直線ヘリオトロンP磁場の諸パラメーター

宇 尾 光 治

(京都大学工学部)

(44年12月23日受理)

Some Field Parameters of the Linear Heliotron P Field

By Koji Uo*

The Heliotron P Field can be produced by superposing the uniform axial field on the field of the current carrying ring conductor series placed along the axis with regular intervals, and it is interesting magnetic field for plasma confinement. It is essentially the same field as produced by putting the negative coil of the Heliotron B field inside the vacuum vessel, and is a sort of a chain of the Spherator field. Changing the values of the ratio of the ring field intensity to the uniform field and the ratio of the ring radius to the interval gives various kinds of interesting fields. In this paper, we deduced the exact expressions of the magnetic inductions and the lines of force of this field, and by expanding the complete elliptic integrals we obtained the field parameters which determine these various field configurations.

* Plasma Physics Laboratory, Faculty of Engineering,
Kyoto University

§1 緒言

内部導体系磁場として、電流を流す環状導体を放電管内部に沈め、外部から一様磁場を重ねたヘリオトロンP磁場は、(1),(2),(3),(4) プラズマ閉じ込め用磁場として興味ある磁場である。

この磁場は、ヘリオトロンB型磁場の負コイルをプラズマ中に沈めたものと定性的に等価があるが、環状電流のつくる磁場と外部磁場の比、 λ 、環状導体の半径とその排列間隔の比、 τ 、の2つのパラメーターの種々の組合わせに応じて、きわめて変化に富む磁場配位になる。それらの磁場のうち特徴的な磁場をいくつか選び、その磁場配位を指定するパラメーターを決定した。

§2 無限長ヘリオトロンP磁場

第 1 図

上図の環状電流群のつくる磁場のベクトル・ポテンシャルは、一様磁場

$$\vec{B} = e_z B_0, \quad B_0 > 0 \quad (1)$$

のベクトル・ポテンシャルとあわせて次式で与えられる。

$$\vec{A} = e_\theta A_\theta = e_\theta \frac{a}{2} B_0 \left[\beta + \frac{4\lambda}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_\nu} \left\{ \left(1 - \frac{k_\nu^2}{2} \right) K_\nu - E_\nu \right\} \right] \quad (2)$$

$$K_\nu = K(k_\nu), \quad E_\nu = E(k_\nu)$$

$$k_\nu^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2 + (\alpha - \nu\tau)^2} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \frac{z}{a}, \quad \beta = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{b}{a}, \quad \lambda = \frac{B_1}{B_0}, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a} \end{aligned} \right\}$$

ここにK, Eは完全楕円積分である。これより B_r, B_z は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} B_r &= -B_0 \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{\beta^3}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (\alpha - \nu\tau) k_{\nu} \\ &\quad \times \left\{ (K_{\nu} - E_{\nu}) - \frac{k_{\nu}^2}{2(1-k_{\nu}^2)} E_{\nu} \right\} \\ B_z &= B_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{\beta}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} k_{\nu} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ (K_{\nu} - E_{\nu}) + \frac{1-\beta}{2\beta} \frac{k_{\nu}^2}{1-k_{\nu}^2} E_{\nu} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

磁力線の式は $rA_{\theta} = \text{const}$ 即ち

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = \beta^2 + \frac{4\lambda}{\pi} \sqrt{\beta} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu} \frac{1}{k_{\nu}} \left\{ \left(1 - \frac{k_{\nu}^2}{2}\right) K_{\nu} - E_{\nu} \right\} \quad (5)$$

として

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = \text{const} \quad (6)$$

で与えられる。(4)式より B_r 及び $\frac{d\beta}{d\alpha}$ は $\alpha = n\tau$ 及び $\alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$ において0になる事が証明できる。

次に λ の種々の値に対し、磁場の形がどのように変化するかを見よう。

〔1〕 $\lambda \rightarrow -\infty$ の場合,
即ち $B_1 < 0$ で $|B_1| \gg B_0$
の場合である。このとき
磁場は第1, 2図で示さ
れるようになる。

第2図

(2) $\lambda < \lambda_1 < 0$

第3図

磁場は第3図のようになる。この場合

$$\begin{cases} \alpha = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \tau, & \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \beta = \beta_0 \end{cases} \quad (7)$$

