トロイダル RFP における抵抗性フルートモードの安定条件

押 山 宏

京 都 工 芸 繊 維 大 学

(昭和55年12月5日受理)

Stability Condition of Resistive Flute Mode in Toroidal RFP

Hiroshi Oshiyama

(Received December 5, 1980)

Abstract

The stability condition of reversed field pinch (RFP) with respect to the resistive flute mode (g-mode) is obtained by reexamining the Mikhajlovskij's criterion.

Axialsymmetric toroidal RFP has stability effect near the point of field reversal due to the displacement of the center of the magnetic surface relative to the magnetic axis.

The permissible maximum beta value of plasma having rather small conductivity is 4.0 to 5.5 % near field reversal, or 6.2 to 8.6 % on magnetic axis. In taking account of the high conductivity corresponding to 5 eV, beta value of 20% can be permitted with the growth rate less than the field diffusion rate.

§ 1. はじめに

逆磁界ピンチ (RFP) は磁力線の強いシアーと磁力線のピッチの反転及び金属壁による安定化効果により高い β 値のプラズマを安定に閉じ込めうるとされており、例えば理想MHDモデルでは $30 \sim 40\%$ ¹⁾ は可能である。しかしながら抵抗性ティアリングモードに対しては β は $10 \sim 20\%$ 程度²⁾ に押えられ、さらに最も危険な抵抗性フルートモード (g-mode) の安定化のためには粘性の効果を考慮しても磁気軸上で 5% 程度、平均で 10% 程度であると報告されている。³⁾

ここではMIKHAILOVSKIJ⁴⁾ によって導かれたトーラスプラズマのフルートモードに対する安定条件をRFPに適用し β の最大値を推定した。

その結果磁気面の中心と磁気軸をずらすことにより (トーラス効果) RFPでは $B_z \simeq 0$ の付近でフルートモードに対する安定化作用が生じ $\beta \simeq 4.0 \sim 5.5\%$, (軸上で $\beta = 6.2 \sim 8.6\%$), 平均として $12 \sim 15\%$ の β 値のプラズマを安定に閉じこめ得ることができる。また $P' = -1$ 程度のシアーがあればフルートの生長時間を磁界の拡散時間よりゆるやかなものに押さえ得ることが判明した。

§ 2. フルートモードの安定条件

完全導体プラズマの仮定ではフルートモードに対する安定条件は直すぐなプラズマの場合 Suydam 条件

$$\frac{1}{4} \left(\frac{q'}{q} \right)^2 + \frac{2p'}{aB_s^2} > 0 \quad (2-1)$$

があり、一方トロイダルプラズマの場合 Shafranov - Yurchenko の安定条件⁵⁾

$$\frac{1}{4} \left(\frac{q'}{q} \right)^2 + \frac{2p'}{aB_s^2} (1 - q^2) > 0 \quad (2-2)$$

があるが、RFPでは $B_s \simeq B_\theta$ なので (2-2) 式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu'}{2\mu} - \frac{2p'}{B_\theta^2} \frac{a}{R} \xi' \right)^2 + \frac{2p'}{aB_s^2} - \frac{p'}{B_\theta^2} \kappa' - \frac{1}{2} \frac{a^2}{R^2} \left(\frac{2p'}{B_\theta} \right)^2 \frac{B^2}{B_s^2 B_\theta^2} \\ + \frac{a}{R} \xi' \left(\frac{2p'}{B_\theta B_s} \right)^2 > 0 \quad (2-3) \end{aligned}$$

が安定条件としてより一般的である。

(2-1) 式では円柱座標 (a, θ, z) が, (2-2), (2-3) 式では擬トロイダル座標 (a, θ, φ) が取られている。上式において $q = a B_s / R B_\theta$ (安全係数), $\mu = 1/q$, プライム $'$ は a に関する微分, B_s と B_θ は夫々縦磁界及びポロイダル磁界, $\xi(a)$ は磁気面中心の磁気軸からのずれ, $U = dV/d\Phi$, $-\kappa' = U' / U + B_s' / B_s$, Φ は縦方向磁束, V は磁気面内の体積, R は磁気軸の曲率半径である。

(2-1) 式が成立すれば RFP では (2-2), (2-3) は自動的に成立する。

次に導電性無限大の仮定が成立しない抵抗性のプラズマにおいてはフルートモードに対して, 特にトカマクの条件で

$$q^2 > 1 - q q' R \xi' \quad (2-4)$$

$$\text{但し} \quad R \xi' = \frac{q^2}{a^3} \int_0^a \frac{a^3}{q^2} \left(1 - \frac{2 a p'}{B_\theta^2} \right) da$$

