蛇行するバンピー・トーラスの平衡と安定性

等々力 二郎

名古屋大学プラズマ研究所

(1982年8月9日受理)

Equilibrium and Stability of Snake Bumpy Torus

Jiro Todoroki

(Received August 9, 1982)

Abstract

Equilibrium and stability of a toroidal closed-line configuration with finite $\ell = \pm 1$ distortion is investigated theoretically based on new ordering assumptions. A second order nonlinear differential equation describing equilibrium is derived, and its analytical solution is obtained for the parabolic pressure profile. As the plasma pressure increases, the cross section of the plasma column elongates to the vertical direction. The growth rate for $m = 1$ displacement is given.

§ 1. 序 論

閉じた磁力線をもつ変形バンピー・トーラス (MBT) 配位におけるプラズマのMHD平衡と安定性が、以前の論文^[1, 2]で考察された。それらの理論では、 ℓ によってポロイダル方向のフーリエ成分を表わすことにすると、 $\ell = 0$ のバンピー磁場の成分と、 $\ell = \pm 2$ の四重極磁場成分は、 $\ell = \pm 1$ 成分と共に有限の大きさをもつと仮定されている。その結果、プラズマの β 値が小さい場合に、プラズマ柱の断面の形状は、 $\ell = 0$ および $\ell = \pm 2$ の磁場成分のみによって決定され、また、 $\ell = \pm 1$ の磁場成分は、トーラス力とつり合ってトロイダル平衡を保つという役割のみを荷っている。 $\ell = \pm 1$ 成分は、 $\ell = 0$, ± 2 のそれと同じく有限の大きさと仮定されているにも拘らず、結果としては線形の効果しか現われていない。

ギャップ・シェルを用いたMBT実験^[3]では、 $\ell = \pm 1$ の磁場成分が、 $\ell = 0$ あるいは $\ell = \pm 2$ のそれにくらべてかなり大きな値をもつ場合があり、またこの場合、以前の理論によって予

測される程にはプラズマが不安定ではないように見える。それ故、 $l = \pm 1$ 成分のもたらす高次の影響を考慮することが重要であると思われる。

この論文では、 $l = \pm 1$ の磁場成分が有限の大きさで、 $l = 0, \pm 2$ 等の磁場成分はそれに比べて十分小さいような、閉じた磁力線をもつ系のMHD平衡と安定性を考察する。この系での磁力線の形を最低次で見れば、トーラス面内で左右に蛇行している。論文^[1, 2]における取扱いと同様に、バンピー磁場の周期 L は、プラズマの半径 a にくらべて十分大きいと仮定する。

(Long-Thin 近似) すなわち、バンピーの波数を $h = 2\pi/L$ とすると、 ha は小さなパラメータ ε のオーダーであるとする。

次の節で、どのようなオーダーリングを用いるのがよいか議論する。§3.では、 $l = \pm 1$ の成分が有限である場合のMHD平衡を記述する二階の非線形偏微分方程式を導き、§4で、エネルギー原理を簡単化して、一般的な安定条件について議論する。§5で、圧力分布が半径の二乗に依るような場合に対して、§3で導かれた非線形偏微分方程式の解析解を求め、またその $m=1$ モードに対する不安定性の成長率を求める。

§2. オーダリング

どのようなオーダーリングを用いるのが適当であるかを考えるのに、円形断面の鋭い境界をもつトーラス・テータ・ピンチのモデルによる計算の結果を見ておくのが有益である。一般に、複数のフーリエ成分 l の存在する場合には、プラズマ断面が円形であるという仮定はなり立たないから、それらの計算は正当性を失う。しかし、それらの中にもある種の物理的な効果が現われている。波数 l をもったプラズマ表面の相対的変形度を δ_l とすると、大半径 R_0 をもつトーラスの平衡条件は($\beta \ll 1$, $ha \ll 1$ のとき)

$$a/R_0 \simeq \frac{1}{4} (ha)^2 \delta_1 (3\delta_0 + \delta_2)$$

で与えられる^[4]。また、 $m=1$ モードの成長率 γ は、 v_A をアルフヴェン速度、 b をプラズマを囲む導体壁の半径とすると、(やはり $\beta \ll 1$, $ha \ll 1$ として)

$$\begin{aligned} (\gamma/hv_A)^2 \approx & \frac{1}{4} \beta \delta_1^2 \left[\left(2 \pm \frac{3}{2}\right) (ha)^2 - 2\beta (a/b)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \beta [3\delta_0^2 + \delta_2^2 \pm 4\delta_0 \delta_2] \end{aligned}$$

