電流の渦度とプラズマの平衡Ⅱ

阪大工 伊藤 博

(1982年3月12日受理)

Current Vorticity and Plasma Equilibrium Ⅱ.

Hiroshi ITO

(Received March 12, 1982)

Abstract

A mathematical description for the wall current in the confinement system can be reduced to a circulation which has an important meaning in the theory of plasma confinement.

From a pressure integral defined by the scalar product of the current and the vector potential, solutions of equilibrium configurations with constant current vorticities can be derived for mirror and toroidal systems.

§ 1. 序 論

前編に¹⁾ おいてプラズマの反磁性電流の渦度を調べることにより、反転磁界配位(FRC)の平衡と $n=2$ 不安定性の議論を行った。いったいFRC配位はきわめて単純なものであり、そのままでプラズマの長時間保持が可能とはとても思われない。一方単純なるがゆえにプラズマの平衡の問題の基本的な検討にむいている点があり、そこから生れ出た知識はより複雑な配位、例えばトカマクなどに生かし得る可能性が十分にある。またプラズマの存在範囲を最終的に定める放電管壁の意義はおそらくは従来の閉じ込め研究ではほとんど理解していなかったと考える。しかしながら本理論においてはその意義は重大であることが指摘できる。前編において対象としたFRCプラズマのモデルでは電流の渦度がいたる所一定であった。本理論ではそれは必ずしも本

Plasma Physics Laboratory Faculty of Engineering Osaka University
Yamadaoka 2-1, Suita, Osaka. 565.

質的なことではなく、全渦度があるかないかが問題である。それにもかかわらず自然は単純を好むということがあるため、FRC以外にもそのような解があるかどうかは非常に興味がある。以下このようなことを議論することにする。

§ 2. 壁の存在の意識

現在閉じ込め用の装置のほとんどは真空容器の外部に閉じ込め用コイルが配置されている。いうまでもなく内部導体を持つ装置もあるけれど、ここで取り上げる議論では閉じ込め用コイルのすべてを内部に収容するスペースチャンバーとの比較である。第1図(A)はコイル系が放電管の外に配置された場合の模式図である。

もし閉じ込めがうまくいっておれば S_2 S_3 S_4 が真空領域であり、もしそうでなくても S_3 , S_4 は真空領域である。放電管壁の存在意識はそれよりも外に電流がはみ出すことがないということである。(B)はコイル系も含めてスペースチャンバー

内に入っている場合である。閉じ込めがうまくいっていても領域 S_2 にプラズマ電流が存在し得る可能性がある。複雑なコイル系(隙間がある)ならば領域 S_1 と S_2 はつながっていることになるからである。真空の条件は本理論においては次の形でかける。すなわちプラズマあるいは全系をとりまく任意の閉じた閉曲線 C を考え、

$$\int_C \mathbf{j}_\theta \cdot d\mathbf{l} = K \quad (1)$$

において K が零であれば電流のはみ出しはなく、零でなければはみ出しがあるとする。このような条件は流体力学においてある翼形が浮力をもつかどうかというジュ-コフスキーの理論とまったく似ている。²⁾ ただ議論は2次元に限られ3次元ならばプラズマとコイルの表面にはさまれた空間においてそれが真空ならば表面電流 $\vec{K}$ を集めて

$$\sum_{i=1}^n \int K_i \, dS = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

という条件にかわってしまう。一般的に(2)を満たすような表面電流分布は一意的に定まらない。

電流の渦度とプラズマの平衡II

もしコイルの断面を無限小にもってゆけば、複雑な渦系群に囲まれた有限の大きさのプラズマの問題を解くことになる。プラズマの表面電流は内部の分布できることはいうまでもない。いまこのような一般論を議論するつもりはなく、本題にもどって放電管壁の意義を調べることにする。

第2図にプラズマとコイルの中間に放電管壁がある場合を模式的にあらわすことにする。壁が導体であるか絶縁体であるかによって壁の位置の明示は困難であるけれど、とにかく壁か壁付近

のプラズマに電流が流れているものとする。前編の議論によるとある領域が真空磁界であるための条件はそれに接する電流の立ち上げまたは立ち下げの部分に生じる循環が等しいことで置きかえられる。すなわち領域IIについては

$$\int_{r_p}^{r_s} \text{rot } \vec{j} \cdot d\vec{S} = K_p = \int_{r_1}^{r_2} \text{rot } \vec{j} \cdot d\vec{S} = K_{w1}$$

であり、領域IVと領域VIについては

$$\int_{r_2}^{r_3} \text{rot } \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{r_4}^{r_5} \text{rot } \vec{j} \cdot d\vec{S} = K_{w2}$$

