流体モデルによる磁化プラズマ中の 波動のシミュレーション

萩野竜樹・武田 進

(名古屋大学工学部)

(49年6月8日受理)

Abstract

A fluid model is proposed in order to simulate the waves in a two-component plasma. The one-dimensional transfer and Maxwell's equations are computed by the modified 2 step Lax-Wendroff method as an initial value problem. In the model, the temporal and spatial dimensions can be made smaller by properly changing the ion to electron mass-ratio, light velocity and magnetic field. Therefore, the transverse and longitudinal waves are included preserving the characteristics of the linear dispersion relation.

First, the small amplitude waves deduced from the linearized MHD-Maxwell's equations are simulated to compute the dispersion relations. The results agree with the theoretical ones for all the ranges, including ones where the phase velocity of the waves is faster than the light velocity.

Secondly, the large amplitude waves are simulated under a condition without the decay instabilities to obtain the frequency and wave-number spectra. The higher harmonics of the wave number as well as the frequency for the excited wave appear due to the nonlinearity. The high and low frequency waves, which have the same wave-number and fluctuation components as those for exciting waves, are excited strongly. Moreover, the beat waves are also excited by mode-mode coupling among the waves.

Computer Simulation by a Fluid Model for the Waves
through Magneto-Plasmas

Tatsuki OGINO, and Susumu TAKEDA

(Department of Electrical Engineering, Nagoya University)

§ 1. まえがき

プラズマのシミュレーションに用いられるモデルは大きく分けて粒子モデルと流体モデルがある⁽¹⁾⁽²⁾。これ等の間の大きな違いは、前者が粒子の運動を常微分方程式である Newton の運動方程式で記述するのに対して、後者は偏微分方程式である流体の輸送方程式で記述する点である。粒子モデルには、電子とイオンの電価がそれぞれのシートに集中しているとした Buneman⁽³⁾ のモデル以来、イオンが均一に分布しているとした Dawson⁽⁴⁾ モデルに発展し、更に Birdsall 等によって、数値的な雑音を小さくするために有限の大きさを持つ荷電粒子を扱った C I C モデル⁽⁵⁾ に拡張された。

流体の輸送方程式を差分で解く場合、系を数値的に安定化させるために、Euler 座標系から流体の流れに乗った Lagrange 座標系に変換して計算する事⁽¹⁾⁽²⁾が多い。この変換を行えば、流体の輸送方程式と Newton の運動方程式との本質的の差違がなくなる。このために P I C モデル⁽⁶⁾ は元来流体モデルから出発したのであるが、Lagrange 座標系で計算する時は粒子モデルとの差違はほとんどみられない⁽⁷⁾。最近 C I C 及び P I C モデルを用いたシミュレーション⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾ もかなり多く、非線形現象及び加熱機構の解明に一翼を担っている。磁界の無いプラズマに対しては、P I C 及び C I C モデルで波数スペクトルの問題⁽¹¹⁾を除けば十分なモデルが作られている。

磁界を含めた一次元モデルは長谷川氏等⁽¹²⁾によって Dawson モデルを拡張して作られ、電子及びイオンサイクロトロン波等に対するシミュレーションが行なわれてきたが、⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾そのモデルは波の位相速度が光速に近いが、それより速い波に対しては適用できなかった。⁽¹²⁾従って高域混成波が小さい波数にて共鳴周波数から離れる効果⁽¹⁵⁾は現れなかった。

一方流体モデルは磁界を含んでいるが、 θ ピンチ等⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾個々の境界条件に規定したモデルがほとんどで、Maxwell 方程式を厳密に解いている例はまだみかけない。粒子モデルより流体モデルが計算機の記憶容量と、計算時間の点で有利だから、一般的な流体モデルでプラズマの現象をどこまで表現できるかを明らかにする事は興味ある問題である。流体モデルは一般に Lagrange 座標系で計算した方が数値的安定性は良いが、大振幅波動現象又は乱流プラズマを扱う場合は、Lagrange 座標系の決定が非常に複雑になり、更に Euler 座標系に変換した時、解が 2 価になって物理的に意味のない場合⁽¹⁸⁾も起り得る。従って Euler 座標系で数値的に安定なモデルを作る事も重要である。

本論文では、静磁界がある場合に、電子と一価イオンからなる均質なプラズマ中の電磁界を自己無盾なく閉じた形に含んでいて、粒子モデルに近い 1 つの流体モデルを提案する。このモデルは、一次元の流体の輸送方程式と Maxwell 方程式を初期値問題として安定な差分で計算するものである。二成分プラズマのシミュレーションでは計算時間短縮のために、通常イオンと、電子の質量比 $\gamma \equiv m_i / m_e$ を小さくする。その時分散関係を決定する他の独立なパラメータとして光速 c と静磁界の強さ B_0 。

(又は電子サイクロトロン周波数 ω_{ce})があるが、それも後述の様にスケーリングして扱えば、線形の分散関係の特性をほとんど変化させずにモデルを作る事ができる。このモデルは光速より位相速度の速い波についても適用できて、有限 β 値効果を含む。

