有限長イオンビーム・プラズマ系における不安定低周波Ⅱ

中村定男, 湯山哲守, 久保 熙

(京都大学教養部)

(1981年6月27日受理)

Low Frequency Unstable Waves in a Bounded Ion Beam-Plasma System Ⅱ

Sadao Nakamura*, Tetsumori Yuyama* and Hiroshi Kubo*

(Received June 27, 1981)

One dimensional fluid equations are examined together with Poisson's equation for an ion beam-plasma system by taking the boundary conditions into account, as was done by Pierce¹⁾ for an electron beam. A dispersion relation obtained shows that an ion acoustic wave and the beam waves split into many unstable new modes even if they are stable in an unbounded system. Their frequencies as well as the growth rates depend largely on the length L of the system. The frequencies decrease monotonously with increasing the value of $\omega_{pi}L/V_0$. Meanwhile, the growth rates appear at certain values of $\omega_{pi}L/V_0$, and they attain to their maximum values at respective different ones and then decrease gradually. The dependences of their frequencies and the growth rates on the drift velocity V_0 and the number density N_b of the beam are also examined.

§ 1. はじめに

自由空間中に、ビームのみが存在する場合これに励起されるファースト及びスロー波は安定である。しかし有限系中で両端のポテンシャルが零に固定されると零周波数及び有限周波数の不安定波が生じる^{1,2)}。この零周波数の不安定波はダブルレイヤー形成³⁾の一因として取り上げられている⁴⁾。室内において実験的にダブルレイヤーを発生させるためには、ビームの存在と両端のポテンシャルを固定⁵⁾する事が必要とされているためである。同様な不安定が、ビームがプラズマ中を通過する場合にも起る。つまり通常のビーム・プラズマ相互作用による不安定が発生しない条件下でも系を有限とし両端のポテンシャルを零に固定すると波は不安定になる。この不安定の発生機構は境界での反射による負帰還ではなく無限大系でビームのスロー波とイオン

* Physics Laboratory, College of General Education, Kyoto University

音波の分が交わる場合に生じると同じ帰還が選択的に存在が許された進行波間志に, ある程度の位相関係が保持されるために生じるものと思われる。

前回⁶⁾は流体方程式から得られたビーム・プラズマの分散式の波数四根のうちイオンビームのスロー波とイオン音波の分枝にのみ注目し境界条件をゆるくとして不安定波の発生を調べた。今回はこの四根共に同時に, 境界条件を満足するような不安定な根があるかどうかを調べた。結果は以下で述べるように, 前回とほぼ同様の特性を有する多くの不安定根が見い出された。この事から無限大イオンビーム・プラズマ系の分散式においては安定な条件下でも実際の有限な系ではほとんどの場合波は不安定になるものと思われる。

§ 2 において基礎方程式及びその一般解を与え無限大系の分散式及び積分定数が境界条件を満足すべき条件から有限系に対する分散式を求める。§ 3 においてこれ等分散式の数値解を境界長, ビーム密度及び速度に対して与え不安定波の特性を調べる。§ 4 において吟味及び結論を述べる。

§ 2. 分散式の導出

一次元のイオンビーム・プラズマ系を次の線形化された流体方程式及びポアソン方程式を用いて記述する。

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + V_{j0} \frac{\partial n_j}{\partial z} = -n_{j0} \frac{\partial V_j}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} + V_{j0} \frac{\partial V_j}{\partial z} = -\frac{q_j}{m_j} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\gamma_K T_j}{m_j n_{j0}} \frac{\partial n_j}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi \sum_j n_j q_j \quad (3)$$

$j = i, e, b$ はそれぞれイオン, 電子及びビームを表わす。プラズマイオンとイオンビームは冷いと仮定する ($T_i = T_b = 0$)。更にイオンはドリフトしていない ($V_{i0} = 0$) とし電子のそれを平均熱速度 $V_{Te} = \sqrt{k T_e / m_e}$ で近似する。 γ は比熱の比で一次元電子に対しては 3 である。摂動量の時間変化を $\exp(-i\omega t)$ に比例するとするとビーム密度 n_b , 電子密度 n_e は次の式より求められる ($m_i = m_b, \quad q_i = q_b = -q_e = e$)。

有限長イオンビーム・プラズマ系における不安定低周波 II

$$\frac{\partial^2 n_b}{\partial z^2} - \frac{2i\omega}{V_0} \frac{\partial n_b}{\partial z} + \frac{\omega^2}{V_0^2} \left(\frac{\omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} - 1 \right) n_b = \frac{\omega^2}{V_0^2} \frac{\omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} n_e \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 n_e}{\partial z^2} + \frac{i\omega}{V_{Te}} \frac{\partial n_e}{\partial z} - \frac{\omega^2}{2V_{Te}^2} \left(\frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} - 1 \right) n_e = -\frac{\omega^2}{2V_{Te}^2} \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} n_b \quad (5)$$