において $B=0$ となる零円列 (null circle series) を生ずる。このときの λ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} = & -\frac{1}{2\pi\sqrt{\beta_0}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} k_{\nu 1} \left\{ (k_{\nu 1} - E_{\nu 1}) \right. \\ & \left. + \frac{1-\beta_0}{2\beta_0} \frac{k_{\nu 1}^2}{1-k_{\nu 1}^2} E_{\nu 1} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる。ここに

$$K_{\nu 1} = K(k_{\nu 1}), \quad E_{\nu 1} = E(k_{\nu 1}) \quad (9)$$

$$k_{\nu 1}^2 = \frac{4\beta_0}{(1+\beta_0)^2 + \frac{\tau^2}{4}(1-2\nu)^2}$$

である。(7)式の零円列を通る磁力線、即ちセパトリクスは(5), (6)より

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = F\left(\frac{\tau}{2}, \beta_0, \lambda, \tau\right) = \text{const} \quad (10)$$

で与えられ、 $\alpha = 0$ に対する上式の2つの解 β_b, β_t がそれぞれセパトリクス上の β の最小、最大値を与える β_0, λ, τ の2つのみが独立である。

〔3〕 $\lambda = \lambda_1 < 0$

この場合、磁力線は第4図のようになる。即ち、第3図の場合において $\beta_0 = 0$ となった場合である。〔2〕の場合の零円列は、 α 軸上の零点列に縮退している。このとき(9)式の $k_{\nu 1}$ は0になるから、 $k_{\nu 1}$ が小さい場合の K, E の展開式を用いて(8)より

$$\frac{1}{\lambda_1} = \ell \lim_{\beta_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} = - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{\tau^2}{4} (1-2\nu)^2 \right\}^{3/2}} \quad (10)$$

をうる。セパトリクスは

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = F\left(\frac{\tau}{2}, 0, \lambda, \tau\right) = 0 \quad (11)$$

で与えられ、 $\alpha = 0$ に対する解の1つは、 $\beta_b = 0$ で他の1つは β_t を与える。

第 4 図

[4] $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0 < 0$

この場合は、第5図のように

$$\alpha = \nu\tau \pm \alpha_0, \beta_0 = 0, |\alpha_0| < \frac{\tau}{2} \quad (12)$$

にて $B_r = B_z = 0$ である。即ち第4図の α 軸上の $B = 0$ の零点列が2つに分裂する。このときの λ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\lambda} = - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{1 + (\alpha_0 - \nu\tau)^2\}^{3/2}} \quad (12)$$

セパトリクスは次のようになる。

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = 0 \quad (13)$$

[5] $\lambda = \lambda_0 < 0$

これは第6図に示すように、第4図の場合において、 $\alpha_0 = 0$ となった場合である。[4]で2つ分裂した α 軸上の $B = 0$ の零点列は再び1つに合体する。 λ_0 及びセパトリクスは次のようになる。

$$\frac{1}{\lambda_0} = - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + \nu^2 \tau^2)^{3/2}} \quad (14)$$

$$F(\alpha, \beta, \lambda_0, \tau) = 0 \quad (15)$$

直線ヘリオトロソP磁場の諸パラメーター

第 6 図

[6] $\lambda_0 < \lambda < 0$

第 7 図

第 7 図に示すような、ふつうのヘリオトロソP磁場である。[5]の α 軸上の $B=0$ の零点列は、今度は縮退がほどけて、

$$\alpha = \nu\tau, \quad \beta = \beta_0 \quad (16)$$

の零円列となる。この円の上で $B=0$ である。このときの λ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{\lambda} = - \frac{1}{2\pi\sqrt{\beta_0}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} k_{\nu 0} \left\{ (K_{\nu 0} - E_{\nu 0}) + \frac{1-\beta_0}{2\beta_0} \frac{k_{\nu 0}^2}{1-k_{\nu 0}^2} E_{\nu 0} \right\} \quad (17)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} K_{\nu 0} &= K(k_{\nu 0}), \quad E_{\nu 0} = E(k_{\nu 0}) \\ k_{\nu 0}^2 &= \frac{4\beta_0}{(1+\beta_0)^2 + \nu^2 \tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

