完全反磁性ピンチプラズマ*

大鐘 豊, 萩野 勇, 山田寿郎, 宮島重喜**

(名古屋大学・工学部)

(47年10月9日受理)

Abstract

The pinched plasma being in a stationary state has been discussed in the past by various investigators on the basis of the Vlasov equation. But the stationary or undisturbed distribution functions given by them are somewhat scattered so that profiles of macroscopic quantities are also different. We shall here give a solution of a stationary pinched plasma apart from its stability using the London equation with the equations of magnethydrostatic equilibrium. The reason that we shall apply the London equation to the collisionless plasma is due to the fact that the equation gives the total energy minimum with respect to the magnetic field on the basis of variational principle.

§1 まえがき

さきに⁽¹⁾, いわゆる電磁静的平衡状態を与える三つの式が一意的解を与えないという A. Simon の問題について, 電気抵抗零の無衝突プラズマが低温金属の超電導状態と似ているという理由で,

* Perfectly Diamagnetic Pinched Plasma

** Yutaka Ogane, Isamu Hagino, Toshiro Yamada, Shigeki Miyajima
(Faculty of Engineering, Nagoya University)

一般化されたオームの法則の代りに, London の式で電流をきめると, 方程式群は一意的解を与えることを示した。

しかし, London の式を導くときに問題があった: すなわち, プラズマの二流体模型を基礎として, 時刻 $t = 0$ で

$$\rho \times m_s \mathbf{V}_s + e_s \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{S} = \mathbf{e}, \mathbf{i}$$

(m_s : 質量, $\mathbf{V}_s$: 巨視的速度, e_s : 電荷, $\mathbf{B}$: 磁場の強さ) が成立すると, 任意の時刻で上式が成立し, これから London の式

$$\rho \times \frac{\mathbf{j}}{n_e} = - \frac{e^2 \mathbf{B}}{m_e}$$

がえられるのであるが, $t = 0$ で何故に上式が成立しているという問題である。⁽²⁾ このことに関して, § 2 において, 系のエネルギーが磁場に関して London の式を満足するときに最小になることが変分原理で示される。

さて無衝突プラズマの平衡状態について, Vlasov の方程式を基礎に多くの研究があるが^{(3)~(10)} これらの研究で注意しなければならないのは定常状態のあるいは無摂動の分布関数の与え方が研究者によって異っていることである。たとえば, Z ピンチについて, Harris⁽³⁾ の与えた分布関数は Bennett⁽¹¹⁾ によって求められた密度分布に導くが, Weibel⁽⁴⁾ の与えた分布関数はそうならず, その代りに電流密度の式として London の式に導く。また Pfirsh の論文⁽⁵⁾ では, 電流密度を定める式として, 平板状 θ ピンチにたいしてのみ London の式が帰結され, 平板状 Z ピンチ, 円筒状 z ピンチ, 円筒状 θ ピンチについては London の式と一致しない分布関数が与えられている。

以下われわれは無衝突プラズマの平衡状態を円筒状 z ピンチ, 円筒状 θ ピンチおよびそれらの混合ピンチについて, London の式を用いて統一的に求めてみる。

§ 2 基本式

最初に, われわれは系の巨視的エネルギーが磁場に関して最小になる条件から London の式がえられることを示そう。系の巨視的エネルギーの式としては, たとえば, Van Kampen ら⁽¹²⁾ によって与えられているつぎの式で与える,

$$\int \left\{ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho_i \phi_i + \rho_e \phi_e + \frac{1}{2} \frac{m_i m_e}{Z e^2} \frac{j^2}{\rho} \right\}$$

完全反磁性ピンチプラズマ

$$\left. + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right\} d^3r \quad (1)$$

ただし $\rho = \sum \rho_s = \sum m_s n_s$, $\mathbf{v}$: 質量中心の速度, ψ_s : 単位質量当りの気体としてのエネルギーである。Van Kampen らは (1) 式を時間で微分したものが, 運動方程式と一般化されたオームの式を用いて, ジュール熱と電磁場の輻射との損失に等しいことを示している。したがって輻射がなく, 抵抗が零のときには (1) 式保存されることになる。なお (1) 式の第1項と第4項との和は $\sum \rho_s \mathbf{v}_s^2 / 2$ と一致せず, 正確には $\mathbf{v}$ と $\mathbf{j}$ との相互作用で表現される項 $(m_e \tau / n_e e^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$ が省略されている。 τ は空間電荷密度で $\sum e_s n_s$ で与えられる。この省略されている項と電流の運動エネルギー (第4項) と磁場のエネルギーの和を L と記号する。すなわち

$$L = \int \left\{ \frac{m_e \tau}{n_e e^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} + \frac{m_i m_e}{2 Z e^2} \frac{j^2}{\rho} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\} d^3r$$

ここで $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$ を用いて, L が B に関して最小になる条件を求めてみると,

$$\mu_0 \delta L = \int \left\{ -\frac{m_e}{e^2} \nabla \times \frac{\tau}{n_e} \mathbf{v} + \frac{m_i m_e}{Z e^2} \nabla \times \frac{\mathbf{j}}{\rho} + \mathbf{B} \right\} \delta \mathbf{B} d^3r$$

