S_1) H_1 \exp(S_1) = H_1 + [H_1, S_1] + \frac{1}{2!} [[H_1, S_1], S_1] + \dots \quad (2.9)$$

のように展開される。変換されたハミルトニアン H_2 は、(2.7) から (2.9) までを用いることにより、

$$H_2 = H_{0c} + H_{pe} + H_{e-cw} + H_{Rp}^c + H_{\text{short}} \quad (2.10)$$

となる。ここで、

$$H_{pe} = \frac{1}{2} \sum_{k < k_c} (P_k P_{-k} + \omega_{pe}^2 Q_k Q_{-k}) \quad (2.11)$$

$$H_{e-cw} = i \sum_{k < k_c} \omega_{0c}^+ (k, p) M_k Q_k \exp(-ik \cdot r_i) \quad (2.12)$$

$$H_{RP}^c = -\frac{1}{2m} \sum_{\substack{k, l < k_c \\ k+l \neq 0}} (k \cdot l) M_k M_l Q_k Q_l P_{k+l} \quad (2.13)$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m} \quad (2.14)$$

$$\omega_{\pm}^c(k, p_i) = \frac{k \cdot p_i \pm \frac{1}{2} \pi k^2}{m} \quad (2.15)$$

である。さらに、補助条件 (2.6) は、

$$(U_1^{-1} P_k U_1) \phi_2 = 0 \quad (k < k_c) \quad (2.16)$$

のように変換されるので、

$$(P_k - M_k \rho_k) \phi_2 = 0 \quad (k < k_c) \quad (2.17)$$

となる。なお、この補助条件は Poisson の式に対応している。

上の補助条件 (2.17) を用いて、我々は、 H_{RP}^c を次のように

$$H_{RP}^c \Rightarrow H_{QQP} = -\frac{1}{2m} \sum_{\substack{k, l < k_c \\ k+l \neq 0}} (k \cdot l) \frac{M_k M_l}{M_{k+l}} Q_k Q_l P_{k+l} \quad (2.18)$$

書きなおす。⁶⁾ 以下、 H_{RP}^c の代りに H_{QQP} を用いる。

第二節 粒子座標と集団座標との分離

上で、我々は、集団座標を導入した。しかし、個々の粒子の座標と集団座標とは、ハミルトニアン $H_{e-e w}$ (2.12) 及び補助条件 (2.17) を通じて強く結び合っている。ここでは、個々の粒子座標と集団座標との分離をする正準変換を行なう。その為に、 $H_{e-e w}$ を消す正準変換の作用素 $U_2 (= \exp(S_2))$ を求める。 U_2 による正準変換で、ハミルトニアン H_2 は

$$\begin{aligned} H_3 &= U_2^{-1} H_2 U_2 \\ &= H_2 + [H_2, S_2] + \frac{1}{2!} [[H_2, S_2], S_2] + \cdots \end{aligned} \quad (2.19)$$

電子プラズマ波の“四波”相互作用の運動方程式

のように変換される。それ故に，

$$〔主要項, S_2〕 = -H_{e-cw} \quad (2.20)$$

を満たすように S_2 を選べば， H_{e-cw} を消すことが出来る。

集団運動の振動数 ω_k を新たに導入することにより， H_{pe} を次のように

$$H_{pe} = H_{fe} + H'_{fe} \quad (2.21)$$

分ける。ここで

$$H_{fe} = \frac{1}{2} \sum_{k < k_c} (P_k P_{-k} + \omega_k^2 Q_k Q_{-k}) \quad (2.22)$$

$$H'_{fe} = \frac{1}{2} \sum_{k < k_c} (\omega_{pe}^2 - \omega_k^2) Q_k Q_{-k} \quad (2.23)$$

である。主要項として，個々の粒子の運動エネルギー H_{0e} と，振動数 ω_k で振動する調和振動のエネルギー H_{fe} との和と取ることにより， S_2 は， $〔H_{0e} + H_{fe}, S_2〕 = -H_{e-cw}$ から，

$$S_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k < k_c} M_k \frac{\omega_{0e}^+(k, p_i) P_{-k} + i \omega_{0e}^+(k, p_i)^2 Q_k}{\omega_{0e}^+(k, p_i)^2 - \omega_k^2} \exp(-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) \quad (2.24)$$