計算の結果、小振幅波動の分散関係に対しては理論値⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾⁽²¹⁾と良い一致が得られた。又クーロン衝突項を零にしても系の安定性は良く、保存則も十分に保証されている。以下、§ 2.は出発点となる基礎方程式を述べ、§ 3.はモデルの概要を、§ 4.は小振幅波動に対する分散関係と大振幅波動に対する周波数及び波数スペクトルを計算する方法とその結果を述べ、§ 5.で結果について討論する。

§ 2. 基礎方程式

温度は等方的と仮定し、MKS単位系を用いて、各荷電粒子の連続の式、運動量及びエネルギー輸送の式とMaxwell方程式は次式の様に書ける。

$$\frac{\partial n_\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}_\mu n_\mu = 0 \quad (1. a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_\mu n_\mu + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}_\mu \mathbf{V}_\mu + \mathbf{I} v_{T\mu}^2) n_\mu - \frac{e_\mu}{m_\mu} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\mu \times \mathbf{B}) n_\mu \\ = -\nu_{\mu\nu} (\mathbf{V}_\mu n_\mu - \mathbf{V}_\nu n_\nu) \end{aligned} \quad (1. b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V}_\mu^2 + 3 v_{T\mu}^2) n_\mu + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}_\mu^2 + 5 v_{T\mu}^2) \mathbf{V}_\mu n_\mu - \frac{2 e_\mu}{m_\mu} \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}_\mu n_\mu \\ = -\nu_{eq}^\mu (3 v_{Te}^2 n_e - 3 \gamma v_{Ti}^2 n_i) \end{aligned} \quad (1. c)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \dots\dots (1. d), \quad \mathbf{V} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \dots\dots (1. e)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = 0 \dots\dots (1. f), \quad \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \dots\dots (1. g)$$

ここに $\rho = e(n_i - n_e)$, $\mathbf{J} = e(\mathbf{V}_i n_i - \mathbf{V}_e n_e)$ で、添字 μ と ν は e 又は i でそれぞれ電子とイオンを表し、 $e_i = e$, $e_e = -e$ で e は単位電価を示す。 n_μ , $\mathbf{V}_\mu$ 及び $v_{T\mu}$ は流体の密度、速度及び熱速度を、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は電界と磁界を示す。又 $\mathbf{V}_\mu \mathbf{V}_\mu$ はテンソルで、 $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。

ν_{ei} はクーロン衝突周波数⁽²²⁾⁽²³⁾であり、 $\nu_{ie} = \gamma^{-1} \nu_{ei}$, $\nu_{eq}^e = \nu_{eq} = 2 \gamma^{-1} \nu_{ei}$ 及び

$$\nu_{eq}^i = -\gamma^{-1} \nu_{eq}^e \quad \text{の関係式が成り立つ。}$$

§ 3. 流 体 モ デ ル

ここでは電子とイオンを含み、静磁界中のプラズマの現象をほぼシミュレーションできる様な流体モデルの作成を目的とする。

凡ての変数は x 方向のみに変化する様な一次元を考え、静磁界は $B_0 = (B_{x0}, 0, B_{z0})$ の様に xz 平面内にとり x 軸となす角度を θ とする。この時 (1. e, f) 式より $\partial B_x / \partial t = \partial B_x / \partial x = 0$ となり $B_x = B_{x0} = \text{一定になる。}$

以下すべての変数を規格化して無次元にする。即ち密度は平均密度 n_0 で、速度は初期の電子の熱速度 $\langle v_{Te0} \rangle$ で、距離はデバイ長 k_{De}^{-1} で、時間は電子プラズマ周波数の逆数 ω_{pe}^{-1} で、電界は $E_s \equiv n_0 e / \epsilon_0 k_{De} = \sqrt{m_e \langle v_{Te0} \rangle^2 n_0 / \epsilon_0}$ で、磁界は $B_s \equiv E_s / c$ で規格化する。ここでブラケット $\langle \rangle$ は空間平均を示す。ボルツマン定数を k_B 、初期の平均電子温度を $\langle T_{e0} \rangle$ とした時、 $\langle v_{Te0} \rangle \equiv \sqrt{k_B \langle T_{e0} \rangle / m_e}$ 、 $\omega_{p\mu} \equiv \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 m_\mu}$ 、 $k_{De} \equiv \omega_{pe} / \langle v_{Te0} \rangle$ 及び $\omega_{c\mu} \equiv e B_0 / m_\mu$ である。この時周波数は ω_{pe} で、波数は k_{De} で規格化された事になる。規格化された変数は $\sim$ の記号を付けて表すと次式の通りになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_\mu &= n_\mu / n_0, \tilde{V}_\mu = V_\mu / \langle v_{Te0} \rangle, \tilde{v}_{T\mu} = v_{T\mu} / \langle v_{Te0} \rangle \\ \tilde{x} &= k_{De} x, \tilde{t} = \omega_{pe} t, \tilde{E} = E / E_s, \tilde{B} = B / B_s \\ \tilde{\omega}_{p\mu} &= \omega_{p\mu} / \omega_{pe}, \tilde{\omega}_{c\mu} = \omega_{c\mu} / \omega_{pe}, \tilde{\nu}_{\mu\nu} = \nu_{\mu\nu} / \omega_{pe} \\ \tilde{c} &= c / \langle v_{Te0} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