となる〔5〕これらの式をながめると、次のオーダーリングが示唆される。

$$\delta_1 \sim 1; \delta_0 \sim \delta_2 \sim ha \sim \varepsilon; \delta_3 \sim \beta \sim \varepsilon^2; a/R_0 \sim \varepsilon^3 \quad (1)$$

以下において、我々は(1)のオーダーリングを採用することにする。しかし、可能なオーダーリングとしては、たとえば

$$\delta_1 \sim 1; \delta_0 \sim \delta_2 \sim \delta_3 \sim \beta \sim ha \sim \varepsilon; a/R_0 \sim \varepsilon^3 \quad (2)$$

のようなものが考えられる。(1)と(2)では、 β と ha の関係が異なる。(1)にくらべて(2)のオーダーリングの方が、より β の大きな場合を取扱っていると考える人もあるかも知れない。しかし、実際に計算を行ってみれば、(1)と(2)の相異は β の大小にあるのではなく、 ha の大小にあることが判る。すなわち、(1)のオーダーリングによると、(2)を用いたときよりも、バンピー磁場の波数について高次の効果を含めることができる。(1)を用いて得られる結果において、 $(ha)^2$ についての高次の項を落とすことによって、(2)を用いた結果を導き出すことができる。(2)を用いたときには、展開の2次の項までの計算を行えばよいのに対し、(1)の場合には展開を3次まで行う必要がある。

§ 3. 平衡条件

スカラー圧力 p をもつプラズマのMHD平衡状態において、多価のスカラー関数 ϕ および ζ を用いて、電流密度 $\mathbf{J}$ および磁場 $\mathbf{B}$ を次のように表わすことができる〔6〕。

$$\mathbf{J} = \nabla \zeta \times \nabla p, \quad \mathbf{B} = \nabla \phi + \zeta \nabla p. \quad (3)$$

このとき、プラズマの平衡条件は次のようになる。

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla \zeta = 1, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

ϕ 、 ζ は多価であるが、電流 $\mathbf{J}$ 及び磁場 $\mathbf{B}$ が一価であるための条件として、トーラスを一周したときの ϕ 、 ζ の増加分 $[\phi]$ 、 $[\zeta]$ に対して、次の関係が要請される。

$$[\phi] = -I(p), \quad [\zeta] = I'(p). \quad (5)$$

$\mathbf{B} \cdot \nabla \zeta = 1$ の関係から得られる関係

等々力

$$[\zeta] = \oint dl / B$$

を考慮すると、(4)のあとの条件は、よく知られた平衡の条件

$$p = p(\oint dl / B)$$

に他ならない。

トーラス座標 (x, y, z) を円柱座標 (R, Θ, Z) と次の関係によって導入しよう。

$$R = R_0 - x, \quad Z = y, \quad \Theta = z / R_0. \quad (6)$$

そして、 $z = 0, \pm L/2, \pm L, \dots$ なる各面に対して、次のような鏡像対称性を仮定しよう^[7]。

すなわち、ベクトル $\mathbf{B}$ はこれらの各面についての鏡映に対して軸性ベクトルとして振舞い、ベクトル $\mathbf{J}$ は極性ベクトルとして振舞うとする。この鏡像対称性の結果として、あるトーラス領域内に閉じこめられた磁力線は全て閉じていることが保証される。これらの対称性を、スカラー関数 p, ϕ, ζ について書くと次のようになる。

$$p(x, y, z) = p(x, y, nL - z),$$

$$\phi(x, y, z) - \phi(x, y, \frac{nL}{2}) = \phi(x, y, \frac{n}{2}L) - \phi(x, y, nL - z),$$

$$\zeta(x, y, z) - \zeta(x, y, \frac{n}{2}L) = \zeta(x, y, \frac{n}{2}L) - \zeta(x, y, nL - z),$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