のように求まる。

上の S_2 を用いると， H_3 (2.19) は

$$\begin{aligned} H_3 = & H_{0e} + H_{fe} + (H_{e-cw})_{\text{real}} + H_{QQP} + H'_{fe} + H_{\text{short}} + \frac{1}{2} [H_{e-cw}, S_2] \\ & + [H_{QQP} + H'_{fe} + H_{\text{short}}, S_2] + \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

となる。ここで， $(H_{e-cw})_{\text{real}}$ は， H_{e-cw} の real process を表わす。この $(H_{e-cw})_{\text{real}}$ をもとにして，波のエネルギーの時間変化の式⁷⁾を求めると，いわゆる準線型理論となる。振動数 ω は， $\frac{1}{2} [H_{e-cw}, S_2]$ の QQ 部分と H'_{fe} との和が零にな

るように決める。すなわち

$$H'_{fc} + \frac{1}{2} [H_{e-cw}, S_2] QQ = 0 \quad (2.26)$$

から、次のような分散式

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_i \frac{1}{(\omega_k - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_i}{m})^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}} \quad (2.27)$$

が求まる。上の分散式は、古典の極限 $\hbar \rightarrow 0$ 、及び $k \ll k_e$ (ここで $k_e^2 = 4\pi n_e e^2 / \kappa T_e$ である)、及び電子分布がマックスウェル分布であるとする、よく知られている分散式

$$\omega_k^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_e^2 \quad (2.28)$$

となる。ここで、 $v_e^2 = \kappa T_e / m$ である。

このようにして、 H_3 は $k \ll k_e$ 及び $g = 1/n_e \lambda_{De}^3 \ll 1$ のもとに (ここで $\lambda_{De}^2 = \kappa T_e / 4\pi n_e e^2$ である)

$$H_3 = H_{0e} + H_{fc} + (H_{e-cw})_{\text{real}} + H_{QQP} + H_{\text{short}} + H_{e-cw-cw} + \dots \quad (2.29)$$

となる。ここで、 $H_{e-cw-cw}$ は、電子による波の散乱を表わすハミルトニアンである。

$H_{e-cw-cw}$ の形及びその素過程の電子プラズマ波に及ぼす効果等は、論文(6)で議論されている。この項は、これからの我々の求めたい“四波”相互作用へのハミルトニアンには寄与しないので、以下では落とされる。 H_{short} も同様の理由で、以下で落とされる。

さらに、補助条件(2.17)も変換されて

$$(M_k \sum_i \frac{\omega_k^2 - \frac{1}{2} \omega_{0e}^+ (\mathbf{k}, \mathbf{p}_i)^2}{\omega_{0e}^+ (\mathbf{k}, \mathbf{p}_i)^2 - \omega_k^2} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i)) \psi_3 = 0 \quad (k < k_e) \quad (2.30)$$

となる。ここで、 ψ_3 は、新たに変換された系の波動関数である。(2.30)をみると、 H_{e-cw} を消す変換が、補助条件においては、粒子座標と集団座標との結合をほどこしていることになっている。このようにして、我々は、粒子座標と集団座標との分離を見ることが出来た。

電子プラズマ波の“四波”相互作用の運動方程式

第三節 “四波”相互作用のハミルトニアン

さて、この節で、我々は、“四波”相互作用を記述するハミルトニアンを求める。いまや、近似 $k \ll k_c$, $g = 1/n_c \lambda_{Dc}^3 \ll 1$ のもとにおいては、 H_3 では H_{QQP} が最大の摂動項となっている。それ故に、ハミルトニアンの主要項を $H_{0c} + H_{fc}$, そして摂動項を H_{QQP} として、 H_{QQP} を消す正準変換を考える。その正準変換の母関数 S_3 を

$$[H_{0c} + H_{fc}, S_3] = -H_{QQP} \quad (2.31)$$

となるように S_3 を求めると

$$S_3 = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{s, t \leq k_c \\ s+t \neq 0}} \frac{\frac{(s \cdot t)}{2m} \cdot \frac{M_s M_t}{M_{s+t}}}{(\omega_s + \omega_t + \omega_{s+t})(\omega_s + \omega_t - \omega_{s+t})(\omega_s - \omega_t + \omega_{s+t})(\omega_s - \omega_t - \omega_{s+t})} \left\{ \begin{aligned} &\omega_s^2 + \omega_t^2 - (\omega_{s+t}^2 + \omega_{s-t}^2) Q_s Q_t Q_{s+t} \\ &+ (-\omega_s^2 + \omega_t^2 - \omega_{s+t}^2) Q_s P_{-t} P_{s+t} \\ &+ (\omega_s^2 - \omega_t^2 - \omega_{s+t}^2) P_{-s} Q_t P_{s+t} \\ &+ 2\omega_{s+t} P_{-s} P_{-t} Q_{s+t} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