従って時間、距離、速度は $\tilde{\omega}_{pe}^{-1} = \tilde{k}_{De}^{-1} = \langle \tilde{v}_{Te0} \rangle = 1$ を単位に取った事になり、 $\tilde{B}_0 = \tilde{c} \tilde{\omega}_{ce}$ の関係式が成り立つ。この時、プラズマ中の波動の分散関係は $\gamma, \tilde{c}, \langle \tilde{v}_{Ti0} \rangle, \tilde{\omega}_{ce}, \theta$ の5つのパラメーターで決定される。⁽²¹⁾

二成分プラズマのシミュレーションでは計算時間短縮のために、質量比を人工的に小さくする事が多い。即ち人工的イオンの質量 $\hat{m}_i$ を導入し、 $\hat{\gamma} \equiv \hat{m}_i / m_e$ を用いる。記号 $\wedge$ はシミュレーション

ンで扱う変数に付ける。この時、波動の分散関係の特性を変化させない様に他のパラメータもスケールリングする。 $\langle T_{i0} \rangle$ と $\hat{\gamma}$ が決まれば $\langle \hat{v}_{Ti0} \rangle$ は決まり、角度 θ はスケールリングに無関係だから、 $\hat{c}$ と $\hat{\omega}_{ce}$ を $\log \hat{\gamma} \hat{\omega}_{ce} \equiv \log \gamma \tilde{\omega}_{ce}$, $\log \hat{c} \equiv \log \gamma \tilde{c}$ より決めれば分散関係の特性を保存したまま時間と空間の次元を縮小できる。結局シミュレーションに用いる変数は $\sigma \equiv \log_{10} \hat{\gamma} / \log_{10} \gamma$ とすれば次式になる。

$$\hat{c} = (\tilde{c})^\sigma, \hat{\omega}_{ce} = (\tilde{\omega}_{ce})^\sigma, \hat{v}_{ei} = (\tilde{v}_{ei})^\sigma \quad \dots\dots\dots (3)$$

残りの変数は質量比が $\hat{\gamma}$ で、更に $\hat{B}_0 = \hat{c} \hat{\omega}_{ce}$ の関係式がある事を考慮していれば、(2) 式の定義で記号 $\sim$ を $\wedge$ に置き換えてそのまま使用できる。

シミュレーションで用いる変数は $\wedge$ を記したが、改めて $\wedge$ を除し、(1) 式を次の様に書き直す。

$$\frac{\partial n_\mu}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} V_{\mu x} n_\mu \quad (4. a, b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{\mu x} n_\mu = - \frac{\partial}{\partial x} (V_{\mu x}^2 + v_{T\mu}^2) n_\mu + \gamma_\mu^{-1} (E_x + \frac{V_{\mu y}}{c} B_z - \frac{V_{\mu z}}{c} B_y) n_\mu - \gamma_\mu^{-1} \nu_{ei} J_x \quad \dots\dots (4. c, d)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{\mu y} n_\mu = - \frac{\partial}{\partial x} V_{\mu y} V_{\mu x} n_\mu + \gamma_\mu^{-1} (E_y + \frac{V_{\mu z}}{c} B_x - \frac{V_{\mu z}}{c} B_z) n_\mu - \gamma_\mu^{-1} \nu_{ei} J_y \quad \dots\dots (4. e, f)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_{\mu z} n_\mu = - \frac{\partial}{\partial x} V_{\mu z} V_{\mu x} n_\mu + \gamma_\mu^{-1} (E_z + \frac{V_{\mu x}}{c} B_y - \frac{V_{\mu y}}{c} B_x) n_\mu - \gamma_\mu^{-1} \nu_{ei} J_z \quad \dots\dots (4. g, h)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_\mu^2 + 3 v_{T\mu}^2) n_\mu = - \frac{\partial}{\partial x} (V_\mu^2 + 5 v_{T\mu}^2) V_{\mu x} n_\mu + 2 \gamma_\mu^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}_\mu n_\mu + \gamma_\mu^{-1} \nu_{eq} (3 v_{Te}^2 n_e - 3 \gamma v_{Ti}^2 n_i) \quad \dots\dots (4. i, j)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = - J_x \quad \dots\dots (4. k) \quad , \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = - J_y - c \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad \dots\dots (4. l)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = - J_z + c \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad \dots\dots (4. m)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = c \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \dots\dots (4. n) \quad , \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = - c \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \dots\dots (4. o)$$