以下において、更に、 $y = Z = 0$ の面に対するもう一つの鏡像対称性、すなわち、 p, ϕ, ζ が y の偶関数であることを仮定する(この条件は容易に除くことができる。)

x, y, z 軸方向の単位ベクトルを、それぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ と書き、またベクトルの $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ 平面上への射影を添字 $\perp$ をつけて表わすことにする。オーダリング(1)の仮定の下で、演算子 ∇ を

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \epsilon \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon^4 \mathbf{e}_z \frac{x}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} + \dots, \quad (7)$$

$$\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (8)$$

とおき, 更に,

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^z T(z', p) dz' + \hat{\phi} - p \hat{\zeta}, \quad (9)$$

$$\zeta = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^z \frac{dz'}{T(z', p)} + \hat{\zeta}, \quad (10)$$

$$T(z, p) = \{ [B_0 + \varepsilon b_1(z)]^2 - 2p \}^{1/2}, \quad (11)$$

とおく。Tはプラズマの反磁性電流の効果を取り入れたトロイダル磁場の軸上での値である。すると、(4)は次のように書かれる。

$$\mathbf{B}_\perp \cdot \nabla_\perp p + \varepsilon B_z \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_\perp \cdot \nabla_\perp \hat{\zeta} + \varepsilon B_z \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} = 1 - |\nabla z|^2 - \varepsilon \frac{|\nabla z|^2}{T} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} - p \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} \right), \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_\perp = -\varepsilon |\nabla z|^2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ T + \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} - p \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} \right) \right\}, \quad (14)$$

ただし

$$\mathbf{B}_\perp = \nabla_\perp \hat{\phi} - p \nabla_\perp \hat{\zeta}, \quad (15)$$

$$B_z = |\nabla z|^2 \left\{ T + \varepsilon \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} - p \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial z} \right) \right\}, \quad (16)$$

また $|\nabla z|^2 = (1 - x/R_0)^{-2}$ 。(9)～(16)までの式で、 $\partial/\partial z$ のまえに形式的に ε を挿入してあるが、それを除けば、これらの式は一般的に成り立つ式である。

さて、関数 $\hat{\phi}$, $\hat{\zeta}$, p を

$$\hat{\phi} = \varepsilon \hat{\phi}^{(1)} + \varepsilon^2 \hat{\phi}^{(2)} + \dots,$$

$$\hat{\zeta} = \varepsilon \hat{\zeta}^{(1)} + \varepsilon^2 \hat{\zeta}^{(2)} + \dots,$$

$$p = \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots,$$

と展開し、最低次の磁力線の方程式が

等々力

$$x = x_0 + A'(z), \quad y = y_0, \quad (17)$$

で表わされるように,

$$\hat{\phi}^{(1)} = B_0 A'(z) x \quad (18)$$

とおく。(12) - (14) を順次 ε の各オーダーについて解いていく。まず, $p^{(2)} = p^{(2)}(x_0, y_0)$ であり, $\hat{\zeta}^{(1)}$, $\hat{\phi}^{(2)}$ について

$$\hat{\zeta}^{(1)} = -\frac{A'}{B_0} x + \frac{1}{B_0} \int_0^z |A'|^2 dz, \quad (19)$$

$$\hat{\phi}^{(2)} = -\frac{b_1'}{4} (x^2 + y^2) + \frac{g_2^{(z)}}{4} (x^2 - y^2), \quad (20)$$

となる。(20) において, (1) を考慮してある。(13) の ε^2 のオーダーの式から

$$\begin{aligned} \zeta^{(2)} = & -\frac{1}{B_0} \hat{\phi}^{(2)} + \frac{x_0}{B_0} \left\{ \int_0^z \left(-\frac{2}{R_0} - \frac{3b_1' - g_2}{B_0} A' \right) dz + \frac{2b_1 A'}{B_0} \right\} \\ & + \frac{1}{B_0} \int_0^z \left\{ -\frac{2}{R_0} A - \frac{3b_1' - g_2}{B_0} A A' - \frac{3b_1}{B_0} |A'|^2 \right\} dz \\ & + \frac{2b_1 A A'}{B_0}, \end{aligned}$$

これより, 条件 (5) を考慮すると

$$\frac{1}{R_0} + \frac{1}{2L} \int_0^L \frac{3b_1' - g_2}{B_0} A' dz = 0. \quad (21)$$

