小さなアスペクト比をもったトロイダルプラズマの平衡と安定性*

押 山 宏**

京大工学部 超高温プラズマ研究施設***

(44年12月8日受理)

Abstract

Toroidal equilibrium and its stability of MHD plasma with a small aspect ratio are examined analytically under the assumption that the distribution of plasma pressure is linear or quadratic in stream function.

The existence of stable equilibrium configuration is shown by using the energy principle.

* An Equilibrium and A Stability of Toroidal Plasma with a Small Aspect Ratio.

** Hiroshi Oshiyama

*** Plasma Physics Laboratory, Faculty of Engineering, Kyoto University.

§1 はじめに

トコマックの有意義な実験成果さらには、オクタポール、スフェレータープラズマの発展として、中間ベーター或いは高ベーターのトロイダルプラズマの平衡の問題がShafranov〔2〕, Ohkawa〔2〕, Yoshikawa〔3〕等によって取扱われている。

大きなアスペクト比と低ベーター値をもつトロイダルプラズマの平衡と安定性に関しては多くの論文〔4〕があるが、アスペクト比が1に近く、高いベーターの問題についてはあまりないようである。

この論文では、アスペクト比が1に近くかつ高ベータープラズマに関して平衡が存在するかいなか、その平衡が安定かどうかについて、特にプラズマ圧力が流れ函数の一乗及び二乗に比例すると仮定して吟味した。

この種の問題は Hard-Core-theta pinch, Tokamak プラズマの平衡と安定性と深い関係を持っている。

§2 電磁流体力学的平衡

プラズマの平衡の式をMKS単位系でかくと

$$\begin{aligned}\vec{j} \times \vec{B} &= -\vec{p} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

である。この解を求めるために $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ を満たす流れ函数 ψ を導入すると、円柱座標 (r, φ, z) で

$$rB_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad rB_z = \frac{\partial \psi}{\partial r}\tag{2}$$

とかける。

(2) 式を(1) 式に代入すると

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} (rB_\varphi)^2 - r^2 \mu_0 \frac{dp}{d\varphi}\tag{3}$$

小さなアスペクト比をもったトロイダルプラズマの平衡と安定性

ここに p, rB_ϕ は ϕ のみの函数で以下においては (A) $rB_\phi = \text{const}$, $p = a\phi$ (B) $rB_\phi = \text{const}$, $p = \frac{1}{2}a\phi^2$ の二つの場合について (3) 式を解く。

(A) $rB_\phi = \text{const}$, $p = a\phi$ の場合

この時 (3) 式は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \mu_0 a r^2 = 0 \quad (4)$$

この解の 1 つは流体において、Hill の spherical vortex ⁽⁵⁾ として知られているものがあるが、さらに一般的な場合について Shafranov, Ohkawa 等が与えている。ここでは解として次式を使う。

$$\phi = \phi_0 \frac{r^2}{R_0^4} (2R_0^2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2) \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_r = \phi_0 \frac{r}{R_0^4} 8\alpha^2 z \\ B_\phi = \frac{b}{r} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_z = \frac{\phi_0}{R_0^4} (4R_0^2 - 4r^2 - 8\alpha^2 z^2) \\ j_\phi = ar \end{array} \right. \quad (7)$$

j_ϕ は表面で最大をとる分布で一種のプラズマの表皮効果を示していると考えられる。

$\alpha^2 = 2.0$ の時 ϕ は第一図に示した。

回転変換の角 ι は 磁気軸 ($r=R_0, z=0$) において

$$\tan \iota = \frac{1}{\alpha} \tan \left\{ 2\pi \frac{8\alpha\phi_0}{R_0^2 B_0} \right\} \quad (8)$$

である。 B_0 は $r=R_0$ における B_ϕ である。

この平衡解の安定性に関しては後述する。

Fig. 1 Equi-surface of stream function ψ which is given by Eq. 5. $j_{\varphi} = ar$ $p = a\psi$

(B) $rB_{\varphi} = \text{const}$, $p = \frac{1}{2}a\psi^2$ の場合

この時 (3) 式は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + r^2 \mu_0 a \psi = 0 \quad (9)$$

となる。この式は線型である。(A)の場合より実験に近いプラズマ配位が得られるが解法は容易でない。

今 $\psi = R(r)$, $Z(z)$ と変数分離形にすると

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + m^2 Z = 0 \quad (10)$$

小さなアスペクト比をもったトロイダルプラズマの平衡と安定性

$$\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + a\mu_0 r^2 R - m^2 R = 0 \quad (11)$$