と

$$\int_{r_5}^{r_6} \text{rot } \vec{j} \cdot d\vec{S} = K_{w3} = \int_{r_7}^{r_8} \text{rot } \vec{j} \cdot d\vec{S} = K_c$$

が成立する。 $K_{w1} = K_{w2} = K_{w3}$ から

$$K_p = K_c$$

という前編と同じ結論がでてくる。しかし壁の領域にある区分Ⅳが存在しないこともあり得る。

それは第3図のような電流分布で、このとき点 r_2 と点 r_4 における正負の電流のピーク値はまっ

たく自由に選び得る。そのためプラズマ電流の作る循環の値は内側の壁電流の負の立ち上りによって生じる循環 K_{w1} によって定まり、コイルの循環 K_c は壁電流の外側の立ち下げできまり、いままでの話と異なり、

$$K_p \approx K_c$$

になることもあり得る。電流の流れない部分をもった分布は導

体ならば厚い壁か2重構造のものに相当するであろう。第3図

の場合は導体壁ならかなり薄いものに相当している可能性がある。この場合はコイル電流とプラズマ電流が独立で多分制御が不可能かも知れない。たとえば点 r_2 における電流のピーク値より点 r_4 におけるそれがずっと低い場合もあり得る。その時はきわめて弱い磁界による閉じ込めが可能という見方よりも壁による閉じ込めが行われていると考えるべきであろう。

壁電流が全体としてプラズマ電流と同じ向きか反対かは面積積分

$$\int_{r_1}^{r_5} j_{\theta} dr = I_w$$

の正負（第3図なら r_1 から r_5 までの積分）できまり、これは正負ともにあり得る。すなわちピンチ形式ならば全壁電流はプラズマ電流と同じ向きであり、準定常の装置では反対になろう。いずれにしてもプラズマの平衡とか閉じ込めに壁の存在とか壁電流の分布を考える必要があることは面倒なことではある。

§ 3. 圧力積分

流体力学において変分原理から基礎方程式を導くために使われるラグランジアン密度 L が結果的に圧力になることは容易に証明できる。渦があっても結果は同じであるが簡単のためポテンシャル流について証明しておく。流体力学のラグランジアン密度は³⁾

$$L = \rho \left(\frac{1}{2} v^2 - U \right)$$

を基本としてそれにいくつかの副条件をつけて組み上げてゆく。ここでは密度保存則

電流の渦度とプラズマの平衡Ⅱ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

を副条件にし、さらに変形して以下のものを採用する。

$$L = \rho \left(\frac{1}{2} v^2 - U \right) + \rho \left(\dot{\phi} + \vec{v} \cdot \nabla \phi \right) \quad (4)$$

そして ρ , $\vec{v}$, ϕ を変数として変分すれば

$$\vec{v} = -\nabla \phi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

$$\frac{1}{2} v^2 - U - \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \dot{\phi} + \vec{v} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (5)$$

が導かれる。これらの方程式の組み合わせから

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P$$

というオイラーの式が出てくる。(4)と(5)の組み合わせとして

$$L = P$$

が結論される。

磁気流体力学でのラグランジャン密度⁴⁾ は2流体モデルでは

$$L = \frac{1}{2} \rho_i v_i^2 + \frac{1}{2} \rho_e v_e^2 + \vec{A} \cdot \vec{j} - \rho U - \frac{B^2}{2\mu}$$

を基本として副条件をいくつか設定して作ってゆく。詳しいことは省略して結果的には

$$L = P - \frac{B^2}{2\mu} \quad (6)$$

になってしまう。ここでランキン解にもどる。この解は

$$P = \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (7)$$

という関係をみtas。本来は軸上のプラズマ圧力 P_0 が加わるけれど真の平衡解では零であるため省いておく。(7)の条件がみtasされているとすると全ラグランジアンは

$$\int L \, d\tau = \int \frac{B^2}{2\mu} \, d\tau \quad (8)$$

となってしまう。(6)式は平衡に限らず一般の場合であるが(8)式は平衡をみたす時の関係である。

(7)式の本来の意味をさらに調べてみよう。両辺の勾配を作ると

$$\nabla P = (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{j} + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{\Gamma} \quad (9)$$

となる。 $\vec{j} \parallel \vec{A}$ という条件から

$$0 = \text{rot}(\vec{j} \times \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{j} - (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{A}$$

を考慮して(9)式はさらに

$$\nabla P = 2(\vec{j} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{\Gamma} \quad (10)$$

と書ける。電流 $\vec{j}$ および $\vec{A}$ の切線および法線ベクトルをそれぞれ $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ にし、切線方向にはかった線要素を ds とすると

$$(\vec{j} \cdot \nabla) \vec{A} = j \frac{\partial}{\partial s} (\vec{A} \vec{\tau}) = \vec{j} \frac{\partial \vec{A}}{\partial s} + j \vec{A} \frac{\vec{n}}{r}$$