ここに $\gamma_i = \gamma$, $\gamma_e = -1$ 及び $\mathbf{J} = \mathbf{V}_i n_i - \mathbf{V}_e n_e$ となる。以上の15個の非線形偏微分方程式を差分方程式に直して変形2 step Lax-Wendroff 法⁽²⁴⁾⁽¹⁾で解く。ただし E_x の初期値はポアソン式から決定する。基本の変数を $(n_\mu, \mathbf{V}_\mu, v_{T\mu}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ から $\Phi \equiv (\delta n_\mu, \mathbf{M}_\mu, W_\mu, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ に移して、 Φ を変数とする。ここで

$$\delta n_\mu \equiv n_\mu - 1 \quad \cdots \cdots (5. a) \quad , \quad \mathbf{M}_\mu \equiv \mathbf{V}_\mu n_\mu \quad \cdots \cdots (5. b)$$

$$W_\mu \equiv (\mathbf{V}_\mu^2 + 3 v_{T\mu}^2) n_\mu \quad \cdots \cdots (5. c)$$

である。(4. a-o)の方程式は次式の形

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}(\Phi) + \mathbf{G}(\Phi) \quad \cdots \cdots (6)$$

にまとめられるので、差分の時間及び空間の幅をそれぞれ Δt と Δx として

$$\begin{aligned} \Phi\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right) &= \Phi\left(t, x + \frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \left[\mathbf{F}\left(t, x + \Delta x\right) - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{F}\left(t, x\right) \right] + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}\left(t, x + \frac{\Delta x}{2}\right) \quad \cdots \cdots (7. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t + \Delta t, x) &= \Phi\left(t, x\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{F}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] + \Delta t \mathbf{G}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x\right) \quad \cdots \cdots (7. b) \end{aligned}$$

なる2 stepの中心差分を用いる。 $c \Delta t / \Delta x < 1$ とすれば線形の範囲では、この系は数値的に安定である。⁽²⁴⁾⁽¹⁾ 又以下に行なった実際の計算でも安定であった。

境界条件には周期的境界条件を与える。この時は(4)の方程式系は保存型で記述されているので、全空間で粒子数、運動量及びエネルギー保存は精度良く満足されている。

プラズマには常に熱揺動があり、あるモードが不安定になる場合もその起源に熱揺動が必要である事が多いので次の方法でそれを取り入れる。プラズマに集団運動が励起されていない時の熱揺動は系の自由度を f_0 とした時 $\frac{1}{2} \epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle / \frac{1}{2} n_0 k_B \langle T_e \rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}^2 \rangle \approx 1 / \sqrt{f_0}$ と与えられる。⁽²⁵⁾

従って中心値が零で分散が $1 / \sqrt{f_0} \approx 1 / \sqrt{n_0}$ の正規乱数を発生させて、時間空間の各点で(4. i, j)式に加える事により最低の熱揺動を導入する。

§ 4. 計算の方法と結果

(i) 小振幅波動の分散関係

§ 3.で述べたモデルを用いて、磁化プラズマ中の波動の伝搬を調べた。プラズマ長を L 、空間の分割数を N 、時間と空間の差分の幅をそれぞれ Δt と $\Delta x = L/N$ とする。計算のパラメータは $N = 128$, $\Delta x = 2\pi/2^m$ (m は整数), $\Delta t = \Delta x/16$ を用いた。

初期条件は次の方法で与える。温度は一樣と仮定して、(4. a~h) 及び (4. k~o) 式を用いる。変数を $\mathbf{X} \equiv (n_e, n_i, V_{ex}, V_{ix}, V_{ey}, V_{iy}, V_{ez}, V_{iz}, E_x, E_y, E_z, B_y, B_z)$ と置き、 $\mathbf{X}$ を平均値 $\mathbf{X}_0$ とそれからの摂動分 $\delta \mathbf{X}$ に分離して線形化し、 $\delta \mathbf{X}$ を $|\delta \mathbf{X}| e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ なる平面波に分解すると

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{X} = \omega \delta \mathbf{X} \quad \dots\dots\dots (8)$$

なる永年方程式が求まる。(8) 式を解く事により ℓ 番目の固有値 ω^ℓ と ω^ℓ に属する最大値を 1 に規格化した固有ベクトル $\delta \mathbf{X}(\mathbf{k}, \omega^\ell)$ が求まる。⁽²⁾ 実空間の $\delta \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ はこの $\delta \mathbf{X}(\mathbf{k}, \omega^\ell)$ と定数 $a(\mathbf{k}, \omega^\ell)$ を用いてフーリエ逆変換する事により

$$\delta \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{\omega^\ell} \sum_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k}, \omega^\ell) \delta \mathbf{X}(\mathbf{k}, \omega^\ell) e^{i\omega^\ell t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

と書ける。初期値には $\mathbf{k}$ と ω^ℓ に属する単色平面波

$$\delta \mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \text{Re} \{ a \delta \mathbf{X}(\mathbf{k}, \omega^\ell) \} \cos \mathbf{k}\mathbf{x} + \text{Im} \{ a \delta \mathbf{X}(\mathbf{k}, \omega^\ell) \} \sin \mathbf{k}\mathbf{x} \quad \dots\dots\dots (10)$$