(10) 式の解は直ちに求まるが (11) の解は $a\mu_0 r^2 R$ の項のために単なるベッセル関数で示されないが $\frac{a\mu_0}{m^4} \ll 1$ として展開の形式で解くと近似式として

$$\phi = \frac{1}{2} A_1 r^2 + A_2 \sin \sqrt{a\mu_0} \frac{1}{2} r^2 + A_3 r I_1(mr) \cos mZ \quad (12)$$

$$\begin{cases} B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = A_1 + A_2 \sqrt{a\mu_0} \cos \sqrt{a\mu_0} \frac{1}{2} r^2 + A_3 r I_1(mr) \cos mZ \\ B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial Z} = A_3 m I_1(mr) \sin mZ \\ B_\phi = \frac{d}{r} \end{cases} \quad (13)$$

$$j_\phi = r \frac{dp}{d\phi} = ar\phi \quad (14)$$

を得る。

定数 A_1, A_2, A_3, m を選ぶことによって種々の流れ関数が出るが, j_ϕ がプラズマ中で山をもつ作り易い配位で, かつアスペクト比が 1 に近いものとして

$$\frac{\phi}{A_2} = -0.552 \left(\frac{r}{d}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{r^2}{d^2}\right) + 0.151 \frac{r}{a} I_1\left(1.4 \frac{r}{d}\right) \cos\left(1.4 \frac{Z}{d}\right) \quad (15)$$

がある。これは $Z=0, r=d$ で ϕ 最大となる。

この時の様子を第 2 図に示した。

他の形として第 3 図に示した。流れ関数は次式である。

$$\frac{\phi}{A_2} = -1.12 \frac{r^2}{d^2} + \sin\left(1.27 \frac{r^2}{d^2}\right) + 0.102 \frac{r}{d} I_1\left(3.0 \frac{r}{d}\right) \cos\left(3 \frac{Z}{d}\right) \quad (16)$$

(15) 及び (16) 式は偏微分方程式 (9) の展開による近似式で厳密解でないが, 実験と結びつけたプラズマ平衡の存在を知る上での目安となる。

厳密解は数値積分法で検討中である。

Fig. 2 Equi-surface of stream function ψ which is given by Eq. 15.

小さなアスペクト比をもったトロイダルプラズマの平衡と安定性

Fig. 3 Equipotential surface of stream function ϕ which is given by Eq. 16

$$j_{\phi} = ar \quad p = \frac{1}{2} a \phi^2$$

§3 安定性

前節で与えられた平衡配位がどのような姿態の変位に対して不安定かをエネルギー原理の方法で検討する。プラズマ圧力がスカラーの場合平衡配位からの変位 $\vec{\xi}$ を受けた時の系のプラズマ中のエネルギーの変化分 δW は

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{\text{fluid}} dV \left[\frac{G^2}{\mu_0} - \vec{j} \cdot \vec{G} \times \vec{\xi} + r p (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi})^2 + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}) (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} p) \right] \quad (17)$$

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \times (\vec{\xi} \times \vec{B})$$

である。 $\vec{\xi}$ に対して $\delta W < 0$ ならば系は不安定であることが知られている。

今 $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$ なる非圧縮性流体で

$$\vec{\xi} = (\xi_r, 0, \xi_z) \quad (18)$$

の場合に δW を計算する。平衡の式は(5)～(7), 及び(12)～(14)を用いる。

$$\vec{G} = \vec{e}_r \left\{ \frac{b}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \xi_r - \frac{\partial}{\partial z} (B_r \xi_z - \xi_r B_z) \right\} + \frac{2b}{r^2} \xi_r \vec{e}_\varphi \quad (19)$$

$$+ \vec{e}_z \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r \xi_z - r B_z B_r) + \frac{b}{r} \frac{\partial \xi_z}{\partial \varphi} \right\}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{G} \times \vec{\xi} = \frac{j_\varphi}{r} \left\{ \xi_r \frac{\partial}{\partial r} (r B_r \xi_z - r \xi_r B_z) + \xi_z \frac{\partial}{\partial z} (r B_r B_z - r \xi_r B_z) \right\}$$

(20)

3-1) 平衡状態が $r B_\varphi = b = \text{const}$ $p = a\varphi$ の時

δW を最小にする $\vec{\xi}$ を考えて

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \int dV \left[\phi_0^2 (4\alpha^2 z^2 - r^2) \xi_z^2 \frac{8^2 \alpha^2}{R_0^8} \right. \\ \left. + r^2 B_r^2 \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right)^2 + 2 \xi_z \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \cdot \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \cdot \frac{8 \alpha^2 z \phi_0}{R_0^4} \right] \quad (21)$$