なる条件が得られる。 $\hat{\phi}^{(3)}$ は次の式から決定される。

$$\nabla_{\perp}^2 \hat{\phi}^{(2)} = -\frac{2A'}{B_0} \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} - B_0 A''' x. \quad (22)$$

ここで, 関数 $\Phi_p = \Phi_p(x_0, y_0)$ が

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi_p = \frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} \quad (23)$$

を満たすものとすれば, (22) の解として

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(3)} = & -\frac{B_0}{8} A''' (x^3 + x y^2) + \frac{1}{8} g_3(z) (x^3 - 3 x y^2) \\ & - \frac{2 A'}{B_0} \Phi_p(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (24)$$

と置くことができる。 $\zeta^{(3)}$ に関する式を、磁力線(17)に沿って一周積分することによって、容易に次の式を得ることができる。

$$\frac{B_0}{L} [\hat{\zeta}^{(3)}] = 6 f p^{(2)} - 4 f \frac{\partial \Phi}{\partial x} p + \Psi_{ex}(x_0, y_0) + \text{const.} \quad (25)$$

ただし

$$f = \frac{1}{B_0^2 L} \int_0^L |A'|^2 dz, \quad (26)$$

$$\Psi_{ex}(x_0, y_0) = C_0 (x_0^2 + y_0^2) + C_1 x_0 + (x_0^2 - y_0^2), \quad (27)$$

$$C_0 = \frac{1}{4 L B_0^2} \int_0^L \{ 2 B_0^2 |A''|^2 + 3 |b_1'|^2 + |g_2'|^2 \} dz, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{1}{4 L B_0^2} \int_0^L \{ 7 B_0^2 |A''|^2 A + 6 B_0 g_3 A A' \\ & + (3 b_1' - g_2) (b_1' - g_2) A + 2 b_1 A' (7 b_1' - g_2) \\ & + (b_1' - g_2) \int_0^z \left[\frac{2 B_0}{R_0} + (3 b_1'(z') - g_2(z')) A'(z') \right] dz' \} dz, \end{aligned} \quad (29)$$

$$C_2 = \frac{1}{4 B_0^2 L} \int_0^L \{ 3 B_0^2 |A''|^2 + 3 B_0 g_3 A' - 4 b_1' g_2 \} dz. \quad (30)$$

関数 $A(z)$ を決定する際に、 $A(0)$ は全く任意である。それ故 $C_1 = 0$ となるように $A(0)$ を選ぶことが許される。さて、次のような量

$$\Psi = \Psi_{ex} - 4 f \frac{\partial \Phi}{\partial x} p, \quad (31)$$

を導入すると、 $p^{(2)} = p^{(2)}(\Psi)$ であるから、(31)を(23)と連立させて解けば、プラズマの等圧面 Ψ の形を決定することができる。(31)の両辺に $\nabla_\perp^2$ を作用させて、(23)を考慮すると、 $\Phi_p^{(2)}$ を含まない単一の偏微分方程式

$$\nabla_{\perp}^2 \Psi = 2 C_0 - 4 f \frac{\partial^2 p^{(2)}(\Psi)}{\partial x^2} \quad (32)$$

を得る。式(32)において、パラメータ

$$\beta_* = -4 f \frac{dp^{(2)}}{d\Psi} \quad (33)$$

の値が重要な役割をもつ。 $\beta_* < 1$ の領域においては、(32)は楕円型の方程式であるが、 $\beta_* > 1$ の領域があると、その領域では(32)は双曲型の方程式になる。方程式(32)が混合型の方程式になりうるということは、極めて複雑な状況を生み出すが、方程式の解がなくなるとか、解を求められないとかいうことを意味してはいない。この状況は、元の方程式(31)と(23)を連立させて解くことにすれば、見かけ上はなくなる。

§ 4. 安定性の考察

エネルギー原理を用いて、プラズマの安定性についての一般的な考察を行う。その際に、プラズマの変位 ξ に対しても、平衡量と同様に(1)のオーダーリングが仮定できるものとする。

エネルギー積分は、プラズマ流体からの寄与 δW_F 、真空領域からの寄与 δW_V 、プラズマ表面からの寄与 δW_S の三つの部分に分けられる。

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_V.$$

(1)のオーダーリングに基づいて δW を展開する前に、若干の変形を加えておくのが好都合である。まず δW_F について、 V をプラズマ中の磁気面の囲む体積とし、 $\hat{e}$ を V ＝一定の面内にはない任意のベクトルとすると、

$$\delta W_F = \int_{V_F} \left\{ \left| Q + \frac{J \times e}{e \cdot \nabla V} \xi_V \right|^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 - K \xi_V^2 \right\} dz,$$