となる。この S_3 により新たに変換されるハミルトニアン H_4 は

$$\begin{aligned} H_4 &= \exp(-S_3) H_3 \exp(S_3) \\ &= H_{0c} + H_{fc} + (H_{c-cw})_{\text{real}} + \frac{1}{2} [H_{QQP}, S_3] + \dots \quad (2.33) \end{aligned}$$

である。“四波”相互作用を記述するハミルトニアン $H_{c-cw-cw-cw}$ は、 $k \ll k_c$ の近似のもとにおいては、 $\frac{1}{2} [H_{QQP}, S_3]$ が主要項となる。

$\frac{1}{2} [H_{QQP}, S_3]$ を $k \ll k_c$ の近似のもとにおいて計算すると

電 試

$$\begin{aligned}
 H_{c w - c w - c w - c w} &= \frac{1}{2} [H_{QQP}, S_3] \\
 &= -\frac{1}{6\omega_{pe}^2} \sum_{k, l, s, t < k_c} \left\{ \omega_{pe}^2 A(k, l, s, t) Q_k Q_l Q_s Q_t \right. \\
 &\quad \left. + B(k, l, s, t) Q_k Q_l P_{-s} P_{-t} \right\} \delta_{k+l, -(s+t)}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。ここで

$$A(k, l, s, t) = \alpha(k, l) \{ \alpha(-s-t, t) + \alpha(s, -s-t) + \alpha(s, t) \} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 B(k, l, s, t) &= \alpha(k, l) \alpha'(s, t) - \alpha(-l-s, l) \alpha'(-k-t, t) - \alpha(k, -k-s) \\
 &\quad \alpha'(-l-t, t) - \alpha(-l-t, l) \alpha'(s, -k-s) - \alpha(k, -k-t) \\
 &\quad \alpha'(s, -l-s)
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\alpha(k, l) = \frac{\sqrt{4\pi e^2}}{2m} \left(\frac{k \cdot l}{kl} \right) |k+l| \tag{2.37}$$

$$\alpha'(s, t) = 2\alpha(s, t) - \alpha(-s-t, t) - \alpha(s, -s-t) \tag{2.38}$$

である。

Q_k, P_k をプラズモンの生成, 消滅の演算子 b_k^*, b_k を用いて, 次のように

$$Q_k = \left(\frac{\hbar}{2\omega_k} \right)^{1/2} (b_k^* + b_{-k}) \tag{2.39}$$

$$P_k = i \left(\frac{\hbar\omega_k}{2} \right)^{1/2} (b_{-k}^* - b_k)$$

書きなおす。なお b_k^*, b_k の交換関係は

$$\begin{aligned}
 [b_k, b_l^*] &= \delta_{k, l} \\
 [b_k, b_l] &= [b_k^*, b_l^*] = 0
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

である。

電子プラズマ波の “ 四波 ” 相互作用の運動方程式

二つのプラズモンが消滅し、同時に二つのプラズモンが生成する過程のみが、エネルギー保存と運動量保存を同時に満たし、一つが消え三つが生じる過程及びその逆の過程は、エネルギー保存と運動量保存を同時に満たさない。それ故に、二つが消え、二つが生じる過程のみをとることにより

$$\begin{aligned}
 H_{ew-cw-cw-cw} = & - \frac{\hbar^2}{24\omega_{pe}^2} \sum_{k,l,s,t < k_c} \left\{ A(k,l,s,t) + A(l \leftrightarrow s) + A(l \leftrightarrow t) \right. \\
 & + A(k \leftrightarrow s) + A(k \leftrightarrow t) + A\left(\frac{k \leftrightarrow s}{l \leftrightarrow t}\right) - B(k,l,s,t) + B(l \leftrightarrow s) \\
 & \left. + B(l \leftrightarrow t) + B(k \leftrightarrow s) + B(k \leftrightarrow t) - B\left(\frac{k \leftrightarrow s}{l \leftrightarrow t}\right) \right\} \delta_{k+l, -(s+t)} b_k^* b_l^* b_{-s} b_{-t} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

