直線マルチポール磁場におけるプラズマの平衡 ^{*})

田中正俊, 森 茂 (原研) ^{**})

(昭和 44 年 3 月 31 日受理)

§ 1. はじめに

まえに線状導体でつくられた直線マルチポール磁場の 2, 3 の性質について報告した。⁽¹⁾ここでは MHD 近似でプラズマの平衡をしらべる。真空磁場を $\mathbf{B}_0$ 近似として, プラズマの存在による磁場の变化を摂動法によってプラズマ圧力について一次の項まで求める。プラズマの圧力分布としては, 真空磁場のセパトリックス上にピークをもち, 内外の適当な磁力線上で 0 になるものをとる。この報告では問題の定式化を述べ, 数値的な結果はいわゆるトロイダル磁場の効果とあわせてつぎに報告する。

§ 2. 基礎方程式

MHD 近似でのプラズマの平衡は

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{B}} &= \nabla P \\ \nabla \times \vec{\mathbf{B}} &= \mu_0 \vec{\mathbf{J}}, \quad \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0\end{aligned}\tag{1}$$

で記述される。ここで $\vec{\mathbf{J}}$ は電流密度, P はプラズマの圧力である。磁場をつくる導体の方向を z 軸と

^{*}) A class of plasma equilibria in linear multipole magnetic fields

^{**}) Masatoshi TANAKA, Seigeru MORI

(Japan Atomic Energy Research Institute, IBARAKI)

する円柱座標 (r, θ, z) を導入する。 $\partial/\partial z \equiv 0$ である。磁場の流れ関数 ψ を

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

で定義すると, (1) から P, B_z は ψ だけの関数である。

$$P = P(\psi), \quad B_z = B_z(\psi)$$

以下 $B_z \equiv 0$ とする。すなわちいわゆるトロイダル磁場はないものとする。

よく知られているように, (1) から ψ に対する方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \mu_0 \frac{dP}{d\psi} = 0 \quad (3)$$

がえられる。またプラズマの反磁性電流密度は

$$J_z = \mu_0 \frac{dP}{d\psi} \quad (4)$$

があたえられる。

つぎのような導体配置を考える。 N 本の線状導体 (電流 I はすべて同方向) は z 軸に沿った半径 a の円柱上に対称に置かれているとする。すなわち導体の (r, θ) 面での位置は $(a, (2\pi/N)(n-1))$, $n = 1, 2, \dots, N$, である。(才1図(a))。磁場の流れ関係 ψ は各導体の近くで強さ $\mu_0 I / 2\pi$ の対数的特異性をもつ。

つぎに新しい変数 (ρ, ϕ) を

$$\begin{aligned} r^N \cos N\theta &= a_2 + \rho \cos \phi \\ r^N \sin N\theta &= \rho \sin \phi, \quad a_2 \equiv a^N \end{aligned} \quad (5)$$

によって導入する。この変換で, 導体をはさむ扇状領域 $0 \leq r < \infty, -\pi/N \leq \theta \leq \pi/N$ は, $0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ なる全 (ρ, ϕ) 面に移される。同時に導体の位置は $\rho = 0$, すなわち (ρ, ϕ) 面の原点に移る (才1図)。変数 (ρ, ϕ) を導入したのは, あとで述べるよ

(b)

(a)

才 1 図

うに真空磁場の磁力線の指定が簡単化されるためである。(3)は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\mu_0}{N^2} (a_2^2 + \rho^2 + 2a_2 \rho \cos \phi) \frac{1-N}{N} \frac{dP}{d\psi} \quad (6)$$

となる。

§ 3 摂動法

真空磁場を ψ_0 近似として

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad (7)$$

とおく。

オ1図(b)から明らかなように、真空磁場の流れ関数 ψ_0 は ρ だけの関数であり、原点で強さ $\mu_0 I / 2\pi$ の対数的特異性をもつはずである。すなわち

$$\psi_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \rho \quad (8)$$

(r, θ)で表わすと

$$\psi_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log (a_2^2 N + r^2 N - 2a_2^N r^N \cos N\theta)$$

である。真空磁場の磁力線は ρ ＝一定で指定される。とくにセバトリックスは $\rho = a_2$ である。

プラズマの存在による摂動としてプラズマ圧力 P の一次の項までに止めると、 ψ_1 は

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \phi^2} = - \frac{\mu_0}{N^2} (a_2^2 + \rho^2 + 2a_2 \rho \cos \phi) \frac{1-N}{N} \frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0} \quad (9)$$

の解としてえられる。プラズマの圧力分布 $P(\psi_0)$ は、セバトリックス $\rho = a_2$ 上にピークをもち、 $\rho = a_1, a_3$ で0になるとする($0 < a_1 < a_2 < a_3 < \infty$)。オ2図に $P \propto \psi_0$ 、 $P \propto \psi_0^2$ の例をしめす。

オ1図のように空間をⅠ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳの4領域にわけると。プラズマが存在するのはⅡ, Ⅲの2つ