と書ける。ただし $\xi_V = \xi \cdot \nabla V$, $Q = \operatorname{curl} (\xi \times B)$,

$$K = \frac{1}{(\hat{e} \cdot \nabla V)^2} J \times \hat{e} [B \cdot \nabla \hat{e} - \hat{e} \cdot \nabla B + J \times \hat{e}]$$

である。ここで、

$$\mathbf{J} = \dot{p} \left\{ \nabla \hat{\zeta} + \frac{\nabla z}{T} \right\} \times \nabla V, \quad \dot{p} \equiv \frac{dp}{dV}$$

の関係を用い, $\mathbf{B} \cdot \nabla V = 0$, $\mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\zeta} + \frac{1}{T} \mathbf{B} \cdot \nabla z = 1$ を考慮すると

$$\begin{aligned} K = & -\mathbf{B} \cdot \nabla \left\{ \frac{\dot{p}}{\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla V} \left(\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla \hat{\zeta} + \frac{1}{T} \hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla z \right) \right\} \\ & + \frac{1}{(\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla V)^2} |\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{e}}|^2 - \frac{\dot{p}}{T^3} \frac{\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla z}{\hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla V} (\mathbf{B} \cdot \nabla T) \end{aligned}$$

と書けるから, この第一項を含む部分を一度部分積分を行うと, δW_F を次の形に書くことができる。

$$\begin{aligned} \delta W_F = & \int_{V_F} \left\{ |\tilde{\mathbf{Q}}|^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 - K_2 \xi_V^2 \right\} d\tau \\ & + \iint_{V_F} \xi_V^2 \dot{p} (\mathbf{B} \cdot \nabla z) \frac{d}{dV} [\hat{\zeta}] dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} - \dot{p} \xi_V \left(\nabla \hat{\zeta} + \frac{1}{T} \nabla z \right), \quad (35)$$

$$K_2 = \dot{p}^2 \left\{ \left| \nabla \hat{\zeta} + \frac{1}{T} \nabla z \right|^2 - \frac{1}{T^3} \mathbf{B} \cdot \nabla z \right\} \quad (36)$$

次に, 真空領域の寄与 δW_V を考えよう。真空領域での磁場の変化を $\delta \mathbf{B}_V$ と書くと,

$$\delta W_V = \int_{V_V} |\delta \mathbf{B}_V|^2 d\tau.$$

ここでは, 真空磁場をスカラー・ポテンシャル x を用いて

$$\delta \mathbf{B}_V = \nabla x, \quad \nabla^2 x = 0,$$

とあらわすのが便利である。スカラーポテンシャルを用いたときの, プラズマ表面での境界条件は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial n} &= \operatorname{Div} (\xi_n \mathbf{B}_V) \\ &\equiv \mathbf{B}_V \cdot \nabla \xi_n - \xi_n \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{B}_V. \end{aligned} \quad (37)$$

ここで Div は表面 S 上での発散を表わし, ξ_n は ξ の法線方向の成分を表わす。 x は一般に多価

等々力

関数で、トーラスをトロイダル方向とポロイダル方向に一周した時の周期をそれぞれ Γ_1 , Γ_2 とするとき、

$$x = x_* + \Gamma_1 \theta_1 + \Gamma_2 \theta_2$$

と書くことができる。ここで x_* は V_V において一価な関数、また θ_1 , θ_2 は V_V において $\nabla^2 \theta_i = 0$, V_V の境界面上で $\partial \theta_i / \partial n = 0$ をみたし、かつ、 θ_1 (θ_2) のトロイダル (ポロイダル) 周期が 1, ポロイダル (トロイダル) 周期が 0 であるような関数である。

インダクタンス行列

$$L_{ik} = \int_{V_V} (\nabla \theta_i \cdot \nabla \theta_k) d\tau$$

の逆行列 L^{-1}_{ik} を用いると

$$\begin{aligned} \delta W_V = & \int_{V_V} |\nabla x_*|^2 d\tau \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 L^{-1}_{ik} \oint_S \xi_n \mathbf{B}_V \cdot \nabla \theta_i dS \oint_S \xi_n \mathbf{B}_V \cdot \nabla \theta_k dS. \end{aligned} \quad (38)$$