を与える。ここで Re と Im はそれぞれの変数の実部と虚部を示す。又 $a(\mathbf{k}, \omega^\ell)$ は波の振幅を示し以下正の定数として扱い単に a と書く。(10) 式の $\delta \mathbf{X}(\mathbf{x}, 0)$ から $\Phi(\mathbf{x}, 0)$ を計算して、後者を初期値として用いた。この手法を用いたために、それぞれの波を他の波からほとんど分離できて伝搬特性が明瞭になった。

初期値 $\Phi(\mathbf{x}, 0)$ から繰り返し計算して時間的发展の様子を調べる。まず次式でフーリエ係数 $A^j(\mathbf{k}, t)$, $B^j(\mathbf{k}, t)$ と位相角 $\theta^j(\mathbf{k}, t)$ を求める。

$$A^j(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}_I=1}^N \delta \mathbf{X}^j(\mathbf{x}_I, t) \cos \mathbf{k}\mathbf{x}_I \quad (11, a)$$

$$B^j(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}_I=1}^N \delta \mathbf{X}^j(\mathbf{x}_I, t) \sin \mathbf{k}\mathbf{x}_I \quad (11, b)$$

$$\theta^j(\mathbf{k}, t) = \tan^{-1} \{ B^j(\mathbf{k}, t) / A^j(\mathbf{k}, t) \} \quad (11, c)$$

ここで $\mathbf{x}$ の右下の添字はメッシュの番号で、変数の右上の添字はベクトルの成分を示す。

モード番号 I 番目の波の波数 k_I は $2\pi I/L$, 波長 λ_I は $2\pi/k_I$ であるから, 時刻 t と $t+\Delta t$ における位相角の差 $\Delta\theta^j = \theta^j(k_I, t+\Delta t) - \theta^j(k_I, t)$ を計算する事により ω_I を求める。

第1図 波の伝搬

ただし $|\Delta\theta^j| < 2\pi$ である。第1図に示す様に時刻 t と $t+\Delta t$ の間に波の進んだ距離を $\Delta\lambda$, 波の位相速度を V_{ph} とすると

$$\Delta\lambda = \lambda_I \Delta\theta^j / 2\pi \quad \dots\dots (12, a), \quad V_{ph} = \Delta\lambda / \Delta t = \Delta\theta^j / k_I \Delta t \quad \dots\dots (12, b)$$

$$\omega_I = V_{ph} k_I = \Delta\theta^j / \Delta t \quad \dots\dots (12, c)$$

となり波数 k_I に対する周波数 ω_I が求まる。初期値として与えた単色平面波は $a \ll 1$ の場合は時間を経ても, 波形がほとんど歪まず分散関係が精度良く計算できた。

第2 a, b, c 図はその結果をまとめたもので, それぞれ $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の場合の分散関係を示し, 実線が線形化された MHD-Maxwell 方程式系から得た理論値⁽²⁾で丸印がシミュレーションから得た結果を示す。周波数, 波数及び速度はそれぞれ $\omega_{pe}, k_{De}, <v_{Teo}>$ で規格化されている。プラズマパラメータは, $T_e = T_i = 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$, $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $\gamma = 1836$, $\hat{\gamma} = 1.6$, $\hat{\omega}_{ce} = 2.0$, $\hat{c} = 7.6$, $\hat{v}_{ei} = 4.02 \times 10^{-2}$ 及びアルフベン速度 $\hat{V}_A \equiv \hat{\omega}_{ci} \hat{c} / \hat{\omega}_{pi} = 3.8$ である。初期の波の振幅として $a = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ の場合を計算したが, ほとんど差異はなかった。 k_I を与えた時, ω_I は $\partial \mathbf{X}$ の13個の成分から各々計算されるが,

その中で振幅の比較的大きい成分から計算された ω_I を集めるとほぼ 3% 以内の相対誤差で一定値になるので、その平均値を注目している波の ω_I と決定した。

(a)

(b)

(c)

第2図 (a) $\theta = 0^\circ$, (b) $\theta = 45^\circ$, 及び (c) $\theta = 90^\circ$ の場合の分散関係。

流体モデルによる磁化プラズマ中の波動のシミュレーション

第2 a 図で (1) は電子プラズマ波, (2) はイオン音波, (3) は fast right wave (FR波), (4) は fast left wave (FL波), (5) は電子サイクロトロン波 (EC波), (6) はイオンサイクロトロン波 (IC波), 第2 b 図で (10) は速い磁気音波, (11) はアルフベン波, (12) は遅い磁気音波, 第2 c 図で (13) は異常波, (14) は正常波, (15) は高域混成波, (16) は低域混成波の各ブランチをそれぞれ表す。⁽²¹⁾ 第2 図から明らかな様にシミュレーションの結果から得られた分散関係は $\omega/k \geq c$ の領域まで含めて実線で示す理論値と良い一致を示す。第2 c 図から明らかな様に, (15) のブランチに対する遮断周波数は高域混成共鳴周波数から離れて低くなっている。この効果は長谷川氏等のモデル⁽¹²⁾では現われていない。