となる。ここで対称軸についての断面が円であるとして曲率半径を r とし、さらに $\vec{A}$ の絶体値が円周に沿ってかわらないとすると(10)式は

$$\nabla P = \vec{j} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{\Gamma} + 2 j \vec{A} \frac{\vec{n}}{r}$$

となり、もし

$$\vec{A} \times \vec{\Gamma} + 2 j \vec{A} \frac{\vec{n}}{r} = 0 \quad (11)$$

が成立すると平衡の条件

$$\nabla P = \vec{j} \times \vec{B} \quad (12)$$

が出てくる。(11)は2次元FRCモデルでは

$$\Gamma_z = 2 \frac{j_\theta}{r} \quad (13)$$

となり、確かにみたされてはいるけれど必ずしも Γ_z が定数ということにはならない。ミラー磁界中で電流の渦度が一定であるような解 FRC であることがこれでわかった。それ以外のトロイダル系、たとえばトカマク、あるいはコンパクト・トロイドの仲間であるスフェロマックはトロイダル電流（ここでは j_θ ）の他にトロイダル磁界が存在する。またステラレータ、ヘリオトロンなどのヘリカル系などについても同様な考え方で電流の渦度一定の解が存在するかどうかは興味がある。

§ 4. その他の平衡配位

A. 軸対称トロイダル系

この配位はトロイダル磁界、ポロイダル磁界およびトロイダル電流、ポロイダル電流をもつもので、トカマク、RFP、スフェロマックなどがある。

圧力積分 (7)

$$P = \vec{j} \cdot \vec{A}$$

の他に以下の副条件をつけ加える。

$$P = (\vec{j} \cdot \vec{A}) + \alpha (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (14)$$

これを積分の形にかけば第 2 項はまさにティラーの K 積分となり⁵⁾、これを副条件につけ加えたことになる。(14) 式の他にさらにポロイダル電流がポロイダル磁界に沿って force-free に流れるという条件を要請しよう。

それは円柱座標系で

$$j_r = -\alpha B_r, \quad j_z = -\alpha B_z \quad (15)$$

とあらわすことができる。その時 (14) は

$$P = j_\theta A_\theta + \alpha B_\theta A_\theta \quad (16)$$

という形になり、さらに

$$P = \frac{j_\theta + \alpha B_\theta}{r} (r A_\theta) \quad (17)$$

と書きかえられる。ここで

$$j_\theta + \alpha B_\theta = k r \quad (18)$$

であるならば, (17) を r で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= (j_\theta + \alpha B_\theta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \\ &= (j_\theta + \alpha B_\theta) B_z \\ &= j_\theta B_z - j_z B_\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

また z で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= k r \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ &= -k r B_r \\ &= -(j_\theta + \alpha B_\theta) B_r \\ &= j_r B_\theta - j_\theta B_r \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。(19), (20) はまさに平衡の式である。(18) 式から j_θ すなわちトロイダル電流の渦度が計算される。それは

$$\text{rot } \vec{j}_t + \alpha \mu \vec{j}_p = 2k$$

であり, 全渦度は

$$\vec{\Gamma}_{tz} = 8\pi R k a \quad (R, a \text{ はそれぞれトーラスの大半径, 小半径})$$

となり, これはトロイダル状の放電管を使用している装置では一定である。何故かという定数 k はトーラスの内側の磁界できまり, FRC やスフェロマックと違ってプラズマがないため磁界の時間変化がなく, その結果 z 軸に垂直な面内での $n=2$ 不安定性は起こり得ない。ポロイダル電流の作る渦度は force-free 条件 (15) から計算できる。それは

電流の渦度とプラズマの平衡 II

$$\text{rot } \vec{j}_p = -\alpha \text{ rot } \vec{B}_p = -\alpha \mu \vec{j}_t$$

となり全渦度は

$$\bar{\Gamma}_{p\theta} = -\alpha \mu I_t \quad (21)$$

となり、全トロイダル電流に比例する。本来 $\bar{\Gamma}_{p\theta}$ はトロイダルコイルの内側に発生する循環に等しいため一定であり、全トロイダル電流が一定であることと等価である。しかし I_t が一定であってもその径分布については、不定さがある。すなわち、なんらかの追加熱でエネルギーの注入を行った場合、管壁の温度を一定にする限りトロイダル電流の管軸附近への集中は避けられないであろう。このような話は現在の理論の外にあるけれど、そのようなことを抑制する方法がないことを (21) 式は物語っている。

B. 直線ヘリカル系

トロイダル配位の場合は困難であるが、よく知られた直線ヘリカル系の解⁶⁾ は丁度そのようになっている。

$$P = J_\theta A_\theta + j_z A_z \quad (j_r = 0)$$

とし

$$j_\theta = h r j_z \quad \phi = \theta - h z \quad (j_z = \text{const.}) \quad (22)$$