となるから

$$\frac{m_i m_e}{Z e^2} \nabla \times \frac{\mathbf{j}}{\rho} + \mathbf{B} - \frac{m_e}{e^2} \nabla \times \frac{\tau}{n_e} \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

この結果は気体プラズマに関する London の式の一般化になっていて, $\mathbf{v} = 0$ の平衡状態にたいしては London の式で電流が与えられることを示している。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を使用して, (2) 式は

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_e \mathbf{A}}{m_e} + \tau \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{f}$$

と書ける。ただし f は任意のスカラー関数で, 適当なゲージ変換によって零とすることができる。この式の右辺第2項は電荷密度 τ をもつプラズマが全体として運動することによって発生する対流電流を表わす。

以上の理由で, 平衡状態の無衝突プラズマにたいしては, 電流は London の式で与えられるものと考えてよいであろう。したがって電磁静的平衡状態を記述する式としては,

$$\mathbf{0} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla (p_e + p_i + \frac{m_e}{e^2 n_e} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) \quad (3)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}}{n_e} = - \frac{e^2}{m_e} \mathbf{B} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5a, b)$$

である。(3)式中プラズマの全圧力は分圧の和以上の附加項で表現されることについては、すでに報告したとおりであって、この附加項は電流 $\mathbf{j}$ が曲率をもつことから生ずる遠心力を表わす。

以下円筒状 z ピンチ, θ ピンチおよびそれらの混合ピンチの平衡状態での密度分布, 磁場の分布など巨視的諸量を求めてみる。ただし, $p_s = n_s k T_s$ を仮定し, T_s は空間的に一定と仮定される。

§ 3 ピンチプラズマの平衡解

(3.1) 円筒状 z ピンチ。円筒座標系 (r, θ, z) において, $\mathbf{B} = (0, B_\theta, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 0, j_z)$, $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$ が z ピンチの配位を求めるために必要となる。

$$-j_z B_\theta = k(T_e + T_i) \frac{d n_e}{d r} \quad (6)$$

$$j_z = - \frac{e^2 n_e A_z}{m_e} \quad (7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d r} (r B_\theta) = \mu_0 j_z \quad (8)$$

$$B_\theta = - \frac{d A_z}{d r} \quad (9)$$

を境界条件 $r=0$ で $n_e = n_0$, $A_z = -A_{z0}$, $j_z = j_0$, $B_\theta = 0$ のもとに解く必要がある。(6)~(9)式を用いて

$$N = \frac{n_e}{n_0} = \exp \{ \alpha^2 (1 - a^2) \} \quad (10)$$

がえられる。ここで $a = A_z / A_{z0}$, $\alpha^2 = j_0^2 / 2 e^2 n_0^2 k (T_e + T_i) / m_e$ である。

さらに $(\mu_0 e^2 n_0 / m_e) r^2 = \xi^2$ を用いると, a を定める式として

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{da}{d\xi} \right) = a \cdot \exp \{ \alpha^2 (1 - a^2) \}$$

の関係式がえられ, a を求めるための方程式である。 $B_\theta / \{ \mu_0 e^2 n_0 / m_e \}^{\frac{1}{2}} A_{z0} = b$

において, a の値から b が求められる。また Z ピンチでは, 半径 r までに流れる全電流 i が重要な量で, これは $i = 2\pi r B_\theta / \mu_0$ で与えられる。

いま

$$i_0 = 2\pi \left(\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n_0} \right) \left\{ 2 e^2 n_0^2 \frac{k(T_e + T_i)}{m_e} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

とおくと, $J = i / i_0 = \alpha \xi b$ と書け, J でもって半径 r まで流れる電流の尺度とする。

こうして, N, b, J の ξ にたいする関係を求めると第1図, 第2図, 第3図がえられる。

ここでえられた $N(\xi)$ を Bennett によって与えられた密度分布

$$N = \frac{n_e}{n_0} = \left(1 + \frac{1}{4} \alpha^2 \xi^2 \right)^{-2} \quad (11)$$

と比較するために第1図に示したようになる。

Fig. 2

Fig. 3

完全反磁性ピンチプラズマ

(3.2) 円筒状 θ ピンチ。この場合には $B = (0, 0, B_z)$, $j = (0, j_\theta, 0)$

および $A = (0, A_\theta, 0)$ であって、基本式は

$$j_\theta B_z = k (T_e + T_i) \frac{dn_e}{dr} - \frac{m_e j_\theta^2}{e^2 r n} \quad (12)$$

$$j_\theta = - \frac{e^2 n A_\theta}{m_e} \quad (13)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta) \quad (14)$$

$$- \frac{dB_z}{dr} = \mu_0 j_\theta \quad (15)$$

で与えられる。 $r=0$ で $n=n_0$, $A_\theta=0$ として $B_z=B_{z0}$ が境界条件である。

これから

$$N = \frac{n_e}{n_0} = \exp \{-a^2\} \quad (16)$$

がえられる。ただし $a = e A_\theta / \{2 m_e k (T_e + T_i)\}^{\frac{1}{2}}$ である。 a を定める式は

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{a}{\xi} + \frac{da}{d\xi} \right) = a \exp \{-a^2\}$$