第2 a 図の破線は, 第3 図の例で示される様なシミュレーションから得られた電子プラズマ波の減衰より決まる $\hat{\gamma}_{ei}$ を記したもので, Spitzer の理論⁽²⁵⁾から計算した値 0.0402 に近い。第3 図は $a = 10^{-2}$, $k = 1/8$ の単一モードの初期条件より出発した電子プラズマ波の $x = L/2$ の点における時間的変化の様子を示したもので縦軸は $\log_{10} |\Phi|$ である。

第3 図 $x = L/2$ における電子プラズマ波の時間的変化。

$|E_x|$ と $|M_{ex}|$ はほぼ一定の減衰率で減衰しているのが判る。 $|E_x|$ は絶対値をとっているから, 2 個のピーク値間隔の時間が $k = 1/8$ の電子プラズマ波の 1 周期になる。又 $|M_{ix}| = \hat{\gamma}^{-1} |M_{ex}|$ であるのが判る。

(ii) 大振幅波動の周波数及び波数スペクトル

第4 a, b 図は $\theta = 0^\circ$, $a = 0.5$, $k = 1/8$, $\nu_{ei} = 0$ に対する大振幅電子プラズマ波を初期値に与えた時の $t = 2\pi$ と $t = 32\pi$ における空間的变化の様子を示したものである。

第4図 (a) $t = 2\pi$ 及び (b) $t = 32\pi$ の時の大振幅電子プラズマ波の空間的变化。

第4 a 図では初期値に近く、それぞれの物理量 Φ は三角関数で示される様な波形をしているが、第4 b 図では波形が歪み高調波が発生している。 $t = 20\pi$ で同図に近い波形が形成され、その後は波形

はあまり変化せずに基本波の位相速度で左の方へ伝搬する。

E_x が下方へ急峻なのは, δn_e が高密度側へ急峻である事を示していて理論でも示されている。⁽²⁶⁾ 同図の条件は, 電子プラズマ波の群速度 $\hat{v}_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} \approx 1/8$ がイオン音波の速度 $\hat{c}_s \approx \sqrt{2}/4$ より小さくて崩壊不安定の共鳴条件は成立しない領域である。⁽²⁷⁾

第5 a b 図は $\theta = 0^\circ$, $a = 0.5$, $k = 1/8$, $\nu_{ei} = 0$ の電子プラズマ波に近い初期条件を与えた時の $t = 0$ と $t = 62\pi$ の間の周波数スペクトルと $t = 32\pi$ から $t = 64\pi$ までの平均の波数スペクトルを示す。

(a)

第5図 大振幅電子プラズマ波で励起した時の波の
(a)周波数スペクトル及び(b)波数スペクトル;
 $A = \delta n_e$, $B = \delta n_i$, $C = E_x$, $D = M_{ex}$
及び $E = M_{ix}$ を示す。

(b)

第5 b 図は $k = \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \dots$ の値に分離したピーク値をもつスペクトルになっていて、文字が重なる場合はアルファベットの後位の文字を右へ移している。A, B, C, D, E はそれぞれ $\delta n_e, \delta n_i, E_x, M_{ex}, M_{ix}$ に相当し、その位置が大きさを示す。

第5 a 図にて初期値として1のピーク値に相当する大振幅電子プラズマ波を与えている。2と3のピーク値はそれぞれ第2及び第3高調波である。4のピーク値においては $\omega = 1/16$ で δn_i と δn_e がほぼ等しい。第5 b 図にてBで示される δn_i は $k = 1/8$ の時に大きい。第2 a 図上で $(k, \omega) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{16})$ の点はイオン音波のブランチに近い。更に4のピーク値における Φ の対比はイオン音波の固有ベクトルのそれ⁽²⁾に近い事から考えると、4のピーク値の波は $k = 1/8$ のイオン音波である。同様に、6のピークは $(\omega, k) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ のイオン音波であると推測される。5の矢印の周波数は1と4の差の周波数に一致するので1の低周波数側の側帯波である。非線形のために高調波、他のモード及び側帯波が強く励起されていて、波数においても $k = 1/8$ なる基本波の高調波が顕著に現れている。

第6 a, b 図は $\theta = 0^\circ, k = 1/4, a = 0.2, \nu_{ei} = 0$ にして、1, 3, 4のピーク値で示されるイオン音波、IC波及びEC波の3つの波を重ねて初期値として与えた時の $t = 0$ から 32π までの周波数スペクトルと $t = 28\pi$ から 32π までの平均の波数スペクトルを示している。

(a)