がある。⁴⁾

RFP では $B_s \simeq B_\theta$ であるから (2-4) 式は安定条件として不適當で厳密には MIKHAJLOVSKIJ の論文に見られるトロイダルプラズマに対する一般化条件式⁴⁾

$$W_M - \frac{1}{A_0} \left(A_1 - A_0 \frac{C_1}{C_0} \right)^2 + \mu' \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{C_1}{C_0} \right) > 0 \quad (2-5)$$

を採用する方が適切である。

§ 3. RFP における抵抗性フルートモードの安定条件

MIKHAJLOVSKIJ に従って考察する。⁴⁾

基礎方程式は

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3-1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3-2)$$

$$d(p\rho^{-\gamma})/dt = 0 \quad (3-3)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \sigma \quad (3-4)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3-5)$$

である。

座標系は曲線座標 (a, θ, φ) をとる。 $a = \text{const}$ は磁気面を表わし、方位角変数 θ 、 φ は磁気面上で磁力線が直すぐな様にとられている。 R は磁気軸の曲率半径である。磁界と電流密度の反変成分は

$$B^1 = 0, \quad B^2 = \chi' / 2\pi\sqrt{g}, \quad B^3 = \Phi' / 2\pi\sqrt{g} \quad (3-6)$$

$$j^1 = 0, \quad j^2 = \left[I' - \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} \right] / 2\pi\sqrt{g}, \quad j^3 = \left[j' + \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right] / 2\pi\sqrt{g} \quad (3-7)$$

である。

χ と Φ は磁気面内の横方向及び縦方向磁束， I と J は横方向及び縦方向電流を示している。

$$J = \int_0^{2\pi} B_2 d\theta, \quad I = \int_0^{2\pi} B_3 d\varphi \quad (3-8)$$

この J と I を使い平均方位角方向磁界 B_θ ，平均縦方向磁界 B_s を

$$B_\theta = J / 2\pi a, \quad B_s = I / 2\pi R \quad (3-9)$$

と定義する。圧力平衡条件は

$$p' V' = I' \Phi' - J' \chi' \quad (3-10)$$

となる。ここに V は $a = \text{const}$ なる磁気面内の体積， R は磁気軸の曲率半径である。第1図は座標系を示す。座標系の metric は計算されていて例えば

$$g_{11} = 1 + 2\xi' \cos \theta + \xi'^2 + (a^2 \lambda'^2 - 2\xi' \lambda - 2\xi' \lambda' a) \sin^2 \theta$$

$$g_{22} = a^2 (1 + 2\lambda \cos \theta + \lambda^2 / 2 + \dots)$$

$$g_{33} = R^2 (1 - ka \cos \theta - k\xi + ka\lambda \sin^2 \theta)^2 \quad (3-11)$$

$$\sqrt{g} = a R [1 - k \xi - k a \xi' / 2 + (\lambda + \xi' - k a) \cos \theta]$$

などで与えられる。

FIG.1 COORDINATE SURFACES

さて平衡状態からの変位としてベクトル ξ をとると $\mathbf{v} = \partial \xi / \partial t$ を使い

$$\left(1 + \frac{\gamma p}{B^2} \hat{D}\right) \operatorname{div} \xi = \mathbf{B} \cdot \nabla X_{//} + \frac{X_{\perp}}{p} \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha \quad (3-12)$$

$X_{//}$, $X_{\perp}$ は平衡状態からの摂動量の成分, $\hat{D} = 1 - \frac{g''}{\sigma \gamma} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{a}^2}$ である。詳しくは文献(4)を参照されたい。

ベクトル ξ の反変成分 ξ^1 をフーリエ変換し ξ_k とすると，方程式

$$\frac{\gamma^\sigma}{C_0} (\mu')^2 \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial k_x^2} - \xi_k \left[W_M - \frac{1}{A_0} (A_1 - A_0 \frac{C_1}{C_0})^2 + \mu' \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{C_1}{C_0} \right) + \frac{k_x^2 \gamma^2}{m} \Lambda \right] = 0 \quad (3-13)$$

を得る。これは振動方程式である。これから抵抗性フルートモードに対する安定条件として

$$\frac{1}{4} \frac{\gamma \sigma}{C_0} \mu'^2 + W_M - \frac{1}{A_0} \left((A_1 - A_0 \frac{C_1}{C_0})^2 + \mu' \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{C_1}{C_0} \right) + \frac{k_x^2 \gamma^2}{m^2} \Lambda \right) > 0$$

(3-14)