となる。ここで $A(l \leftrightarrow s)$ は、 $A(k, l, s, t)$ で l と s とを交換した $A(k, s, l, t)$ を表わす。(2.35) ~ (2.38) を用いて上の式を計算すると

$$H_{ew-cw-cw-cw} = \sum_{k,l,s,t < k_c} V_{ew-cw-cw-cw}(k,l,s,t) \delta_{k+l, s+t} b_k^* b_l^* b_s b_t \quad (2.42)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 V_{ew-cw-cw-cw}(k,l,s,t) = & - \frac{\hbar^2}{16mn_c} \left\{ \left(\frac{k \cdot l}{kl} \right) \left(\frac{s \cdot t}{st} \right) |k+l| \cdot |s+t| \right. \\
 & - \frac{(4(k \cdot l)^2 + 3(k \cdot l)(k^2 + l^2) + 2k^2 l^2)(4(s \cdot t)^2 + 3(s \cdot t)(s^2 + t^2) + 2s^2 t^2)}{3klst|k+l| \cdot |s+t|} \\
 & + \left(\frac{k \cdot s}{ks} \right) \left(\frac{l \cdot t}{lt} \right) (|k-s| \cdot |l-t| - \frac{(k^2 - s^2)(l^2 - t^2)}{|k-s| \cdot |l-t|}) \\
 & \left. + \left(\frac{l \cdot s}{ls} \right) \left(\frac{k \cdot t}{kt} \right) (|l-s| \cdot |k-t| - \frac{(l^2 - s^2)(k^2 - t^2)}{|l-s| \cdot |k-t|}) \right\} \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

である。

このようにして、我々は、“ 四波 ” 相互作用を記述するハミルトニアン(2.42)を得ることが出来た。参考の為に、ハミルトニアン $H_{ew-cw-cw-cw}$ により記述される素過程のダイアグラムを示すと、それは、Fig.1で表わされる。

Fig.1 “四波”相互作用を記述するダイアグラム。(e w)と
符号のついている波型の線は，電子プラズマ波を表わす。

なお，正準変換 U_2 の段階でも， S_2 の三次の項で“四波”相互作用のハミルトニアンが出るが，それは，我々の求めたハミルトニアンよりも $(k/k_c)^2$ のオーダー小さくなる。さらに， H_{QQP} を消去するとき，同時に $H_{c-cw-cw}$ をも消去すると“四波”相互作用のハミルトニアンが出るが，それは，我々の求めたハミルトニアンよりも (k/k_e) のオーダー小さくなる。

補助条件は， S_3 の変換では，(2.30)の形は変わらず，ただ ψ_3 の代りに新しい系の波動関数 ψ_4 を置きかえれば良い。

(2.43)を眺めると， $V_{c-w-cw-cw}(k, l, s, t)$ は次の対称性

$$V(k, l, s, t) = V(k \leftrightarrow l) = V(s \leftrightarrow t) = V\left(\begin{smallmatrix} k \leftrightarrow s \\ l \leftrightarrow t \end{smallmatrix}\right) \quad (2.44)$$

を有していることがわかる。さらに， $V(k, l, s, t)$ は， k, l, s, t が一次元上で同じ向きのとき，零となる。³⁾

(2.45)

第三章 運動方程式

前章で，我々は，“四波”相互作用のハミルトニアンを求めた。この章では，そのハミルトニアンを用いて，“四波”相互作用によるプラズモンの個数の時間変化を記述する式を求める。

“四波”相互作用は，波同志だけの相互作用で，粒子はこの相互作用で何ら影響を受けない。いま，波についての主要項と“四波”相互作用を記述するハミルトニアンだけを考慮して，

電子プラズマ波の“四波”相互作用の運動方程式

ハミルトニアンをハイゼンベルグ表示で書くと

$$H_H = \sum_{k < k_c} \hbar \omega_k b_k^*(t) b_k(t) + \sum_{k, l, s, t} V(k, l, s, t) \delta_{k+l, s+t} b_k^*(t) b_l^*(t) b_s(t) b_t(t) \quad (3.1)$$

となる。プラズモンの個数の分布関数 $N_q(t)$ を

$$N_q(t) = \text{Tr} [\rho(0) b_q^*(t) b_q(t)] = \langle b_q^*(t) b_q(t) \rangle \quad (3.2)$$