を考慮すると

$$P = \frac{j_\theta}{h} h A_\theta + j_z A_\theta$$

を r で微分して

$$\frac{\partial P}{\partial r} = j_\theta B_z - j_z B_\theta \quad (23)$$

ϕ で微分して

$$h \frac{\partial P}{\partial \phi} = j_\theta B_r \quad (24)$$

などの平衡の式が求められる。(22) の最初の関係から j_z が r に無関係として

$$\text{rot } \vec{j}_p = 2 h j_z \quad (25)$$

が得られる。もし曲率が十分に小さいとすると(25)式は(21)と同じくポロイダル電流の作る全渦度は全トロイダル電流に比例する事情は同じである。

§ 4. 結 言

本研究施設での実験装置でおこっている反転磁界配位プラズマの興味深いふるまいを説明しようという試みから出発したこの理論は、区々たるFRCの問題を越えてプラズマの磁界閉じ込めの一般的な問題に結びついたように思える。渦度とか循環という言葉は、流体力学独特のもので、プラズマ物理としては、いささか縁遠いものに感じられるかも知れない。しかし流体力学における解析的にきれいな部分のいくつかはポテンシャル論に負うところが多い。その中でこれらの言葉は物理的あるいは直観的に現象をいいあらわすために使われているのである。プラズマの閉じ込めに関しては、やはりポテンシャル論がよく使用されるため、今回これらの言葉が自然に導入されたものと考えることができる。しかしながら本理論において取り扱った電流分布の立ち上げあるいは立ち下げの部分に生じる循環の存在の取り扱い、流体力学ではあまり見られない。しかし速度分布の立ち上げ、立ち下げを考えると流体力学でもそのような循環があらわれることは同じであり、しかも従来の理論をそこなうものではない。ただ流体力学とプラズマ閉じ込めの問題意識はかなり異なる。真空領域をはきんでプラズマ電流とコイル電流が離れて存在するようなことに相当する流体力学の問題は多分、余りないだろうと考える。それは物体をはきんで2つの異なる流れがあるという問題になるのかもしれないが、それなら別々の壁における境界条件を設定することでことは終ってしまう。しかし本文中に述べた翼型の問題はそれではすまないであろう。すなわち両翼端で流れが合流しているため翼型をとり囲む循環に相当する積分路が存在するからであり、プラズマ閉じ込めの問題と共通点が生じてくる。プラズマを実質的にもり込む放電管の存在はしたがって極めて重要である。電流の循環を作るための空間曲線はあきらかに壁をつらぬくことができない。そのため壁はプラズマとコイルに囲まれた空間を分割してしまうことになり、多分空間のトポロジカルな性質が変わってくることになる。したがってトカマクとスフェロマックとでは電流と磁界の配位はよく似ているけれど放電管の存在によって本質的には全く異なったことになろう。すなわち対称軸を含む面でプラズマを切断した時、対称軸の左右にポロイダル電流の作る2つの渦が生じる。スフェロマックではこの2つの渦を囲む閉じた曲線(積分路)が許されるけれど、トカマクでは放電管の内側(軸に近い)の壁の存在によってこのような積分路は禁止される。物理的に言えば上下の電流の渦の直接的な結びつきが起こるかかどうかというこ

電流の渦度とプラズマの平衡 II

となる。

以上の議論からいえば理想の閉じ込め配位というのは放電管をスペースチャンバーに取りかえてもまったくプラズマに変化がないものであるということができよう。また本論の I に述べたプラズマ中における粒子拡散は、閉じ込めを超えた問題である。トカマク配位は確かに本理論の範囲でも他の配位よりすぐれていることは確かである。それでもトロイダル電流の作る全渦度には問題があり、この理論の枠外の話であってもトロイダル電流のピーキングを許すことになる。配位だけで、プラズマの発生とか技術的なことを考えなければプラズマに不変な磁界の芯を入れる、たとえばレビトロンがよいということになろう。本編に述べたことのいくつかはかなり独善的なものであることは著者自ら認めるところであり、将来もっと詳しい検討が必要であらう。大方の批判を待つものである。

参 考 文 献

- 1) 伊 藤 博 : 核融合研究, 47, 2 (1982).
- 2) 今 井 功 : 流体力学 (前編), (裳華房, 1973) 138.
- 3) H. ITO : Progr. Theor. Phys. 9, 2 (1953) 117.
- 4) H. ITO : Progr. Theor. Phys. 48, 5 (1972) 1442.
- 5) J. B. Taylor : Phys. Rev. Lett. 33, (1974) 1139.
- 6) 宮 本 健 郎 : プラズマ物理 (岩波書店, 1976) 155.