であって、 B_z は $\beta = 2 \mu_0 n_0 k (T_e + T_i) / B_{z0}^2$ を用い、 $B_z / B_{z0} = b$ において

$$b = \beta^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi a)$$

より計算できる。第4図に N と ξ との関係を、第5図に b と ξ との関係を与える。

Fig. 4

Fig. 5

完全反磁性 ビンチプラズマ

(3.3) 円筒状混合ビンチ。この場合は見本量として、 $\mathbf{B} = (0, B_\theta, B_z)$ 、 $\mathbf{j} = (0, j_\theta, j_z)$ として $\mathbf{A} = (0, A_\theta, A_z)$ であって、

基本式としてはつぎの諸式で与えられる、

$$j_\theta B_z - j_z B_\theta = k (T_e + T_i) \frac{dn_e}{dr} - \frac{m_e j_\theta^2}{e^2 n_e r} \quad (17)$$

$$j_\theta = - \frac{e^2 n_e A_\theta}{m_e} \quad (18)$$

$$j_z = - \frac{e^2 n_e A_z}{m_e} \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r B_\theta = \mu_0 j_z \quad (20)$$

$$- \frac{dB_z}{dr} = \mu_0 j_\theta \quad (21)$$

$$B_\theta = - \frac{dA_z}{dr} \quad (22)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\theta) \quad (23)$$

境界条件としては、 $r=0$ で $n=n_0$ 、 $j_z=j_0$ 、 $B_z=B_{z0}$ 、 $j_\theta=0$ 、 $B_\theta=0$ 、 $A_\theta=0$ 、そして $A_z=-A_{z0}$ である。(17)~(23)式を用いて、

$$N = \frac{n}{n_0} = \exp \{ \alpha^2 (1 - a_1^2 - a_2^2) \} \quad (24)$$

がえられる。 α^2 は(3.1)で与えられている量と同じで、 $a_1 = A_z/A_{z0}$ 、

$a_2 = A_\theta/A_{z0}$ である。そして、 a_1 と a_2 とを定める式としては

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{da_1}{d\xi} \right) = a_1 \exp \{ \alpha^2 (1 - a_1^2 - a_2^2) \}$$

および

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi a_2 \right) = a_2 \exp \{ \alpha^2 (1 - a_1^2 - a_2^2) \}$$

である。これから a_1 と a_2 とが ξ の関数として求まれば $B_0 / \{ \mu_0 e^2 n_0 / m_e \}^{1/2} A_{z0} = b_1$ および $B_z / B_{z0} = b_2$ が求められる。そしてさらに, (3.1) で述べた半径 r までの領域で流れる Z 方向の全電流の尺度である J が r すなわち ξ の関数として求められる。第6図 N と ξ との関係を, 第7図は b_1 と ξ の関係を, 第8図には b_2 と ξ との関係をそして第9図に J と ξ の関係を $\beta = 1$ の場合について計算した結果を示す。

Fig. 6

完全反磁性ピンチプラズマ

Fig. 9

§ 4 あとがき

Vlasov の式を基礎にしたピンチプラズマの従来の諸研究では一定常状態の分布関数の与え方が著者によって異なっていて，その結果密度とか磁場とかの諸量の空間的分布が研究者によって異なっている。本研究では，無衝突プラズマにたいしては電流密度を定める式は London の式で与えられることをエネルギーの磁場に関する変分をとることによって証明し，London の式を使用して無衝突のピンチプラズマにたいする平衡解を与えた。

完全反磁性ピンチプラズマ

References

- (1) S.Miyajima; J. Phys. Soc. Japan 29(1970) 530.
- (2) 桑原：日本物理学会（昭和45年）
- (3) E.G.Harris: Nuovo Cimento, 23, (1962) 115.
- (4) E.S. Weibel: Phys. of Fluids, 2 (1959) 52.
- (5) Von D, Pfirsh: z. Naturforsch., 17a (1962) 861.
- (6) R.B.Nicholson: Phys. of Fluids, 6 (1953) 1581.
- (7) G.Laval, R.Pellat & M. Vuillemin: in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1966), Vol. II, pp. 259
- (8) J.P. Freidberg & R.L. Mose: Phys. of Fluids, 12(1969) 887
- (9) R.L. Mose & J.P. Freidberg: Phys. of Fluids, 13 (1970) 531.
- (10) 倉沢：核融合研究，24（1970）185
- (11) W.H. Bennett: Phys. Rev. 45(1934) 890
- (12) N.G. Van Kampen & B.U. Felderhog: Theoretical Methods in Plasma Physics, North holland, 1976, pp.105
- (13) S.Miyajima: 核融合研究，7（1961）427.