又は

$$\frac{1}{\lambda} = - \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_{00}}{1+\beta_0} + \frac{E_0}{1-\beta_0} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_{\nu 0}}{\sqrt{\beta_0}} \left\{ (K_{\nu 0} - E_{\nu 0}) + \frac{1-\beta_0}{2\beta_0} \frac{k_{\nu 0}^2}{1-k_{\nu 0}^2} E_{\nu 0} \right\} \right] \quad (19)$$

$$K_{00} = K\left(\frac{2\sqrt{\beta_0}}{1+\beta_0}\right), \quad E_{00} = E\left(\frac{2\sqrt{\beta_0}}{1+\beta_0}\right) \quad (20)$$

(19) 式より, $\beta_0 \rightarrow 1$ のとき $\lambda \rightarrow -0$ なる事がわかる。セバトリクスは

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = F(0, \beta_0, \lambda, \tau) \quad (21)$$

であたえられる。

$$[7] \quad \lambda = 0$$

このときは, $B_1 = 0$ で, $B_z = B_0$ の一様磁場となる。

$$[8] \quad \lambda > 0$$

第 8 図のような磁場となり, $\beta_0 > 1$ で, 零円の半径は, 内部導体の半径より大きい。

$$[9] \quad \lambda \rightarrow \infty$$

$B_1 \gg B_0$ で, 磁場の形は, 第 2 図において, 環状導体電流及び磁場の方向を逆にしたものになる。

直線ヘリオトロンP磁場の諸パラメーター

第 8 図

§3 1 個の環状導体をもつ，ヘリオトロンP磁場（ドーソンリング磁場⁽⁴⁾）

第 9 図

第 9 図のように，均一磁場中に電流をもつ環状導体が 1 個のみおかれた場合は，前節の所論において $\tau \rightarrow \infty$ とおいた結果と等価である。即ち (2), (4), (5) 式における ν に関する和のうち， $\nu = 0$ の項のみとればよい。

(1) $\lambda \rightarrow -\infty$

第 10 図

第2図に相当する磁場として, 1
個のダイポール磁場となる。

(2) $\lambda < \lambda_{10} < 0$

第 11 図

第11図のようになる。これは第5
図の磁場に対応するものである。軸
上に2個の零点を生じ、その座標は
($\pm\alpha_0$, 0)で、この α_0 を与える
 λ の値は(12)式で、 $\tau \rightarrow \infty$ と
おいて

$$\lambda = -(1 + \alpha_0^2)^{3/2} \quad (22)$$

で与えられる。セパトリクス
の式は

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \infty) = 0 \quad (23)$$

(3) $\lambda = \lambda_{10} < 0$

第11図で、 $\alpha_0 = 0$ となった場合であり、第12図^{*}のようになる。 α 軸上の2個の零点は原点に
て合致して一点となる。 λ_{10} は

$$\lambda_{10} = -1 \quad (24)$$

で、セパトリクスの式は次のようになる。

$$F(\alpha, \beta, -1, \infty) = 0 \quad (25)$$

第 12 図

〔4〕 $-1 < \lambda < 0$

第 13 図

第12図 のようになる。 $(\alpha = 0, \beta = \beta_0)$ に零円をもち、この円上で $B = 0$ である。このときの λ は (19) 式にて $\tau \rightarrow \infty$ とおいて

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{00}}{1+\beta_0} + \frac{E_{00}}{1-\beta_0} \right) \quad (26)$$

となる。セパトリクスのは

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \infty) = F(0, \beta_0, \lambda, \infty) \quad (27)$$

〔5〕 $\lambda = 0$

この場合は均一磁場のみである。

〔6〕 $\lambda > 0$

第14図 のような磁場になり、零円の半径が環状内部導体の半径より大となる。 λ はやはり (26) 式で与えられる。

宇尾

本節を通じて磁力線の式は

第 14 図

$$F(\alpha, \beta, \lambda, \infty) = \beta^2 + \frac{4\lambda\sqrt{\beta}}{\pi} \frac{1}{k_0}$$

$$\left\{ \left(1 - \frac{k_0^2}{2} \right) K(k_0) - E(k_0) \right\} = \text{const} \quad (28)$$

$$k_0^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2 + \alpha^2} \quad (29)$$