と書くことができる^[8]。スカラー・ポテンシャルの多価性を考慮に入れた第二項は常に正であり、安定化の方向に働く。前節で仮定したような鏡像対称性をもつ系においては $\nabla \theta_1$ は $\mathbf{B}$ と同じ対称性を持ち、 $\nabla \theta_2$ は $\mathbf{J}$ と同じ対称性をもつ。このとき、インダクタンス行列の非対角成分は 0 となり、また、 ξ_n が同様の鏡像対称性をもたなければ (38) の第二項は 0 になる。以下ではこの項を無視して考える。

δW_S については、プラズマの圧力 p が表面で連続的に 0 になり、表面電流がないときには恒等的に 0 になる。

(1) のオーダーリングに基づいて

$$\xi = \xi^{(0)} + \varepsilon \xi^{(1)} + \dots,$$

$$\delta W = \delta W^{(0)} + \varepsilon \delta W^{(1)} + \varepsilon^2 \delta W^{(2)} + \dots$$

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots$$

と展開すると、 δW に負の寄与を与えうる項は δW_F 中の K_2 を含む項と (34) の第二項であり、これらはいずれも ε^6 のオーダーである。それ以外の項は全て二乗の和の形をしているから、

ε^6 より低次の項は全て 0 でなければならない。こうして

$$\begin{aligned}\widetilde{Q}^{(0)} &= \widetilde{Q}^{(1)} = \widetilde{Q}^{(2)} = 0, \\ \nabla_{\perp} \xi^{(0)} &= \nabla \cdot \xi_{\perp}^{(1)} = 0, \\ x_{*}^{(0)} &= x_{*}^{(1)} = x_{*}^{(2)} = 0, \\ \xi^{(0)} &= \frac{1}{B} \mathbf{e}_Z \times \nabla \mu^{(0)}(x_0, y_0), \quad \xi_Z^{(1)} = A' \xi_X^{(0)},\end{aligned}\tag{39}$$

を得る。 ε^6 のオーダーで、磁力線の関数 $X(x_0, y_0)$, $Y(x_0, y_0)$, $Z(x_0, y_0)$ を

$$\begin{aligned}X &= \frac{2}{B_0} \dot{p} \xi_V^{(0)}, \\ Q^{(3)} &= \frac{1}{B_0} \xi_V^{(0)} \dot{p} (\varepsilon_Z + A' \mathbf{e}_X) + A' \mathbf{e}_Z \times \nabla Y \\ \nabla x_{*}^{(3)} &= A' \mathbf{e}_Z \times \nabla Z\end{aligned}$$

によって導入すると、

$$\delta W^{(6)} = \delta W_{*} \oint |A'|^2 dz,\tag{40}$$

$$\begin{aligned}\delta W_{*} &= \iint_{V_F} \left\{ \left| \frac{\partial Y}{\partial x_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial Y}{\partial y_0} - X \right|^2 - \frac{1}{\beta_{*}} X^2 \right\} dx_0 dy_0 \\ &\quad + \iint_{V_V} \left\{ \left| \frac{\partial Z}{\partial x_0} \right|^2 + \left| \frac{\partial Z}{\partial y_0} \right|^2 \right\} dx_0 dy_0\end{aligned}\tag{41}$$

を得る。プラズマ表面上の境界条件は

$$Z = Y,$$

また、領域 V_V を囲む外部導体上では

$$Z = 0$$

となる。(41)において、 $Y \equiv Z \equiv 0$ とおくと、安定性の必要条件として、

$$1/\beta_{*} < 1\tag{42}$$

を得る。このとき $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{B}$ であるから、この条件は、一般化された交換不安定性、あるいはフルート・モードに対する条件に他ならない。実際に、条件 (42) は、

$$\frac{d}{dp} \left(\oint \frac{dl}{B} \oint B dl \right) > 0 \quad (43)$$

と同等であることが容易に確かめられる。(41)において、局在化した不安定性に対する条件も導くことができる。いま、 y 方向の波長が x 方向の波長にくらべて十分小さいと仮定して、 y 方向の座標を $\eta = y_0 / \epsilon'$ によってひき伸ばし、

$$X = X^{(0)}(x_0, \eta) + \dots, \quad Y = \epsilon' Y^{(1)}(x_0, \eta) + \dots,$$