で定義する。 $\rho(0)$ は, $t=0$ での密度行列である。以下, $(H_{c-e w})_{\text{real}}$ を摂動項として求めた Pines-Schrieffer の式⁷⁾ を出すときと同じ処法⁸⁾ に従う。

プラズモンの消滅演算子のハイゼンベルグ表示 $b_q(t)$ の時間変化は

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} b_q(t) = [b_q(t), H_H] \quad (3.3)$$

より求まるから

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} b_q(t) = \hbar \omega_q b_q(t) + 2 \sum_{l, s, t} V(q, l, s, t) \delta_{q+l, s+t} b_l^*(t) b_s(t) b_t(t) \quad (3.4)$$

となる。同様に $b_q^*(t)$ の時間変化は

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} b_q^*(t) = -\hbar \omega_q b_q^*(t) - 2 \sum_{l, s, t} V(q, l, s, t) \delta_{q+l, s+t} b_l(t) b_s^*(t) b_t^*(t) \quad (3.5)$$

となる。モード q のプラズモンの個数の時間変化は, (3.4) と (3.5) を用いて

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} N_q(t) &= i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle b_q^*(t) b_q(t) \rangle \\ &= 2 \sum_{l, s, t} V(q, l, s, t) \delta_{q+l, s+t} \{G^+(q, l, s, t; t) - G(q, l, s, t; t)\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。ここで, G^+ や G は

$$G^+(q, l, s, t; t) = \langle b_q^*(t) b_l^*(t) b_s(t) b_t(t) \rangle \quad (3.7)$$

$$G(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; t) = \langle b_{\mathbf{q}}(t) b_{\mathbf{l}}(t) b_{\mathbf{s}}^*(t) b_{\mathbf{t}}^*(t) \rangle \quad (3.8)$$

で定義される量である。

G^+ の時間変化の式を求めると

$$\begin{aligned} \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{l}} - \omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{t}}) \right\} G^+(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; t) = 2 \sum_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}} \{ \\ -V(\mathbf{q}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \delta_{\mathbf{q}+\vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}} \langle b_{\vec{\alpha}}^*(t) b_{\vec{\beta}}^*(t) b_{\vec{\gamma}}(t) b_{\mathbf{l}}^*(t) b_{\mathbf{s}}(t) b_{\mathbf{t}}(t) \rangle \\ -V(\mathbf{l}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \delta_{\mathbf{l}+\vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}} \langle b_{\mathbf{q}}^*(t) b_{\vec{\alpha}}^*(t) b_{\vec{\beta}}^*(t) b_{\vec{\gamma}}(t) b_{\mathbf{s}}(t) b_{\mathbf{t}}(t) \rangle \\ +V(\mathbf{s}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \delta_{\mathbf{s}+\vec{\alpha}, \vec{\beta}+\vec{\gamma}} \langle b_{\mathbf{q}}^*(t) b_{\mathbf{l}}^*(t) b_{\vec{\alpha}}^*(t) b_{\vec{\beta}}(t) b_{\vec{\gamma}}(t) b_{\mathbf{t}}(t) \rangle \\ +V(\mathbf{t}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \delta_{\mathbf{t}+\vec{\alpha}, \vec{\beta}+\vec{\gamma}} \langle b_{\mathbf{q}}^*(t) b_{\mathbf{l}}^*(t) b_{\mathbf{s}}(t) b_{\vec{\alpha}}^*(t) b_{\vec{\beta}}(t) b_{\vec{\gamma}}(t) \rangle \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。このようにして、生成、消滅演算子の四つの積の平均値を求めるためには、六つの積の平均値を求めなければならなくなる。我々は、ここで、生成、消滅演算子が六つ掛った平均値を、二つづつの平均値の積で表わすという仮定を行なう。たとえば、上の式の右辺第一項は、 $(\vec{\alpha} = \mathbf{s}, \vec{\beta} = \mathbf{t}, \vec{\gamma} = \mathbf{l})$ の場合と $(\vec{\alpha} = \mathbf{t}, \vec{\beta} = \mathbf{s}, \vec{\gamma} = \mathbf{l})$ の場合との二つに分けられ、