ここで V_0 はビーム速度, ω_i, e, b はそれぞれのプラズマ振動数である。上式が $\exp(i\lambda z)$ 型の解を有するとすると λ の満足すべき条件は次の式で与えられる。

$$\left\{ \lambda^2 - \frac{2\omega}{V_0} \lambda + \frac{\omega^2}{V_0^2} \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) \right\} \left\{ \lambda^2 + \frac{\omega}{V_{Te}} \lambda - \frac{\omega^2}{2V_{Te}^2} \left(1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) \right\} + \frac{\omega^4}{2V_0^2 V_{Te}^2} \frac{\omega_e^2 \omega_b^2}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2} = 0 \quad (6)$$

この4次方程式の根を λ_m ($m=1 \sim 4$) とおくと(4), (5)式より得られる n_b に対する4階の微分方程式の解は次の形になる。

$$n_b = \sum_{m=1}^4 A_m e^{i\lambda_m z - i\omega t} \quad (7)$$

A_m は, z に依存しない定数である。この式を(4)式に代入して n_e を, 更に関係式,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{4\pi q \omega^2}{\omega^2 - \omega_i^2} (n_b - n_e) \quad \text{より } \varphi \text{ を求めることが出来る。}$$

$$n_e = \sum_m A_m e^{i(\lambda_m z - \omega t)} \left\{ 1 - \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{\omega_b^2} \left(1 - \frac{\omega}{\lambda_m V_0} \right) \frac{\lambda_m^2 V_0^2}{\omega^2} \right\} \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{4\pi q V_0^2}{\omega_b^2} \sum_m A_m e^{i(\lambda_m z - \omega t)} \left(1 - \frac{\omega}{\lambda_m V_0} \right)^2 + C_1 z + C_2 \quad (9)$$

6ケの定数 A_m, C_1, C_2 は境界があるとお互い任意ではない。同様の解が他の摂動量に対しても得られるがこれ等は基礎方程式より上記の根を使って求められ独立ではない。したがって係数決

定には上記3式で十分である。

境界条件として $z=0$ 及び $z=L$ ですべての摂動量を零とする。すると n_b, n_e, φ が恒等的に零でないためには係数のデターミナントが零でなければならない。

$$\begin{aligned} & y_1 x_1^2 \{ x_2^2 (y_4 - y_1) + x_3^2 (y_2 - y_4) + x_4^2 (y_3 - y_2) \} \\ & + y_2 x_2^2 \{ x_1^2 (y_3 - y_4) + x_3^2 (y_4 - y_1) + x_4^2 (y_1 - y_3) \} \\ & + y_3 x_3^2 \{ x_1^2 (y_4 - y_2) + x_2^2 (y_1 - y_4) + x_4^2 (y_2 - y_1) \} \\ & + y_4 x_4^2 \{ x_1^2 (y_2 - y_3) + x_2^2 (y_3 - y_1) + x_3^2 (y_1 - y_2) \} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $x_m = \frac{\lambda_m V_0}{\omega} - 1$, $y_m = \exp(i \lambda_m L)$ である。任意の境界長 L , ビーム速度 V_0 , ビーム密度等に対する有限系の波動の特性は(6)式と(10)式の連立解より決定される。したがって一般に(6)式の波数 λ は複素量となり実数とする分散関係はいくらか変更を受けることになる。

次章では実際のパラメーターに対し λ を実数とした時, (6)式で不安定根が得られない条件下でも(6), (10)式の連立解から不安定根が得られる事を数値的に示す。

§ 3. 分散式の特性

無限大のビーム・プラズマ系の分散式

(6)より得られる分散関係は, 波数 λ ($=k$) を実数として与えた場合低周波領域では1図のようになる。用いたパラメーターの大きさはヘリウムプラズマ・ヘリウムイオンビームを想定しビーム・プラズマ不安定が励起されないよう

$$\omega_b^2 / \omega_i^2 = 0.15, V_0 / V_{Te} = 0.03$$

中性化条件より $\omega_e^2 / \omega_i^2 = (1 + \omega_b^2 / \omega_i^2) m_i / m_e = 8440$ に選んだ。図から明らかな如く3ケの分枝はそれぞれイオン音波, ビームのスロー波及びファースト波である。(10)式において

第1図 低周波領域の分散関係 ((6)式より) 横軸実数の k に対し不安定波はない場合を示す, a; イオン音波, s; スロー波, f; ファースト波, $\omega_b^2 / \omega_i^2 = 0.15, v_0 / v_s = 2.5$ ($T_e = 2.2\text{eV}, V_0 = 7V$).