第6図 大振幅イオン音波、イオン及び電子サイクロトロン波で励起した時の波の (a) 周波数スペクトル及び (b) 波数スペクトル；A = δn_e , B = δn_i , C = E_x , D = E_y , E = E_z , F = B_y , 及び G = B_z を示す。

第6 b図は $k=1/4, 2/4, 3/4, \dots$ の分離したスペクトルになっている。A, B, C, D, E, F, Gはそれぞれ $\delta n_e, \delta n_i, E_x, E_y, E_z, B_y, B_z$ を示す。励起波が大振幅なので他の波も非線形で強く励起されている。 Φ が $k=1/4$ で大きいので第2 a図の $k=1/4$ における波の周波数と第6 a図における各ピーク値の周波数を比較する事と、各ピーク値が Φ のいずれの成分に主として現れているかを調べる事により、それぞれの番号のピーク値を示す波は2が電子プラズマ波、5がFL波、6がFR波と結論される。

第6 b図で $k=0$ にて E_y と E_z の値が有限である事と第2 a図の分散関係からみて、第6 a図の7と8のピーク値はFL波とFR波の遮断周波数である。 $k=0$ の振動は3つの波を初期値に重ねて与えたために生じたものである。初期値は1, 3, 4のピーク値をもつ平面波の重ね合わせであるが、大振幅のために励起波と同じ波数 $k=1/4$ の他の固有波動である2, 5及び6のピーク値をもつ波が強く励起されている。

第7 a b図は $\theta=90^\circ, k=1/4, a=1.0, \nu_{ei}=0$ にて1のピークの低域混成波と3のピークの正常波を重ねて初期値として与えた時の $t=0$ から 32π までの周波数スペクトル及び $t=28\pi$ から 32π までの平均の波数スペクトルを示している。第7 b図は第6 b図と同じ記号を用いた。これも第2 c図の分散関係にて各ブランチ上の $k=1/4$ における周波数と比較してみる事により2と4のピーク値の波は高域混成波及び異常波であると結論される。第7 b図で $k=0$ に

て E_x , E_y , E_z が有限の値をもつ事と第2 c 図からみて, 5, 6, 7 のピーク値の周波数はそれぞれ高域混成波, 正常波及び異常波の遮断周波数であると判る。

第7図 大振幅低域混成波及び正常波で励起した時の波の(a)周波数スペクトル及び(b)波数スペクトル; (b)図の記号は第6 b 図と同じ。

次に 8 のピーク値の周波数は、第 7 b 図の波数スペクトルを考慮した時、直接第 2 c 図のブランチ上には該当するものがない。しかし 1 と 2 の周波数の和に一致し、振動の成分も 1 と 2 の低域及び高域混成波の成分とほぼ等しいことから 1 と 2 のビート波であると考えられる。

初期値が $a = 1$ と非常に大振幅であるから第 7 a 図では 1 と 3 の高調波及び 1 のピーク値だけ高周波数側又は低周波数側にずれた側帯波が小さなピークとなって現われている。第 7 b 図から明らかな様に、 $k = 1/4$ の励起波に対する波数の高調波の振幅もかなり大きい。3 のピーク値で示される正常波の振幅 a を初期値で零にしても、他のスペクトルはほとんど変化しないので正常波と他の波の相互作用は弱い。

§ 5. 討 論

第 5 a b 図から明らかな様に崩壊不安定を起さない大振幅の電子プラズマ波は、励起波に対する波数及び周波数の高調波を非線形のために励起する。即ち、崩壊不安定と逆の現象——波数及び周波数スペクトルにおいて低い方から高い方への流れを作り出すと思われる。しかしこの現象が顕著になるのは、非線形の程度を示す a の値はかなり大きい必要がある。 $a = 1$ で電子プラズマ波の振動エネルギーは電子の運動エネルギーに等しくなる。第 5 図の条件の逆の場合、即ち電子プラズマ波の群速度 V_g が c_s より大きい時には崩壊不安定が起るはずである。⁽⁷⁾ $c_s \propto \gamma^{-1/2}$ であるから $\gamma = 1.6$ を例えば $\gamma = 1836$ にすると、 $V_g \leq c_s$ を満たす限界の波数は小さくなる。しかしその条件を満たす領域においては、上に述べてきた現象が起ると期待される。

第 6, 7 図から判る様に、大振幅の低周波を空間的に一様に励起すれば、同じ波数で励起波より高い周波数の固有な波も同時にかなり強く励起される。又波数スペクトルから明らかな様に、波数における高調波も強く励起される。

大振幅で励起した波より高周波数側に、励起波と共通な振動成分をもつ波のブランチが存在しなければ、励起波の高調波が主として発生し、その振幅は励起波の振幅より小さい。励起波より高周波数側に、励起波と共通な振動成分をもつ波のブランチが存在すれば、励起波の高次の高調波が時間と共に強く励起されて、主に励起波と同じ波数の高周波数の固有な波に振動エネルギーが移って安定になると考えられる。励起波より低周波数側に、波のブランチが存在すれば、先ずイオン又は電子による誘導散乱⁽⁸⁾でイオン又は電子に低周波数の振動が起り、その振動が主として励起波と同じ波数の固有な低周波に移って行って安定になると考えられる。この現象は共鳴条件を満たさなくても、励起波が大振幅になれば顕著になる。