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}} V(\mathbf{q}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}) \delta_{\mathbf{q}+\vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}} \langle b_{\vec{\alpha}}^*(t) b_{\vec{\beta}}^*(t) b_{\vec{\gamma}}(t) b_{\mathbf{l}}^*(t) b_{\mathbf{s}}(t) b_{\mathbf{t}}(t) \rangle \\ \Rightarrow V(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{l}, \mathbf{s}+\mathbf{t}} \langle b_{\mathbf{s}}^*(t) b_{\mathbf{s}}(t) \rangle \langle b_{\mathbf{t}}^*(t) b_{\mathbf{t}}(t) \rangle \langle b_{\mathbf{l}}(t) b_{\mathbf{l}}^*(t) \rangle \\ + V(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{t}, \mathbf{s}) \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{l}, \mathbf{t}+\mathbf{s}} \langle b_{\mathbf{t}}^*(t) b_{\mathbf{t}}(t) \rangle \langle b_{\mathbf{s}}^*(t) b_{\mathbf{s}}(t) \rangle \langle b_{\mathbf{l}}(t) b_{\mathbf{l}}^*(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

で表わせるというような仮定をする。交換関係 $[b_{\mathbf{q}}(t), b_{\mathbf{q}}^*(t)] = 1$ から

$$\langle b_{\mathbf{q}}(t) b_{\mathbf{q}}^*(t) \rangle = N_{\mathbf{q}} + 1 \quad (3.11)$$

となるということと、又 $V(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ の対称性(2.44)を用いると、(3.9)は

電子プラズマ波の“四波”相互作用の運動方程式

$$\left\{ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar (\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{l}} - \omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{t}}) \right\} G^+(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; t) = 4V(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \\ \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{l}, \mathbf{s}+\mathbf{t}} \{ N_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{l}} (N_{\mathbf{s}} + N_{\mathbf{t}} + 1) - (N_{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{l}} + 1) N_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{t}} \} \quad (3.12)$$

となる。同様にして G の時間変化の式を求めると、

$$\left\{ i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hbar (\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{l}} - \omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{t}}) \right\} G(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t}; t) = 4V(\mathbf{q}, \mathbf{l}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \\ \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{l}, \mathbf{s}+\mathbf{t}} \{ (N_{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{l}} + 1) N_{\mathbf{s}} N_{\mathbf{t}} - N_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{l}} (N_{\mathbf{s}} + N_{\mathbf{t}} + 1) \} \\ = \Phi(t) \quad (3.13)$$

となる。ここで上の式の右辺を $\Phi(t)$ と置き、

$$\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{l}} - \omega_{\mathbf{s}} - \omega_{\mathbf{t}} = \Delta\omega \quad (3.14)$$

とすると、(3.12)、(3.13)は

$$-i \hbar \frac{\partial}{\partial t} G^+(t) - \hbar \Delta\omega G^+(t) = \Phi(t) \quad (3.15)$$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} G(t) - \hbar \Delta\omega G(t) = \Phi(t) \quad (3.16)$$

と表わせられる。上の式より $G^*(t) = G^+(t)$ となるから

$$G(t) = G'(t) + i G''(t) \quad (3.17)$$

$$G^+(t) = G'(t) - i G''(t) \quad (3.18)$$

と置くことが出来る。(3.17)を(3.16)に代入して、実数部分と虚数部分とに分けると

$$-\hbar \frac{\partial}{\partial t} G''(t) - \hbar \Delta\omega G'(t) = \Phi(t) \quad (3.19)$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} G'(t) - \hbar \Delta\omega G''(t) = 0 \quad (3.20)$$

の式が得られる。上の二式にラプラス変換

$$\widetilde{G}(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} G(t) \quad (3.21)$$

をすると

$$-(-G''(0) + S \tilde{G}''(s)) - \Delta\omega \tilde{G}'(s) = \tilde{\Phi}(s)/\hbar \quad (3.22)$$

$$(-G'(0) + S \tilde{G}'(s)) - \Delta\omega \tilde{G}''(s) = 0 \quad (3.23)$$

となる。(3.23)より $\tilde{G}'(s)$ を求めて、(3.22)に代入して $\tilde{G}''(s)$ を求めると

$$\tilde{G}''(s) = \frac{1}{s^2 + (\Delta\omega)^2} \left\{ s G''(0) - (\Delta\omega) G'(0) - \frac{s}{\hbar} \tilde{\Phi}(s) \right\} \quad (3.24)$$

