有限プラズマ中での異常波の励起と吸収

天岸 祥光* (静岡大・教養)

加藤 清江** (静岡大・理)

(52年2月8日受理)

Abstract

A numerical analysis of excitation and absorption of extraordinary wave in a bounded plasma is described. Extraordinary wave, which is excited by a simple coil immersed in a steady axial magnetic field, is strongly absorbed near the upper hybrid frequency. However, its absorption rate depends on the electron collision frequency and the geometrical structure of the coupling coil.

1 はじめに

アップーハイブリッド周波数近くで共鳴点をもつ異常波に注目し、そのエネルギーの吸収の様子を最も簡単なモデルで数値計算を行う。P.E. Vandenplas 等^{1),2)}及びH. Schluter 等^{3),4)}は、プラズマの境界条件、コイルの幾何学的構造などを考慮し、ローーハイブリッド或はイオンサイクロトロン周波数近くでのエネルギーの吸収を実験、理論の両面から精力的に調べているが、我々は異常波を励起する方法として、後者のグループが行なった方法に近いものを用いる。すなわち、図1に示すような半径Rのコイルにr.f.電流を加える。計算をできるだけ簡単にする為に、コイルの長さは無限大とし、プラズマの密度はどこも一様とする。

Excitation and Absorption of Extraordinary Wave in a Bounded Plasma

* Yoshimitsu Amagishi: Department of General Education,
Shizuoka University

** Kiyoe Kato: Department of Physics, Shizuoka University

2 基礎方程式及びその解

まずプラズマの温度を無視した運動方

程式

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

及びこの流体に対するオームの法則

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nu \mathbf{J} \right) \\ &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{M}{e} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

図1 励起用コイル $R = 4.5 \text{ cm}$

と，マックスウェルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

を考える。但し，ここで $\rho \simeq n_e M$ ， $\mathbf{J} \simeq n_e e (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e)$ ，

$\mathbf{V} \simeq (1/M) (M \mathbf{V}_i + m \mathbf{V}_e)$ ， $n_e = n_i$ であり， M ， m はそれぞれイオン，電子の質量である。また，電子と他の粒子との衝突振動数は

$$\nu = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \eta \quad (5)$$

とし， η はプラズマの抵抗率， ω_p はプラズマ角振動数である。円柱座標系 (r, θ, z) で，

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \text{ として解くと，}$$

$$\mathbf{E}_\theta = a J_1(k_\perp r) \quad (6)$$

$$B_z = i a N J_0(k_\perp r) \quad (7)$$

$$J_0 = \frac{B_0}{4\pi\rho c} (N^2 - 1) a J_1(k_\perp r) \quad (8)$$

となる。ここで、 J_0 、 J_1 は第一種のベッセル函数、 B_0 はz方向の一定磁場、 N は磁場に垂直方向（ r 方向）の電磁波の屈折率で、波数 $k_\perp$ との関係は

$$\begin{aligned} N^2 &= \left(\frac{k_\perp c}{\omega} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2 (Q + \omega_p^2)}{-\omega^2 \omega_{ce}^2 + Q(\omega_p^2 + Q)} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで

$$Q = \omega_{ce} \omega_{ci} - \omega^2 + i\omega\nu$$

$$\omega_{ce} = \frac{e B_0}{m c}, \quad \omega_{ci} = \frac{e B_0}{M c}$$

$\omega_p^2 \ll |Q|$ の領域では

$$N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2 Q}{Q^2 - \omega^2 \omega_{ce}^2} \quad (10)$$

となる。

(9)式は一般に、コイルによって励起されたプラズマ中を伝搬する磁場に垂直な電磁波の分散式であり、高周波領域では異常波の分散を与える。

次に、(6)~(8)式の定数 a をコイルの境界条件（コイルの内側のシーシは無視するとする）によりもとめると⁵⁾ $r = R$ において

$$-r \times (\mathbf{B}^{(I)} - \mathbf{B}^{(II)}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^\# \hat{\theta} \quad (11)$$

但し、 $\mathbf{J}^\#$ はコイルの単位長さあたりの電流密度である。

これより

$$a = i \frac{4\pi}{c} J^\# \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} NR\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right) - N H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right) J_0\left(\frac{\omega}{c} NR\right)} \quad (12)$$