とくと、

$$\delta W_*^{(0)} = \epsilon' \int \left\{ \left| \frac{\partial Y^{(1)}}{\partial \eta} + X^{(0)} \right|^2 - \frac{1}{\beta_*} \left| X^{(0)} \right|^2 \right\} dx_0 d\eta$$

となり、

$$1/\beta_* < 0 \quad (44)$$

という条件を得る。この条件は、メルシェの条件と同じ種類の条件である。(磁力線によって織りなされた「磁気面」の存在しない場合には、局在化したモードは、必ずしも一つの「磁気面」の近傍に局在化するとは限らないということに注意すべきである。) この局在化したモードに対する必要条件は、決して満足させることはできない。しかし、このような局在化したモードは、実際のプラズマ中では、ラーモア半径の有限性などの諸効果のために存在しないだろうから、より波長の長いモードを考える必要がある。そのためには、平衡の具体的な形が必要になる。

§ 5. 圧力が Ψ の線形関数のときの平衡解

この節では、圧力 p が、 Ψ の線形の関数として

$$p(\Psi) = \begin{cases} p_0 (1 - \Psi/\Psi_0), & (\Psi < \Psi_0 \text{ のとき}), \\ 0 & (\Psi > \Psi_0 \text{ のとき}), \end{cases} \quad (45)$$

で与えられる場合の解析解を求め、その性質を議論することにする。このとき、 β_* は定数

$$\beta_* = 4 \pi p_0 / \Psi_0$$

であり、方程式 (31) は、

$$(1 - \beta_*) \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y_0^2} = 2 C_0, \quad (\Psi < \Psi_0)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial y_0^2} = 2 C_0 \quad (\Psi > \Psi_0)$$

境界条件は、 $x_0^2 + y_0^2 \rightarrow \infty$ のとき

$$\Psi_e - C_0 (x_0^2 + y_0^2) - C_2 (x_0^2 - y_0^2) \rightarrow 0,$$

プラズマ表面上での境界条件としては

$$\Psi_i = \Psi_e = \Psi_0,$$

$$n_x (1 - \beta_*) \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_0} + n_y \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_0} = n_x \frac{\partial \Psi_e}{\partial x_0} + n_y \frac{\partial \Psi_e}{\partial y_0},$$

ただし、 n_x 、 n_y はプラズマ表面の法線ベクトルの成分をあらわすものとする。

プラズマの断面が楕円形をしていると予想して、

$$\Psi_i = \frac{\Psi_0}{a^2} \left(e x_0^2 + \frac{y_0^2}{e} \right),$$

とおく。実際の計算を行うには、楕円座標 (u , v) を

$$x_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \left(u + \frac{\sigma}{u} \right) \cos v, \quad y_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \left(u - \frac{\sigma}{u} \right) \sin v,$$

によって導入し、 $u = 1$ がプラズマの表面を表わすものとする。 e は断面の y 軸と x 軸の比をあらわし、

$$\sigma = \frac{1 - e}{1 + e}, \quad e = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma},$$

の関係がある。計算の結果、次の関係を得る。

$$\beta_* = \frac{(e + 1)^2 [C_0 (e^2 - 1) + C_2 (e^2 + 1)]}{e^2 [C_0 (e^2 + 2e - 1) + C_2 (e + 1)^2]}, \quad (46)$$

$$\bar{\beta} = \frac{p_0}{B_0^2} = \frac{a^2}{8 f B_0^2} \frac{(e + 1)^2}{e^2} [C_0 (e^2 - 1) + C_2 (e^2 + 1)]. \quad (47)$$

$p_0 > 0$ であるという条件から

等々力

$$(C_0 + C_2) e^2 > C_0 - C_2 \quad (48)$$

いま, $C_0 > C_2 > 0$ とすると,

$$e_V = \left(\frac{C_0 - C_2}{C_0 + C_2} \right)^{1/2}$$

は, 真空磁場のつくる楕円形の $\oint d\ell / B$ 面の楕円度であるから, 関係式 (48) は, プラズマがあるときの $\oint d\ell / B$ 面の断面は, 圧力が大きくなる程, y 方向にのびることを意味している。

