電 磁 静 的 平 衡 に つ い て *

宮 島 重 喜 **

(名大・工学部・電子工学科)

(44 年 12 月 12 日 受 理)

Abstract

As it was pointed out by A.Simon, a set of equations governing the well-known magneto-static equilibrium do not yield an unique solution. The problem may be solved by making use of the following London equation,

$$\mathbf{j} = e^2 \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) n \mathbf{A},$$

where $\mathbf{j}$ is the current density, m_e the mass of electron, m_i the mass of ion, n the number density of electron and $\mathbf{A}$ the vector potential.

* On the Magneto-static Equilibrium

** Shigeki MIYAJIMA
(Dept. of Electronics, Faculty of Engineering,
Nagoya University, Nagoya, Japan)

1 電磁静的平衡とは通例つぎの式で与えられる磁気プラズマの状態を云う、⁽¹⁾⁽²⁾すなわち

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{p} \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1c)$$

ここで $\mathbf{j}$ は電磁密度, $\mathbf{B}$; 磁場の強さ, $\mathbf{p}$; プラズマの圧力である。式 (1a) は力の平衡を与え, (1b) と (1c) 式とは電磁場の式である。これらの式が成立するためには, (i) プラズマは巨視的には動かない。(ii) 電気伝導度は無限大である。など五つの仮定が成立しなければならない。⁽¹⁾ 方程式群 (1) について過去において, 多くの議論がなされた。⁽¹⁾⁻⁽⁹⁾

2 ところで, 上述の方程式群は, A. Simon によって指摘されているように, 一意的解を与えない。⁽¹⁰⁾ すなわち, 磁場や密度の空間的分布は一意に定まらないのである。Simon は, 一例として, 無限に長い直線状プラズマがあって縦方向に電流が流れているピンチ放電柱の場合を引用している。

3 平衡状態での諸物理量の空間分布を与えている論文がないわけではない。木原氏によると, 縦方向に電流が流れているトロイダルな平衡状態,⁽⁵⁾ あるいは, 林・押山氏による, ヘリオトロン磁界による $low-\beta$ のプラズマの平衡状態⁽⁹⁾ に関する二つの論文がその例である。これらの論文では, ある未知数 n が理論的に定まらないという難点がある。

4 上述の項目 2, 3 より云えることは, 少くとも, 方程式群 (1) は理論的に閉じていない。または理論的に不完全なものであるということである。この理論的不完全さは何に原因があるのであろうか。方程式群 (1) より気がつくのは, 圧力傾斜と平衡している $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ の $\mathbf{j}$ が永久電流であることである。

ではこの永久電流はどういう機構で流れ, どのような式に支配されているのであろうか。

5 永久電流という言葉から直ちに思いだされるのは低温金属の超伝導状態である。⁽¹¹⁾ ある種の金属は温度が下ると固有抵抗は零となり, 永久電流が流れることができる。一方プラズマの場合には高温になるほど固有抵抗は零に近づくが, 不連続的に零となることはない。したがって平衡状態のプラズマと低温金属は同一視できない。前者では電子はボルツマン粒子であり, 後者ではフェルミ粒子である。にもかかわらず, 両者は現象的に永久電流が流れるという点で同一である。

6 ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が存在するとき, n 個の電子よりなる系の電流密度は, 量子力学によって⁽¹²⁾

$$\mathbf{j}_e = - \frac{e}{m_e} \pi - \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{A}$$

電磁静的平衡について

で与えられる。ここで, π ; 運動量密度, m_e ; 電子の質量, n_e ; 数密度 である。この式の右辺第1項は量子論的なものであるが, 第2項は問題の記述が量子論的か古典的かに無関係と思われる。このことはつぎの理由による。

7 n 個の電子が電場 E , 磁場 B の作用下で完全流体の式に従って運動しているものとしよう。すると運動の式は

$$m_e \left(\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e \right) = eE - e \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} - \frac{1}{n_e} \nabla p_e$$

と書ける。この式の rot をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_e \nabla \times \mathbf{V}_e - eB) = \nabla \times \left[\mathbf{V}_e \times (m_e \nabla \times \mathbf{V}_e - eB) \right]$$