図 2

の領域である。各領域での流出函数を $\psi_1^I, \psi_1^{II}, \psi_1^{III}, \psi_1^{IV}$ とする。(9)の右辺の $dP(\psi_0)/d\psi_0$ は ψ_0 のみの関数であるから

$$-\frac{\mu_0}{N^2} \frac{dP(\psi_0)}{d\psi_0} = \begin{cases} 0 & I \\ q_N^{II}(\rho) & II \\ q_N^{III}(\rho) & III \\ 0 & IV \end{cases} \quad (10)$$

とかく。

才 1 図から明らかなように ψ_1 は ϕ の偶関数である。したがって各領域での (9) の解は

$$\begin{aligned}\psi_1^{\text{I}} &= \sum_1^\infty A_m^{\text{I}} \rho^m \cos m\phi \\ \psi_1^{\text{II}} &= C^{\text{II}} + A_0^{\text{II}} \log \rho + \sum_1^\infty (A_m^{\text{II}} \rho^m + B_m^{\text{II}} \rho^{-m}) \cos m\phi + \xi^{\text{II}} \\ \psi_1^{\text{III}} &= C^{\text{III}} + A_0^{\text{III}} \log \rho + \sum_1^\infty (A_m^{\text{III}} \rho^m + B_m^{\text{III}} \rho^{-m}) \cos m\phi + \xi^{\text{III}} \\ \psi_1^{\text{IV}} &= C^{\text{IV}} + A_0^{\text{IV}} \log \rho + \sum_1^\infty B_m^{\text{IV}} \rho^{-m} \cos m\phi\end{aligned}\quad (11)$$

となる。ここで ξ^{II} , ξ^{III} は領域 II, III での (9) の特解である。

係数 A_m^{I} などはつぎの境界条件から定められる。

$$\psi_1, \frac{\partial \psi_1}{\partial \rho} \text{ は } \rho = a_1, a_2, a_3 \text{ で連続} \quad (12)$$

§ 4. 係数の決定

まず (9) の特解 ξ^{II} , ξ^{III} を求める。そのため (9) の右辺をフーリエ級数で表わす。²⁾

$$(9) \text{ の右辺} = \begin{cases} g_0^{\text{II}}(\rho) + 2 \sum_1^\infty g_m^{\text{II}}(\rho) \cos m\phi & a_1 \leq \rho \leq a_2 \\ g_0^{\text{III}}(\rho) + 2 \sum_1^\infty g_m^{\text{III}}(\rho) \cos m\phi & a_2 \leq \rho \leq a_3 \end{cases} \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned}g_0^{\text{II}}(\rho) &= a_2 \frac{2(1-N)}{N} q_N^{\text{II}}(\rho) F\left(\frac{N-1}{N}, \frac{N-1}{N}, 1, \frac{\rho^2}{a_2^2}\right) \\ g_0^{\text{III}}(\rho) &= \rho \frac{2(1-N)}{N} q_N^{\text{III}}(\rho) F\left(\frac{N-1}{N}, \frac{N-1}{N}, 1, \frac{a_2^2}{\rho^2}\right)\end{aligned}\quad (14)$$

$$g_m^{\parallel, \parallel}(\rho) = (-1)^m \frac{\Gamma(m + \frac{N-1}{N})}{m! \Gamma(\frac{N-1}{N})} a_2^{\frac{2(1-N)}{N}} q_N^{\parallel, \parallel}(\rho) \left(\frac{\rho}{a_2}\right)^m F\left(\frac{N-1}{N}, m + \frac{N-1}{N}, m+1, \frac{\rho^2}{a_2^2}\right)$$

$$g_m^{\parallel, \parallel}(\rho) = (-1)^m \frac{\Gamma(m + \frac{N-1}{N})}{m! \Gamma(\frac{N-1}{N})} \rho^{\frac{2(1-N)}{N}} q_N^{\parallel, \parallel}(\rho) \left(\frac{a_2}{\rho}\right)^m F\left(\frac{N-1}{N}, m + \frac{N-1}{N}, m+1, \frac{a_2^2}{\rho^2}\right)$$

である。ここで $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ はガウスの超幾何級数, $\Gamma(x)$ はガンマ関数, また $q_N^{\parallel, \parallel}(\rho)$ は(10)で定義されている。

常数変化法で(8)の特解を求める。

$$\xi^{\parallel, \parallel} = \alpha_0^{\parallel, \parallel}(\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} \{ \alpha_m^{\parallel, \parallel}(\rho) \rho^m + \beta_m^{\parallel, \parallel}(\rho) \rho^{-m} \} \cos m\phi \quad (15)$$

ここで

$$\alpha_0^{\parallel, \parallel}(\rho) = \int_{a_2}^{\rho} d\rho \frac{\gamma_0^{\parallel, \parallel}(\rho)}{\rho}, \quad \gamma_0^{\parallel, \parallel}(\rho) = \int_{a_2}^{\rho} d\rho \rho g_0^{\parallel, \parallel}(\rho)$$

$$\alpha_m^{\parallel, \parallel}(\rho) = \frac{1}{m} \int_{a_2}^{\rho} d\rho \rho^{1-m} g_m^{\parallel, \parallel}(\rho) \quad (16)$$

$$\beta_m^{\parallel, \parallel}(\rho) = -\frac{1}{m} \int_{a_2}^{\rho} d\rho \rho^{1+m} g_m^{\parallel, \parallel}(\rho)$$