用いる λ_4 を与える分枝は $-k$ 側のイオン音波の分枝に対応する。

2 図は分散式(6)式と(10)式より得られる周波数 ω の実部 ω_r 実線 と成長率 γ 破線

を連続的な境界長 L に対して示したものである。固定された L に対しては L 等間隔にいくつもの成長するモードが現われる。これ等各モードの周波数は $L=\infty$ では零に $L=0$ では $\omega/\omega_i=1$

に漸近し、 L の増大と共に単調に減少する。これに比して各モードの成長率は互いに異なる特定の L で最高値を示す。成長率 γ_0 に対応する波の周波数は $\omega_0=0$

で図の横座標にほとんど一致している。これはビームのみの場合のピアースモードに対応するものである。図には低周波数側より 5 ケのモードのみが示されている。 γ_4 のモードを別にすれば

第3図 ビーム密度に対する周波数及び成長率の変化。成長率は各モード共特定の密度でピークをもっている。 $\omega_i L/v_0=20$

第2図 境界の長さ不安定モードの周波数及び成長率。波は境界のために多くの不安定なモードに分離する。上段は周波数の実部、下段はそれぞれのモードに対応する成長率パラメーターは1図に同じ。

成長率より各モードの強度は境界長 L の増大と共に低次から高次のモードへ移る。このように1図と同じパラメーターであるにもかかわらず境界での摂動量が零に固定されるといふのは無限大系に対する著しい特徴である。

3 図はビーム速度と境界長を固定しイオンビームの密度のみを変化した場合の各モードの振舞いを示したものである。実部はほとんど変化しないが成長率はモードによって異なる密度で急に増大する。このうち γ_4 が増大する所は分散式(6)の方ではビーム・プラズマ相互作用による不安定が発

生ずる密度に対応している。しかし γ_2, γ_3 は分散式(6)で特に変化のない密度で急に増大している。したがってビーム密度を増加した場合にこのような顕著な変化が実験的に見いだされるならば、系の有限性が効いていると思われる。又密度を下げてほとんど同じ大きさの成長率が維持されることが注目される。

4 図はビーム密度及び境界長を固定しビーム速度を変えた場合の周波数変化を示したものである。ビーム速度を減少するにつれて実部はほとんど変化しないが、成長率は徐々に増大する。 $V_0 \sim 6.5$ V あたりから成長率は急に増大しピーク値に達した後再び減少している。これにつれて実部もいくらか増大するのがみられる。 γ_4 の成長率が急に増大を始める所は分散式(6)でも不安定となる所である。したがって無限大の系でもともと不安定となる条件があると有限系での成長率も大きい。

第4図 ビーム速度に対する周波数及び成長率の変化。周波数はほとんど変化しないが成長率は各モード6V附近でピーク値を示す。 $\omega_i L/v_e = 0.59, T_e = 2.2eV_0$

この図から明白のようにビーム速度が音速に比べてずっと大きくスロー波の分枝とイオン音波の分枝が交わらなくても波は不安定となる。

§ 4. 結論及び吟味

一次元の流体方程式を有限長イオンビーム・プラズマ系に適用し境界の影響を含め分散関係式を得た。イオンビームのスロー波とイオン音波の分枝が交差しない条件下でも不安定根が数値的に得られた。これ等は多くのモードからなりその成長率は境界の間隔、ビーム速度及びビーム密度に依存し、特にビーム速度、密度に対しては顕著な変化をする領域がある。又イオンビーム・プラズマ系でもピアースが示した電子ビームのみの場合と同様な周波数の実部が零の不安定根が見いだされた。このような不安定な波の発生機構は無限大系でビームのスロー波の分枝とイオン音波の分枝が交差する場合に生じると同じような負帰還が各摂動量の間で選択的に位相が固定されているために生じるものと思われる。この機構は今後明らかにする必要がある。境界長 L をバ

ラメーターとする周波数及び波数の各実部をプロットしたものは1図とほとんど一致する(この場合各隣り合う点でLの値は異っている)。したがって成長率は主に波数の虚部から生じる。この虚部はどのモードに対しても波を空間的に減衰させる符号となっている。これより位相速度で走る系での振巾, $\exp \left\{ \omega_r t \left(\frac{\gamma}{\omega_r} - \frac{k_i}{k_r} \right) \right\}$ はスロー波に対しては尚増大であるが他のモードは変化なしに逆に減衰する。しかし $\frac{\gamma}{\omega_r} - \frac{k_i}{k_r} = 0$ なる条件の所はブラソフ方程式を用いフーリエ逆変換よりポテンシャル $\varphi(\omega, z)$ を求める場合に不連続となり分枝の影響が入る所でありこの場合は詳しい取扱いが必要と思われる。ここでは境界での電位が零⁷⁾ となる条件のみについて調べたが境界での電場が零⁸⁾ となる実験結果も報告されている。尚数値計算は京都大学大型計算機センターを利用して行なった。

参 考 文 献

- 1) J.R. Pierce; J. Appl. Phys. 15(1944)721.
- 2) A.B. Mikhailovskii; Theory of plasma Instabilities Vol. 1 (PLENUM PUBLISHING CORPORATION, NEW YORK, 1974) p. 20.
- 3) L.P. Block; Astrophysics and Space Science 55 (1978) 59.
- 4) S. Iizuka, K. Saeki, N. Sato and Y. Hatta; Phys. Rev. Letters 43 (1979) 1404.
- 5) N. Sato et al., Phys. Rev. Letters 46 (1981) 1330.
- 6) 中村定男, 湯山哲守, 久保 熙; 核融合研究 45 (1981) 241.
- 7) D.H. Looney and S.C. Brown; Phys. Rev. 93 (1954) 965.
- 8) Y. Nakamura; J. Phys. Soc. Japan 31 (1971) 273.