となる。逆変換により $G''(t)$ は

$$\begin{aligned} G''(t) &= G''(0) \cos(\Delta\omega t) - G'(0) \sin(\Delta\omega t) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\hbar} \int_0^\infty ds e^{st} \frac{s}{s^2 + (\Delta\omega)^2} \int_0^\infty dt' e^{-st'} \Phi(t') \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。ここで、上の式の第一項、第二項は振動項であるので無視する。又、 $G''(t)$ を求める段階においては、 $\Phi(t')$ は時間的に一定であるという仮定をすると

$$G''(t) = -\frac{\Phi(t)}{\hbar} \cdot \frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega} \quad (3.26)$$

となる。 $t \gg \frac{1}{\Delta\omega}$ のとき、次の関係

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \nu x}{x} = \delta(x) \quad (3.27)$$

を用いると、(3.26)は

$$G''(t) = -\frac{\Phi(t)}{\hbar} \pi \delta(\Delta\omega) \quad (3.28)$$

となる。

(3.6), (3.17), (3.18)により

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} N_{\mathbf{q}}(t) = 2 \sum_{\mathbf{l}, s, t} V(\mathbf{q} | \mathbf{l} s t) \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{l}, s+t} (-2i G''(t)) \quad (3.29)$$

電子プラズマ波の“四波”相互作用の運動方程式

となるから、(3.28)を上式に代入し、 $\Phi(t)$ は(3.13)を、 $\Delta\omega$ は(3.14)を用いると、我々の求めていた式は

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q}}(t)}{\partial t} = \frac{16\pi}{\hbar^2} \sum_{\ell, s, t < k_c} (V(\mathbf{q}, \ell, s, t))_{\text{cw-cw-cw-cw}}^2 \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{l}, \mathbf{s}+\mathbf{t}} \{ (N_{\mathbf{q}}+1)(N_{\mathbf{l}}+1)N_{\mathbf{s}}N_{\mathbf{t}} - N_{\mathbf{q}}N_{\mathbf{l}}(N_{\mathbf{s}}+1)(N_{\mathbf{t}}+1) \} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{l}}-\omega_{\mathbf{s}}-\omega_{\mathbf{t}}) \quad (3.30)$$

となる。なお、 $V(\mathbf{q}, \ell, s, t)_{\text{cw-cw-cw-cw}}$ は、(2.43)で与えられている。

モード $\mathbf{k}$ の波のエネルギー $U_{\mathbf{k}}$ は、 $N_{\mathbf{k}}$ とは次の関係

$$U_{\mathbf{k}} = \hbar \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \quad (3.31)$$

で結び合わされている。(3.30)の古典極限($\hbar \rightarrow 0$)をとると

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{q}}} \right) \right]_{\text{cw-cw-cw-cw}} = \sum_{\ell, s, t < k_c} W(\mathbf{q}, \ell, s, t)_{\text{cw-cw-cw-cw}} \left\{ \left(\frac{U_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{q}}} + \frac{U_{\mathbf{l}}}{\omega_{\mathbf{l}}} \right) \left(\frac{U_{\mathbf{s}}}{\omega_{\mathbf{s}}} \right) \left(\frac{U_{\mathbf{t}}}{\omega_{\mathbf{t}}} \right) - \left(\frac{U_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{q}}} \right) \left(\frac{U_{\mathbf{l}}}{\omega_{\mathbf{l}}} \right) \left(\frac{U_{\mathbf{s}}}{\omega_{\mathbf{s}}} + \frac{U_{\mathbf{t}}}{\omega_{\mathbf{t}}} \right) \right\} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{l}, \mathbf{s}+\mathbf{t}} \delta(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{l}}-\omega_{\mathbf{s}}-\omega_{\mathbf{t}}) \quad (3.32)$$

となる。ここで

$$W(\mathbf{q}, \ell, s, t)_{\text{cw-cw-cw-cw}} = \frac{16\pi}{\hbar^4} (V(\mathbf{q}, \ell, s, t)_{\text{cw-cw-cw-cw}})^2 \quad (3.33)$$

である。

なお、(3.30)から(2.44)の対称関係を用いて、次のようなブラズモンの全個数の保存、全運動量の保存、全エネルギーの保存の関係

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} N_{\mathbf{k}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