である。

こうして(9)の解(11)が求められた。境界条件(12)から係数 $A_0^{\parallel, \parallel}$ などが決められる。結果は

$$A_0^{\parallel, \parallel} = A_0^{\parallel, \parallel} = -\gamma_0^{\parallel, \parallel}(a_1)$$

$$A_0^{\parallel, \parallel} = -\gamma_0^{\parallel, \parallel}(a_1) + \gamma_0^{\parallel, \parallel}(a_3)$$

$$A_m^{\parallel, \parallel} = \alpha_m^{\parallel, \parallel}(a_1) - \alpha_m^{\parallel, \parallel}(a_3)$$

$$A_m^{\parallel, \parallel} = A_m^{\parallel, \parallel} = -\alpha_m^{\parallel, \parallel}(a_3) \quad (17)$$

$$B_m^{\text{II}} = B_m^{\text{III}} = -\beta_m^{\text{II}}(a_1)$$

$$B_m^{\text{IV}} = -\beta_m^{\text{II}}(a_1) + \beta_m^{\text{III}}(a_3)$$

$$C_m^{\text{II}} = C_m^{\text{III}} = \gamma_0^{\text{II}}(a_1) \log a_1 - \alpha_0^{\text{II}}(a_1)$$

$$C_m^{\text{IV}} = \gamma_0^{\text{II}}(a_1) \log a_1 - \gamma_0^{\text{III}}(a_3) \log a_3 - \alpha_0^{\text{II}}(a_1) + \alpha_0^{\text{III}}(a_3)$$

となる。

以上をまとめる。プラズマの存在による流れ関数の摂動 ψ_1 は、プラズマ圧力について1次の項までとると各領域でつぎで与えられる。簡単のため常数項を落しておく。

$$\psi_1^{\text{I}} = \sum_1^{\infty} \{ \alpha_m^{\text{II}}(a_1) - \alpha_m^{\text{III}}(a_3) \} \rho^m \cos m\phi$$

$$\psi_1^{\text{II}} = -\gamma_0^{\text{II}}(a_1) \log \rho + \alpha_0^{\text{II}}(\rho)$$

$$+ \sum_1^{\infty} \{ \{ \alpha_m^{\text{II}}(\rho) - \alpha_m^{\text{III}}(a_3) \} \rho^m + \{ \beta_m^{\text{II}}(\rho) - \beta_m^{\text{III}}(a_1) \} \rho^{-m} \} \cos m\phi$$

$$\psi_1^{\text{III}} = -\gamma_0^{\text{II}}(a_1) \log \rho + \alpha_0^{\text{III}}(\rho)$$

$$+ \sum_1^{\infty} \{ \{ \alpha_m^{\text{III}}(\rho) - \alpha_m^{\text{II}}(a_3) \} \rho^m + \{ \beta_m^{\text{III}}(\rho) - \beta_m^{\text{II}}(a_1) \} \rho^{-m} \} \cos m\phi$$

$$\psi_1^{\text{IV}} = \{ -\gamma_0^{\text{II}}(a_1) + \gamma_0^{\text{III}}(a_3) \} \log \rho + \sum_1^{\infty} \{ \beta_m^{\text{III}}(a_3) - \beta_m^{\text{II}}(a_1) \} \rho^{-m} \cos m\phi$$

ここで α, β, γ などは(10)で定義されている。

プラズマの存在による磁力線の変化は

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 = \text{一定} \quad (19)$$

として求められる。才0次の磁力線を $\rho = \rho_0$ とすると、プラズマの存在により磁力線は

$$\rho = \rho_b + \frac{2\pi}{\mu_0 I} \rho_b \psi_1(\rho_b, \theta) \quad (20)$$

となる。

文 献

- 1) 田中, 田村: 核融合研究 21 202 (1968)
また G.D. Hobbs and J.B. Taylor CLM-R95 (1968)
を参照。
- 2) 森口他 “数学公式 II” p251 (岩波)

Synopsis

A formulation is described to obtain a class of MHD plasma equilibria in linear filamentary multipole magnetic fields. Variations of magnetic lines of force due to the presence of plasma are calculated by perturbation technique up to the linear terms in plasma pressure. The distributions of plasma pressure are assumed to have a peak on the separatrix of the vacuum magnetic field.

Figure captions

Fig.1. Geometry of the system. Linear current filaments are located symmetrically along a cylinder of radius a . A wedge-shaped region (Fig.(a)) is transformed to the whole (ρ, ϕ) plane by eq.(5). Hatched regions (I , II) are occupied by the plasma whose pressure has a peak on the separatrix of the vacuum magnetic field.

Fig.2. Typical plasma pressure distributions. Plasma Pressure $P(\psi_0)$ (ψ_0 : flux function of the vacuum field) is proportional to $(\psi_{0s} - \psi_0)$ (solidline) or to $(\psi_{0s} - \psi_s)^2$ (dotted line), where ψ_{0s} denotes the separatrix of the vacuum magnetic field.