となる。但し $H_y^{(2)}$ は第二種のハンケル関数である。

このようにコイルによって励起された波はプラズマ中には異常波として、コイルの外側には真空中の電磁波として伝搬していくが、そのエネルギーはポインティングベクトルを計算して

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} |I_\theta|^2 R_0 \quad (13)$$

となる。但し $I_\theta = L J^\#$ (L はコイルの巾) であり

$$R_0 = \frac{8\pi^2 R}{CL} R_e \left[-i \frac{J_1\left(\frac{\omega}{c} NR\right) H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right)}{J_1\left(\frac{\omega}{c} NR\right) H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right) - N H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right) J_0\left(\frac{\omega}{c} NR\right)} \right] \quad (14)$$

である。

図2 異常波の屈折率 $N = N_r + i N_i$ と

周波数の関係

$$n_e = 1 \times 10^8 \text{ cm}^{-3},$$

$$f_c \text{ (衝突振動数)} = 5 \times 10^6 \text{ Hz}$$

図3 異常波の屈折率と周波数の関係

$$n_e = 7.5 \times 10^8 \text{ cm}^{-3},$$

$$f_c = 1 \times 10^6 \text{ Hz}$$

3 計算結果

まず(9)式からとまる屈折率の実数部分(N_r)と虚数部分(N_i)の例を図2と図3に示す。但し、実験と将来比較する為に、 $f = 250 \text{ MHz}$ として計算した。これらの図からわかるように $f \sim f_h = (f_{ce}^2 + f_p^2)^{1/2}$ の近くでするとい吸収が期待される。

次に(13)式よりとまる吸収エネルギーの例を図4に示す。この図より、コイルによって励起された電磁波が $f = f_h$ 近くでよく吸収されていることがわかり、吸収率は電子の衝突振動数に依存している。図5は同じ吸収エネルギーを (f_h/f) の関数として示したものである。

次に、このアップーハイブリッド近くでの吸収エネルギーの最大値と電子の衝突振動数 $f_c = \nu$ の関係をもとめると図6のようになる。

この図6より、次のようなことがわかる。まずA, B, Cより最大吸収エネルギーは、ある衝突振動数 ν_0 を境に衝突振動数にほぼ比例する部分と反比例する部分とにわかれる⁶⁾。従ってこの特徴的な周波数 ν_0 が何によって決まるかは、大変興味深い点であるが、A, Bの条件の時はローハイブリッド周波数 $\sqrt{\omega_{ce} \omega_{ci}}$ 近くになっている。これは、電子が磁場を横切れない為に、電子の有効衝突振動数が $\sqrt{\omega_{ce} \omega_{ci}}$ 近くになったときエネルギーの吸収或は熱化が最大になる

図4 異常波の吸収エネルギーと周波数の関係

$$A: f_c = 5 \times 10^6 \text{ Hz}$$

$$B: f_c = 1 \times 10^6 \text{ Hz}$$

図5 異常波の吸収エネルギーと周波数の関係

$$f_c = 1 \times 10^5 \text{ Hz} ,$$

$$B = 70 \text{ G}$$

図6 吸収エネルギーの最大値と電子の衝突振動数の関係

プラズマの密度は A: $1 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$, B: 5×10^8

C: 7.50×10^8 , D: 7.504×10^8

ためと思われる。しかしながら，同図のC，Dよりわかるように，プラズマ密度を少し変化させただけで，急速に $\nu_0 \rightarrow 0$ に向かう。これは，コイル（半径 $R = 4.5 \text{ cm}$ ）の幾何学的な形によるキャビティー共鳴にたことが起きる為と思われる。⁷⁾

(9)式からわかるように，全インピーダンスは結局プラズマのインピーダンス

$$Z_p = - \left(\frac{E_\theta}{B_z} \right)_{r=R-0} = \frac{i J_1(k_\perp R)}{N J_0(k_\perp R)} \quad (15)$$