を得る。但し

$$W_M = W^{(0)} - A_2 + \frac{A_1^2}{A_0} - \mu' \frac{A_1}{A_0}$$

$$W^{(0)} = \frac{1}{\Phi'^2} (p' v'' + j' \chi'' - i' \Phi'') - \mu' \alpha^{(0)} - \left(\frac{2\pi p'}{\Phi'} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{g}}{B^2} \right)$$

$$\mu' = x' / \Phi' , \quad \alpha = j \cdot B / B^2$$

$$A_0 = \left(\frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{g} B^2}{g_{11}} \right)^{(0)}$$

$$A_1 = \left(\frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \left(\alpha_0^{(1)} \frac{\sqrt{g} B_0^2}{g_{11}} \right)^{(0)}$$

$$A_2 = \left(\frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \left(\alpha_0^{(1)} \alpha_0^{(1)} \frac{\sqrt{g} B^2}{g_{11}} \right)^{(0)}$$

$$C_0 = \left(\frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \left(\alpha_0^{(1)} \sqrt{g} B^2 \right)^{(0)}$$

$$C_1 = \left(\frac{2\pi}{\Phi'} \right)^2 \left(\alpha_0^{(1)} \alpha_0^{(1)} \sqrt{g} B^2 \right)^{(0)}$$

Λ = 文献(4)の中の(4.20)式

$(\dots)^{(0)}$ は任意の物理量 $(\dots)$ の θ と φ に関する平均操作をとることを意味する。

また σ は導電率, γ は摂動の成長率である。

(3-14) 式で第 1 項と最後の項が無視出来る場合には

$$W_M - \frac{1}{A_0} \left(A_1 - A_0 \frac{C_1}{C_0} \right)^2 + \mu' \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{C_1}{C_0} \right) > 0 \quad (2-5)$$

となる。

これは MIKHAILOVSKIJ の論文の第 (5.2) 式に相当する。さて (2-5) 式を RFP の条件で計算するとその結果は

$$\begin{aligned} & \frac{2p'}{B^2} \frac{P'}{P} \xi' + \frac{a}{R} \xi'^2 \left(\frac{2p'}{B_\theta B_s} \right)^2 + \frac{R}{a^2} \frac{2p'}{B_s^2} \frac{B_\theta^2}{B^2} + \frac{2p'^2}{B^2 B_\theta^2} \frac{a}{R} - \frac{2p'}{R B^2} \\ & - \frac{2p'}{B^2} \frac{\xi'}{a} + \frac{2p'}{B^2} \xi' \frac{B'_\theta}{B_\theta} - \frac{1}{2} \frac{a}{R} \left(\frac{2p'}{B_\theta B_s} \right)^2 + \xi' \left(\frac{2p'}{B_s B} \right)^2 - \frac{a}{R} \frac{2p'^2}{B_s^4} \frac{B^2}{B_\theta^2} \\ & - 2\xi' \frac{a}{R} \frac{(2p')^2}{B_s^2 B_\theta^2} - \frac{a^2}{R^2} \frac{(2p')^2}{B_s^4} \frac{B^2}{B_\theta^2} - \frac{P'}{P} \xi' a \frac{2p'}{B^2} \frac{B_\theta}{B_s} > 0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

となる。

上式において第 3 項が不安定の原因となる一番大きな項であり、それを打消す安定な項はプラズマの全領域に亘って存在しない。しかし $B_s \sim 0$ 付近で安定化作用が生じる。即ち上式を逆磁界配位におけるピッチ $P = a B_s / B_\theta$ の零近辺で成立つ条件式に書き改めると

$B_s \sim 0$, $B \sim B_\theta$ を使い

$$p' \left(\frac{R}{a^2} \frac{B_\theta^2}{B_s^2} - \frac{a}{R} \frac{p'}{B_s^4} B_\theta^2 - \frac{a^2}{R^2} \frac{2p'}{B_s^4} B_\theta^2 - p' \xi' \frac{B_\theta^3}{a B_s^3} \right) > 0 \quad (3-17)$$

となる。

一般に $p' < 0$ のもとでは $p' \sim -p/a$ を仮定すると

p の上限は

$$\frac{2p}{B^2} < \left(P' \xi' \frac{B_s}{B_\theta} - \frac{R}{a} \frac{B_s^2}{B_\theta^2} \right) / \left(\frac{a}{2R} + \frac{a^2}{R^2} \right) \quad (3-18)$$