で与えられる。

[7] $\lambda \rightarrow \infty$

第 10 図と同様で，磁力線の方法が反対となる。

§ 3 2 個の環状導体をもつヘリオトロソ P 磁場

第 15 図

第 15 図のように，電流をもつ環状導体が 2 個あるときは，第 1，第 2 節に述べた磁場とはかなり異った磁場となる。導体間隔を τ としたとき，一様磁場と重ね合わせたときのベクトルポテンシャル及び B_r, B_z は次のようである。

$$A_\theta = \frac{a}{2} B_0 \left[\beta + \frac{4\lambda}{\pi\sqrt{\beta}} \sum_{\nu=1}^2 \frac{1}{k_\nu} \left\{ \left(1 - \frac{k_\nu^2}{2} \right) K_\nu - E_\nu \right\} \right] \quad (30)$$

$$k_1^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2 + \left(\alpha - \frac{\tau}{2} \right)^2}, \quad k_2^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2 + \left(\alpha + \frac{\tau}{2} \right)^2} \quad (31)$$

$$B_r = -B_0 \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\beta^3}} \sum_{\nu=1}^2 \left\{ \alpha + (-1)^\nu \frac{\tau}{2} \right\} K_\nu \times \left\{ (K_\nu - E_\nu) - \frac{k_\nu^2}{2(1-k_\nu^2)} E_\nu \right\} \quad (32)$$

$$B_z = B_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\beta}} \sum_{\nu=1}^2 k_\nu \left\{ (K_\nu - E_\nu) + \frac{1-\beta}{2\beta} \frac{k_\nu^2}{1-k_\nu^2} E_\nu \right\} \right] \quad (33)$$

磁力線の式は

$$F_2(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = \text{const} \quad (34)$$

$$F_2(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = \beta^2 + \frac{4\lambda}{\pi} \sqrt{\beta} \sum_{\nu=1}^2 \frac{1}{k_\nu} \left\{ \left(1 - \frac{k_\nu^2}{2} \right) K_\nu - E_\nu \right\} \quad (35)$$

[1] $\lambda \rightarrow -\infty$

第 16 図

この場合は遠方からみれば第 10 図のようなダイポール磁場であるが，内部導体の近傍では $(\alpha = 0, \beta = \beta_0)$ に零円をもつ。

[2] $\lambda < \lambda_{20} < 0$

この場合，第 17 図のように， $(\alpha = 0, \beta = \beta_0)$ に零円をもつと同時に $(\alpha = \pm\alpha_0, \beta = 0)$ の

第 17 図

2 点に零点をもつ。これより図のように内外 2 つのセパトリクスを生ずる。内セパトリクスの β_0 を与える λ は、

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\pi\sqrt{\beta_0}} k_0 \left\{ (K_0 - E_0) + \frac{1-\beta_0}{2\beta_0} \frac{k_0^2}{1-k_0^2} E_0 \right\} \quad (36)$$

$$K_0 = K(k_0), \quad (E_0 = E(k_0))$$

$$k_0 = \frac{4\beta_0}{(1+\beta_0)^2 + \frac{\tau^2}{4}} \quad (37)$$

で与えられる。外セパトリクスの α_0 は、(10) 式を導いたようにして次式で与えられる。

$$\frac{1}{\lambda} = -\left\{ 1 + \left(\alpha_0 - \frac{\tau}{2} \right)^2 \right\}^{-3/2} - \left\{ 1 + \left(\alpha_0 + \frac{\tau}{2} \right)^2 \right\}^{-3/2} \quad (38)$$

即ち (36), (38) において、 λ と τ を与えれば α_0, β_0 が決定する。内セパトリクスの磁力線の式は、

$$F_2(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = F_2(0, \beta_0, \lambda, \tau) \quad (39)$$

また、外セパトリクスの式は

$$F_2(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = 0 \quad (40)$$

で与えられる。(36) 式において $|\lambda| \rightarrow \infty$ とすると、

$$\frac{\beta_0 - 1}{2\beta_0} = \frac{K_0 - E_0}{E_0} \frac{1 - k_0^2}{k_0^2} > 0 \quad (41)$$

を得る。即ち十分大きい λ に対して $\beta_0 > 1$ である。またこのときは(38)式より $\alpha_0 \rightarrow \infty$ となる。