小さなアスペクト比をもったトロイダルプラズマの平衡と安定性

但し $\xi_r = 0$, 次に $\xi_z = 0$ に対して

$$\delta W = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \int dV \left[\left(\frac{2b}{r^2} \xi_r \right)^2 + \frac{\xi_r^2}{R^8} 8^2 \phi_0^2 \alpha^2 (4\alpha^2 z^2 - r^2) + B_z^2 \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial z} \right)^2 + 2 \xi_r B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \right] \quad (22)$$

この2つの式から

$$4\alpha^2 z^2 - r^2 > 0$$

ならば, プラズマの全ての領域において安定となる。又 α^2 が大なるほど安定領域は広がる。即ち第4図でAよりBの配位がより広い領域で安定である。

ξ_r の変位に対してはトロイダル磁界 $B_\phi = \frac{b}{r}$ がそれを抑制する働きがあることがわかり必要な大きさはほぼ

Fig. 4 Two types of stream function.

$$b = 4 \frac{r^3}{R_0^4} \phi_0 \alpha$$

$$\frac{|B_\phi|}{|B_z|} \approx \alpha$$

である。又 j_ϕ の上限に関しては等価的な Kruskal Limit が適用出来る。

3-2) 平衡状態が $rB_\phi = b = \text{const}$ $P = \frac{1}{2} a \phi^2$ の場合

最も危険な変位 $\xi_z \neq 0$ に対してエネルギー変化分は

$$\begin{aligned} \delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int dV \left[\xi_z^2 \left\{ \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) \right)^2 - j_\phi \frac{\partial B_r}{\partial z} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \left\{ 2 r B_r B_z \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + (r B_r)^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right\} \right] \quad (23) \\ = \frac{1}{2\mu_0} \int dV (\xi_z^2 T + F) \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} T &= A_3^2 m^4 I_1^2 (m r) \cos^2 mZ + A_3^2 m^2 I_0^2 \sin^2 mZ - a r \mu_0 \phi \\ F &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \left\{ 2 r B_r \xi_z \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + (r B_r)^2 \frac{\partial \xi_z}{\partial r} \right\} \end{aligned}$$

(23) 式は $\phi \geq 0$ におけるプラズマ領域に対して被積分項は正であることを示している。トロイダル磁界 B_ϕ は ξ_z の変位に対して安定化効果はもたないが、 ξ_r の変位に対しては (3-1) の場合と同様安定化に寄与する。

以上から $p = \frac{1}{2} a \phi^2$, $rB_\phi = \text{const}$ のプラズマ平衡は MHD 的に安定であることがわかった。

ところでこの様なプラズマの作り方の一方法としては、ヘリオトロン C プラズマにおいて見られる 2 つのピークをもつプラズマ圧力分布^[7] をあらかじめ作っておき、その後 θ ピンチを行ない同時に $r=0$ に流れる j_z 電流によって B_ϕ を作ればよい。

この実験に関して現在装置を建設中である。

§4 結 び

アスペクト比の小さいトロイダルプラズマの平衡があることを吟味し次にその安定性についてエネルギー原理に従って検討した結果、プラズマ圧力が流れ関数 ψ の二乗で現われる平衡は電磁電流体力学的に安定であることがわかった。又深い磁界の井戸と大きな回転変換角をもっている。

文 献

1. Shafranov: Reviews of plasma physics Vol. 2, p116
2. T. Ohkawa: Kakuyugo-Kenkyu 20 No. 6 557(1968)
" 22 NO.2 99(1968)
3. S.Yoshikawa: Physics. Fluids Vol 11, No.4 p.83 (1968)
4. E.W.Laing, S.J. Roberts and R.T.P. Whipple: J. Nucl. Energy. part C Vol. 1 p49 (1959).
A.A. Ware and F.A.Hass: Physics. Fluids Vol 9 956 (1966)
M.Tanak: Kakuyugo Kenkyu 23 No.3 173 (1969)
H.Oshiyama: Kakuyugo Kenkyu 24 No.2 (1969)
5. W.B. Thompson, An Introduction to Plasma physics (Pergamon Press, London, 1962) p.55
6. I.B.Bernstein, E.A.Frieman, M.D. Kruskal, and R.H.Kulsrud: Proceedings Roy. Soc. (London) A244 17 (1958)
7. H.Oshiyama: Kakuyugo Kenkyu 24 No. 2 (1969)