が与えられる。これから

$$m_e \nabla \times \mathbf{V}_e - eB = \text{const} \quad (2)$$

が導かれる。この式の const. は自然と世界では零に調節されているものと推察され, またその場合に限って, London の式と呼ばれている。London の式より, スカラー関数の寄与を除いて

$$\mathbf{V}_e = e\mathbf{A}/m_e$$

すなわち

$$\mathbf{j}_e = -e^2 n_e \mathbf{A}/m_e$$

が与えられる。

なお 式(2)は荷電粒子の渦が磁場と無関係ではないことを示している。

8 プラズマでは電子とイオンは同数ずつ存在するから, 電流密度としては

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n A}{m} \quad (1d)$$

ここで $m = 1/(m_e^{-1} + m_i^{-1})$ である。式(1d)は抵抗零のとき, あるいは衝突が稀にしかおこらないときのオームの式と考えられ, プラズマが巨視的に運動していても使用できる。

9 式(1a)~(1c)に新しく(1d)式が追加されたので, 電磁静的平衡状態は一意的に定まるこ

となる。この場合(1a)式の圧力 P はイオンの分圧 P_i と電子の分圧 P_e との和ではないことを注意しておく必要がある。実際 P は

$$P = P_i + P_e + \frac{m_e}{e^2 n_e} j j$$

と書ける。(13) イオン温度 T_i 、電子温度 T_e が空間的に一様とすると、(1a)式は

$$j \times B = k(T_i + T_e) \nabla n + \nabla \frac{m_e}{e^2 n} j j$$

となる。この式で右辺第2項は電流が曲率をもつことから生ずる力である。

10 電磁静的平衡の解の一例として、つぎのような一次元問題を考えてみよう。 B は z 方向のみ、 A は y 方向のみ、そして空間的に可変な物理量は x のみの関数になっているものとする。この場合(1a)式、(1d)式は

$$j \frac{dA}{dx} = k(T_e + T_i) \frac{dn}{dx} \quad (3)$$

$$j = - \frac{1}{\mu_0} \frac{d^2 A}{dx^2} = - \frac{e^2 n A}{m} \quad (4)$$

と書かれる。境界条件として、 $n = n_0$ で $A = 0$, $B = B_0$ とすると、(3)(4)両式より

$$n = n_0 e^{-a^2} \quad (5)$$

$$\left(\frac{da}{d\xi} \right)^2 = \frac{1}{\beta} + (1 - e^{-a^2}) \quad (6)$$

と積分される。ここで

$$a^2 = e^2 A^2 / 2 m k (T_e + T_i)$$

$$\beta = 2 \mu_0 n_0 k (T_e + T_i) / B_0^2$$

$$\xi = x/x_0, \quad x_0^2 = m / \mu_0 n_0 e^2$$

(6) 式を積分した結果を第1図に示す。この図と(5)式より、 n/n_0 が $1/e$ になる x は $\beta^{1/2} x_0$ の桁で与えられることが示される。また磁場 B の尺度である $da/d\xi$ は $(1/\beta)^{1/2}$ より、

電磁静的平衡について

第1図 aとξとの関係

$(1+1/\beta)^{1/2}$ までの値しかとらないことが(6)式からわかる。

11 最後に注意しておく必要があるのは、上述の議論はプラズマの電気的中性を仮定している、ということである。もし我々が電荷分離を計算にとりいれようと思うならば、上のようなプラズマの一流体的取り扱いをするのが良いものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) L.Spitzer Jr.: Phys. of Fluids, 1, (1958) 253.
- 2) M.D.Kruskal & R.M.Kulsrud: Phys. of Fluids, 1,(1958) 265.
- 3) R.Kippenhahn: Z.Naturforsch., 13a, (1958) 260.
- 4) 渡 部: 核融合研究, 3,(1959)16
- 5) 木 原: 核融合研究, 2,(1959)431
- 6) 岩 田: 核融合研究, 1,(1958)456
- 7) 浜 田: 核融合研究, 1,(1958)542; 3,(1959)146.
- 8) 加 藤: 核融合研究, 3,(1959)127; 3,(1959)473
- 9) 林・押山: 核融合研究, 16,(1966)81
- 10) A.Simon: "An Introduction of Thermonuclear Research,"
London, Pergaman Press, 1959, pp. 136.
- 11) 中 嶋: “超伝導” 東京, 棋書店 1963, PP.6
- 12) 中 嶋: 文献 (11) PP. 33
- 13) 宮 島: 核融合研究, 7,(1961)427