(41)式を β_0 につき解けば、トロイダル・クワドラポール磁場の零円の半径(第15図の導体配位において)が、 τ の函数として求められる。

(36)式は零円の半径 β_0 を任意の大きさにするに必要な一様外部磁場の強さ B_0 を決定する。例えば、 $\tau = 2$ のとき、 $\beta_0 = 1$ にすることに必要な B_0 は $(B_1/B_0) = \lambda = -3.256$ で決定できる。

$$[3] \quad \lambda = \lambda_{20} < 0$$

この場合第18図に示すように、第17図における零円の半径が0となり、原点に縮退すると同時に、 α 軸上の $\pm\alpha_0$ にあった2個の零点も原点に一致して重なる。この場合は、 $B = 0$ の点が原点のみに生じているという特殊な場合である。⁽⁶⁾ このときの λ の値は(36)式において $\beta_0 \rightarrow 0$ として

$$\lambda_{20} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau^2}{4} \right)^{3/2} \quad (42)$$

となる。これは又、(38)式において $\alpha_0 \rightarrow 0$ としても同様である。一例として $\tau = 2$ のときは $\lambda_{20} = -\sqrt{2}$ である。セパトリクスのは

$$F_2(\alpha, \beta, \lambda_{20}, \tau) = 0 \quad (43)$$

第 19 図

このときは、第 19 図に示すように、 $(\alpha = \pm \alpha_0, \beta = \beta_0)$ に、2 個の零円を生じ、そこで $B = 0$ となる。 α_0, β_0 が与えられたとき、(33) 式より

$$B_z(\alpha_0, \beta_0, \lambda, \tau) = 0 \quad (44)$$

を解いて λ を決定できる。セパトリクスのは次のようになる。

$$F_2(\alpha, \beta, \lambda, \tau) = F_2(\alpha_0, \beta_0, \lambda, \tau) \quad (45)$$

[5] $\lambda = 0$

軸方向の一様磁場のみである

[6] $0 < \lambda < \lambda_{22}$

第 22 図のような磁場をうる。第 19 図の零円の半径が、内部導体の半径より大きくなる。 α_0, β_0, τ が与えられれば、同様に (44) 式により λ が決定される。 λ が大となるにつれて β_0 はきく、 α_0 は小さくなってゆき、 $\lambda = \lambda_{22}$ に致って $\alpha_0 = 0$ となる。但しつねに $\beta_0 > 1$ である。セパトリクスのはやはり (45) で与えられる。

[7] $\lambda = \lambda_{22} > 0$

第 21 図に示すように、第 20 図の 2 個の零円は $(\alpha = 0, \beta = \beta_2)$ において、互に重なって 1 つとなる。 λ_{22} は (36) 式中の β_0 を β_2 と書き直して得られる。(36) 式は

$$\lambda_{20} < \lambda < \lambda_{22} \quad (46)$$

⊗

⊗

第 20 図

⊗

⊗

第 21 図

の λ の値に対し β_0 の実根をもたない。更に λ を増加すると、零円は $\alpha_0 = 0$ を保ったまま β_0 は小さくなる。

(8) $\lambda_{22} < \lambda \rightarrow \infty$

第 21 図の零円は再び上下 2 個の零円に分れ、 λ が大なるにつれて、 $\beta_2 \rightarrow \beta_\infty$, $\beta_3 \rightarrow \infty$ とな

る。 β_∞ は(41)式の根である。

第 22 図

- 1) Kadomtsev, B.B.: *Plasmaphysics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions IV* (1957) 17.
- 2) Uo, K.: *Kakuyugo Kenkyu*, 1 (1958) 12, *J. Phys. Soc. Japan*, 16 (1961) 1380, *Kakuyugo Kenkyu*, 20 (1968) 193
- 3) Tuck, J.: *Nature*, Sept. 30 (1960) 863.
- 4) Uo, K.: R. Itatani, A. Mohri, H. Oshiyama, S. Ariga, T. Ueda: *Third International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, CN-24/B-4 (1968)
- 5) Wiley, D. and Johnson, J.: *MATT-Q-25* (1967) 208
- 6) 鈴木: *核融合研究*, 第22巻 別冊2 (1969) 56