と，コイルの外側のインピーダンス（真空側）

$$Z_v = \left(\frac{E_\theta}{B_z} \right)_{r=R+0} = \frac{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right)}{i H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} R\right)}$$

$$= 1.41 - i \cdot 1.51 \quad (16)$$

有限プラズマ中での異常波の励起と吸収

の並列回路と等価である。従って入力パワーはプラズマ側と真空側へのエネルギーに分割して

$$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{dW}{dt} \right)_p + \left(\frac{dW}{dt} \right)_v$$

$$\propto P_p + P_v \quad (17)$$

ここで

$$P_p = |I_0|^2 \frac{|z_v|^2}{|z_p + z_v|^2} R_e(z_p) \quad (18)$$

$$P_v = |I_0|^2 \frac{|z_p|^2}{|z_p + z_v|^2} R_e(z_v) \quad (19)$$

である。真空側のインピーダンスは $\sim 10^{12} \Omega$ であるから、だいたいの場合(18)式に従って、パワーはプラズマ中に入るが、しかし、次の条件を満足する波数

$$k_{\perp} = 0.52, 1.22, 1.92, 2.62 \dots \dots \dots (\text{cm}^{-1}) \quad (20)$$

図7 幾何学的共鳴による吸収エネルギーの変化

図8 アップーハイブリッド近くでの吸収エネルギーの最大値とプラズマ密度の関係

に対しては、 $J_0(k_\perp R) = 0$ となり、プラズマのインピーダンスは無限大となる ($R_e(k_\perp) \gg \text{Im}(k_\perp)$ として)。定電流の R. F. を仮定しているから、この場合みかけ上入力パワーは (4) 式に従って大きくなる。しかし、これは幾何学的共鳴によるものであり、プラズマには入らない。以上の様子を示したのが図 7 であり、 $f = f_h$ 近くでの吸収エネルギー及び屈折率の実数部分を拡大したものである。例えば、衝突振動数が 100 kHz の場合、 N_r が最大のところよりも、 $k_\perp = 0.52$ のところでの吸収が大きくなっているが、これは上記の効果によるものである。また $f_c = 5$ MHz では幾何学的な共鳴点がない為に、このようなことは起きていない。図 8，図 9 は、(4) 式の吸収エネルギーの総和の最大値、及びそれに対応する衝突振動数をプラズマ密度の関数としてもとめたものである。これらの図で $f_c = 0$ に対応する最大吸収エネルギーは、完全に幾何学的なものである。

次に、図 10，図 11 に、いろいろな条件での、電界、磁界の大きさ、及びそれらの位相のおくれを r の関数として示した。図 8 中の a に対する位相差はゼロになっており定在波であることがわかる。

図 9 図 8 に対応する衝突振動数

図 10 電界 (θ 方向) の大きさとコイルの位置に対する位相のおくれ。a, b, c は図 8 のそれらに対応。d は $f_c = 0.14 \times 10^7$ Hz, $N_e = 0.7048 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$, $f_{ce}/f = 0.3024$ の条件のとき、コイルに 1 A/cm の電流を流したとき、 $|E_\theta| \times 300$ (V/cm) の電界になる。

図1.1 磁界(z方向)の大きさとコイルの位置に対する位相のおくれ, 条件は図1.0と同じ, $J^* = 1 \text{ A/cm}$ に対しては縦軸の単位はガウス

4. ま と め

コイルによる異常波の励起及び吸収が可能で，アップーハイブリッド近くの密度のところでエネルギーはよく吸収される。従って， r 方向に密度勾配があるとき，どこかで共鳴し，エネルギーが吸収され，モード変換が起きるであろう。しかし，共鳴には幾何学的なものも可能であり注意を要する。

参 考 文 献

- 1) P.E.Vandenplas, et al., Plasma Physics, 12, 391 (1970).
- 2) V.P.Bhatnagar, et al., Plasma Physics, 18, 540 (1976).
- 3) C.R.Skipping, M.E.Oakes and H.Schlüter, Phys. Fluids, 12, 1886 (1969).
- 4) D.E.Hasti, M.E.Oakes and H.Schlüter, J.Plasma Phys., 4, 787 (1970).
- 5) T.H.Stix, 'The Theory of Plasma Waves', McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
- 6) 川村孝式，核融合研究 第35巻第6号，454 (1976)
- 7) H.Shimabara, S.Kiyama, K.Ogawa and K.Kato, J.Phys. Soc. Japan 24, 604 (1968).