で与えられる。

(3-18)式が満されておれば抵抗性フルートモードに対し $B_s \sim 0$ 付近で安定である。

(3-18)式を使い最大ベータ値 β_{MAX} を推定する。

例1. $R/a=3$, $P'=-2$, $\xi'=0.2$ では $B_s/B_\theta \simeq -0.05$ で

$$\beta_{MAX} = \frac{2p}{B^2} = 0.045 \quad (\text{軸上で} 6.2\%)$$

例2. $R/a=4$, $P'=-2$, $\xi'=0.2$ では $B_s/B_\theta \simeq -0.05$ で

$$\beta_{MAX} = 0.054 \quad (\text{軸上で} 8.6\%)$$

安定なベータは軸上で6.0～8.6%は期待出来る。

次に(3-14)式の第1項を評価する。勿論 σ が大きい程安定化は強い。

(3-16)式の第1項, 第3項, 第13項との大小を比べて

$$\frac{1}{4} \gamma \sigma \mu'^2 \frac{1}{C_0} + \frac{2p'}{B^2} \frac{P'}{P} \xi' + \frac{R}{a^2} \frac{2p'}{B^2} \frac{B_\theta^2}{B_s^2} - \frac{P'}{P^2} \xi' a \frac{2p'}{B^2} \frac{B_\theta}{B_s} > 0 \quad (3-19)$$

なる安定条件を得る。或いは

$$\frac{2p'}{B^2} \left[\frac{1}{2p'} \frac{1}{4} \gamma \sigma P'^2 \frac{R}{a^3} \frac{B_\theta^4}{B_s^2} + \frac{P'}{P} \xi' + \frac{R}{a^2} \frac{B_\theta^2}{B_s^2} - \frac{P'}{P^2} \xi' a \frac{B_\theta}{B_s} \right] > 0 \quad (3-20)$$

$p' = -p/a$ を使い結局

$$\frac{2p}{B_\theta^2} < \frac{1}{4} \gamma \sigma P'^2 \left(1 + \frac{a^2}{R} \frac{B_s^2}{B_\theta^2} \frac{P'}{P} \xi' - \frac{a^2}{R} \frac{B_s}{B_\theta} \frac{P'}{P^2} \xi' a \right)^{-1} \quad (3-21)$$

が安定条件となる。

トロイダル RFP における抵抗性フルートモードの安定条件

RFP においては $P' = -1$ は十分取りうるので上式右辺の大きさは

$$\frac{1}{4} \gamma \sigma P'^2 \simeq \frac{1}{4} 2\pi f \cdot 4\pi 10^{-7} \sigma_{\text{MKS}} = 2\pi^2 f 10^{-7} \sigma_{\text{MKS}}$$

$$T_e = 5 \text{ eV} \text{ で } \sigma_{\text{MKS}} \simeq 10^4 \text{ なので } f = 50 \text{ Hz} \text{ として } \frac{1}{4} \gamma \sigma P'^2 \simeq 1$$

従って T_e は 5 eV 程度あればベータが高くても磁界の拡散時間 $\mu_0 \sigma a^2$ (MKS 系) より遅い生長時間にフルートモードは押さえることが出来そうである。

§ 4. 結 言

RFP においてベータの上限を決めている抵抗性フルート不安定性はトーラス効果によってある程度緩和され、その結果高いベータ値 (軸上で 6.0 ~ 8.6 %) のプラズマを安定に閉じ込めうる可能性があると思われる。

一方 Hosking と Robinson³⁾ は抵抗性フルートモードに対しトーラス効果は考えず、粘性効果を入れて軸上の β 値として 5 % の安定な配位を見つけているのでさらにトーラス効果を考えるとベータは上がるかもしれない。

また (3-21) 式に従い、導電率が低くても $P' = -1$ 程度のシアーがあればフルートの生長時間は磁界の拡散時間よりゆるやかに押さえることが出来る。

RFP の利点の 1 つとしてアスペクト R/a が自由であると主張されているが、 $R/a = 2.5 \sim 5$ 程度でトーラス効果を利用した実験を試みるのもベータ値を上げる 1 つの方策とも思われる。

さらに slow モードの SET-UP で緩和過程を上手に使い逆磁界配位を作り出すいくつかの試みがなされており^{6~8)}、また電流の立ち上げ PHASE でも比較的安定な RFP が得られている⁹⁾ ことなどから、トカマク程度の定常プラズマの発生は可能と思われる。

参 考 文 献

- 1) D.C.Robinson: Plasma Physics, 13, 439 (1971)
- 2) D.C.Robinson: Nuclear Fusion, 18, 939 (1978)
- 3) R.J.Hosking and D.C.Robinson: Proc. 9th Europ Conf. on controlled Fusion, BP 6 (1979)
- 4) A.B.Mikhajlovskij: Nuclear Fusion, 15, 95 (1978)
- 5) V.D. Shafranov and E.I. Yurchenko: Soviet Physics. JETP, 26, 682 (1968)
- 6) DENSOKEN Group: on TPE-1R(M), at JAPAN-O.K. Joint work Shop on RFP, (1980)
- 7) T.Ohkawa: OHTE, GA Publication (1980)
- 8) H.Oshiyama: Tech. Rep. Inst. Atomic Energy, Kyoto Univ. No 181, (1980)
- 9) H.Oshiyama: Report at JAPAN-U.K. Joint work shop on REP (1980)