を求めることが出来る。²⁾ ³⁾

第四章 結 論

前章までで、我々は、Bohm-Pinesのハミルトニアンから出発して、“四波”相互作用による電子プラズマ波の波のエネルギーの時間変化の式を得た。

i) まず、他の方法による結果と、我々の得た結果との比較を試みる。

我々の求めた比例係数 $W(k, l, s, t)$ は $W \sim k^4 / m^2 n_e^2$ のオーダーとなった。これは、Vedenov¹⁾ や Zakharov³⁾ の結果と同じオーダーとなっている。しかし Kovrizhnykh²⁾ の結果は、 $W_{\text{kovrizhnykh}} \sim k_e^4 / m^2 n_e^2$ のオーダーとなっており、我々の値よりも $(k_e / k)^4$ ($\gg 1$) のオーダー大きい値となっている。

ii) さて、この論文で用いた近似と仮定とを並べてみると、ハミルトニアンを求める段階において

$$1) k \ll k_e$$

$$2) g = 1 / n_e \lambda_{De}^3 \ll 1$$

の近似を用い、運動方程式を求める段階において

3) 生成・消滅演算子が6個掛った平均値を2個ずつの平均値の積とする仮定

4) 生成・消滅演算子が4個掛った平均値 (G, G^+) を求める段階で N_k は時間的に一定という仮定

5) $t \gg 1 / \omega_{pe}$ なる近似

を用いた。

iii) なお、この論文で扱って来たようなイオンが一様にならされているプラズマでは、粒子間の衝突が無視出来るとき、“四波”相互作用の他に、電子による波の発生・吸収 (H_{c-cw}) real ダイアグラムは Fig. 2) 及び電子による波の散乱 ($H_{c-cw-cw}$, ダイアグラムは Fig. 3) をも同時に考慮しなければならない。

Fig. 2 電子(c)による電子プラズマ波(ew)の発生又は吸収を表わすダイアグラム

Fig. 3 電子による電子プラズマ波の散乱を表わすダイアグラム

電子プラズマ波の“四波”相互作用の運動方程式

それらをも考慮した波のエネルギーの時間変化の式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) = & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) \right]_{e-cw} + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) \right]_{e-cw-e_w} \\ & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) \right]_{ew-cw-cw-e_w} \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。上の式の右辺第一項は、 $(H_{e-cw})_{real}$ をもとにして作られた式⁷⁾

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) \right]_{e-cw} = & \sum_p \frac{4\pi^2 e^2 \omega_k}{k^2} \left\{ k \cdot \frac{\partial f(p)}{\partial p} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) \right. \\ & \left. + f(p) \right\} \delta \left(\frac{k \cdot p}{m} - \omega_k \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

である。又、(4.1)の右辺第二項は、 H_{e-cw-e_w} をもとにして作られた式⁶⁾

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) \right]_{e-cw-e_w} = & \sum_{p, k < k_c} \frac{\pi}{2 N e} \left(\frac{k \cdot l}{k l} \right)^2 \left\{ (k+l) \cdot \frac{p}{m} \right. \\ & - \frac{k^2 - l^2}{|k-l|^2} \left((k-l) \cdot \frac{p}{m} \right)^2 \left\{ (k-l) \cdot \frac{\partial f(p)}{\partial p} \left(\frac{U_k}{\omega_k} \right) \left(\frac{U_l}{\omega_l} \right) \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{U_l}{\omega_l} - \frac{U_k}{\omega_k} \right) f(p) \right\} \delta \left(\frac{(k-l) \cdot p}{m} - (\omega_k - \omega_l) \right) \right\} \end{aligned}$$

である。ここで $f(p)$ は、電子の運動量分布函数である。(4.1)の右辺第三項は、“四波”相互作用を記述する項で(3.32)で与えられている。

最後に、いろいろと有意義な議論をしていただいた松浦健哉氏に心から感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) A.A. Vedenov : Reviews of Plasma Physics Vol.3 (Consultants Bureau, New York 1967) 0272.
- 2) L. Kovrizhnykh: Soviet Physics-JETP 22 (1966) 168.
- 3) V.E. Zakharov : Soviet Physics-JETP 24(1967) 455.
- 4) F.E. Low : Proc. Roy. Soc. A 248 (1958) 282.
- 5) D. Bohm and D. Pines : Phys. Rev. 92(1953) 609.
- 6) K. Matsuura and T. Kurasawa : J. Phys. Soc. Japan 22 (1967) 1461.
- 7) D. Pines and J.R. Schrieffer : Phys. Rev. 125 (1962) 804.
- 8) 松平升: 物性研究 2 (1964) 62.