ただし崩壊不安定を起す条件の波に対しては、ずっと小振幅の励起波で良く知られた他の2つの波への崩壊が起るはずである。⁽²⁷⁾ 尚 $a \ll 1$ なる小振幅の初期値から出発すれば、励起波以外の波のスペクトルはずっと小さくなる。

§ 6. む す び

流体の輸送方程式とMaxwell方程式を非線形のまま変形2 step Lax-Wendroff法で初期値問題として解き、 $\hat{\gamma}$, $\hat{c}$ 及び $\hat{\omega}_{ce}$ を導入する事により線形化されたMHD-Maxwell方程式系で記述されるすべての波に対してシミュレーションを行ない、分散関係を求めて理論値と良く一致する事を示した。流体モデルではあるが、 $\omega/k \geq c$ の領域の波を閉じた形で厳密に取り入れたのは長谷川氏のモデル⁽¹²⁾の1つの拡張になっていて、有限 β 値効果も含んでいる。

次に崩壊不安定の起らない条件下で、大振幅波動のシミュレーションを行ない、高調波の励起、更に励起波と同じ波数での高周波数及び低周波数の固有な波の励起及び波数における高調波の励起の現象を明らかにした。尚、粒子数、運動量及びエネルギーの保存則及び数値的な安定性は実際の計算でも十分に保証されていた。

今後の課題として、崩壊不安定、ソリトン及び乱流スペクトル等の興味ある現象に、ここで述べたモデルを用いる事ができる。

計算には名古屋大学プラズマ研究所の計算機センター及び名古屋大学大型計算機センターを利用した。

終りに、日頃懇切に討論して頂く名古屋大学の宮島重喜助教授、名古屋大学プラズマ研究所の上村鉄雄助手、渡辺二太助手及び計算の前半を手伝って頂いた卒研究生の加藤昇氏(現トヨタ自工K.K.)に厚くお礼申し上げる。

流体モデルによる磁化プラズマ中の波動のシミュレーション

- 1) B.Alder et al. Methods in Computational Physics
Vol. 9, Academic press, New York (1970)
- 2) 例えば 川上一郎   プラズマ若手夏の学校テキスト   1969, 1973
- 3) O.Buneman Phys. Rev. 115, 503, 1959
- 4) J.M.Dawson and R.Shanny Phys. Fluids 11, 1506, 1968
- 5) S.K. Birdsall and D.Fuss J. Comp. Phys. 3, 494, 1969
- 6) F.H.Harlow Proc.Symposia in Applied Mathematics, Amer.
Math. Soc. 15, 269, 1963
- 7) R.L.Morse and C.W.Nielson Phys. Fluids 12, 2418, 1969
- 8) W.L.Kruer and J.M.Dawson Phys. Fluids, 15, 446, 1972
- 9) R.L.Morse and C.W.Nielson Phys.Fluids 16, 909, 1973
- 10) R.J.Mason Phys. Fluids 15, 845, 1972
- 11) 奥 谷   核融合研究   18, 440,   1967
- 12) A.Hasegawa and H.Okuda Phys.Fluids 11, 1995, 1968
- 13) A.Hasegawa and T.Kamimura Phys.Fluids 11, 2004, 1968
- 14) A.Hasegawa Phys. Fluids 15, 870, 1972
- 15) H.Oya Radio Sci. 6, 1131, 1971
- 16) K.Hain Nuclear Fusion Suppl. Pt 2 561, 1962
- 17) D.Duchs Phys.Fluids 11, 2010, 1968
- 18) 例えば B.B.Kadomtsev and V.I.Karpman Soviet Phys.
Uspekhi 14, 40, 1971.
- 19) T.H.Stix The theory of Plasma Waves, McGraw-Hill Book
Co., Inc., New York, (1962)
- 20) A.I.Akhiezer et al. Collective Oscillation in a Plasma,
The M.I.T. Press, Cambridge, (1967)
- 21) 荻野, 武田   核融合研究   31, 47   1974
- 22) L.Spitzer Theory of Physics of Fully Ionized Gases, Inter-
science Publishers, New York, (1956)
- 23) N.Suzuki, A.Funahashi and S.Itoh JAERI-M 4726, 1972
- 24) P.D.Lax and B.Wendroff Commun. pure appl. Math. 17, 381
1964

- 25) 例えば 市村 浩   統計力学, 裳華房   118, (1971)
- 26) R.C.Davidson   Methods in Nonlinear Plasma Theory, Academic
press, New York and London, p. 38-41, (1972)
- 27) 例えばA.A.Galeev and R.Z.Sagdeev   Nucl.Fusion 13, 603, 1973
- 28) V.N.Tsyтовich   Nonlinear effects in Plasma, Plenum press,
New York-London, 73-256, 1970