このとき, p_0 が増すにつれて β_* は増し,

$$e = e_V^2 + \sqrt{e_V^4 + e_V^2}$$

のところで $\beta_* = 1$ を越え, 更に p_0 が増すと β_* は減少して, 1 に漸近する。

$C_2 > C_0 > 0$ のとき, 真空磁場のつくる $\oint d\ell / B = \text{一定}$ の面は閉じた面を形成していないが,

$$\bar{\beta} \geq \frac{a^2}{8 f B_0^2} \left\{ (C_0 + C_2)^{1/3} + (C_2 - C_0)^{1/3} \right\}^3$$

のとき, プラズマの影響によって, 閉じた「磁気面」が形成される。このとき, $\beta_* > 1$ であり, 一つの $\bar{\beta}$ の値に対して, 二つの異なる楕円度 e と β_* をもつ平衡が存在しうる。

種々の $(C_0 - C_2) / (C_0 + C_2)$ の値に対し, β_* , $\bar{\beta}$ と e との関係を図 1, 2 に示す。

この平衡解に対する, $m=1$ モードの不安定性の成長率は, 次のようにして計算できる。 δW

図1 $e - \bar{\beta}$

図2 $\beta_* - \bar{\beta}$

を最小化する時の規格化条件として $\int \rho |\xi|^2 d\tau = 1$ のかわりに, $\int |X|^2 d\tau = 1$ を用いると, 固有値方程式として, 領域 V_F では,

$$\left(\lambda - 1 + \frac{1}{\beta_*}\right) X + \frac{\partial Y}{\partial y_0} = F(V), \quad (49)$$

$$\nabla_{\perp}^2 Y = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad (50)$$

領域 V_V において

$$\nabla_{\perp}^2 Z = 0, \quad (51)$$

また, V_F と V_V の境界面 S の上で

$$\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{a}{\sqrt{e}} \sin v X = \frac{\partial Z}{\partial u} \quad (52)$$

をうる。今, プラズマを囲む真空領域 V_V は, $u = w (\gg 1)$ におかれた, プラズマの断面と共焦な楕円形の完全導体壁によって制限されていると仮定する。すると,

$$X_{1H} = x, \quad X_{1V} = y \quad (53)$$

なる変位に対して, 次のような固有値を得ることができる。

$$\begin{aligned} \lambda_{1H} &= 1 - \frac{1}{(e+1)^2} - \frac{1}{\beta_*} + \frac{4e}{(e+1)^4} \frac{1}{w^4}, \\ \lambda_{1V} &= \frac{e^2}{(e+1)^2} - \frac{1}{\beta_*} + \frac{4e^3}{(e+1)^4} \frac{1}{w^4} \end{aligned} \quad (54)$$

これから, リッツの原理によって, 成長率 γ を計算すると, β_* に対する平衡の関係式を用いて,

$$(\gamma_{\pm} a / v_A)^2 = \bar{\beta} a^2 (C_0 \pm C_2) - \frac{16e^2}{(e+1)^4} \frac{\bar{\beta}^2}{w^4} \frac{1}{L} \int_0^L |A'|^2 dz \quad (55)$$

をうる。ここで+符号は垂直方向の変位に対するもので, -符号は水平方向の変位に対するものである。なお, ここで求めた成長率 γ は, 密度が p と同じ Ψ 依存性をもつ場合には, 正しい固有値となっている。(55)を Miller による鋭いプラズマ境界をもつ円形断面ピンチの計算^[5]と比較すると, $\beta \ll 1$ のとき似た形になっていて矛盾してはいない。

§ 6. 結 論

前節の安定性の計算は、 $\ell = \pm 1$ の系においては、交換不安定性（フルート・モード）は安定化されうるが、磁力線の形をかえるような、低 m の不安定性が存在すること、この不安定性に対して、導体壁を十分プラズマの近くにおけば安定化されうることを示している。一般的には、水平方向への不安定性は磁場配位を適当に選ぶことによって導体壁に依らずに安定化できる。しかし、垂直方向の不安定性は、導体壁をプラズマ表面に密着させても、安定化することはできない。

この結果は、MB T実験でのセクター・プラズマの見かけ上の安定性を説明しない。

前節までの計算において、次のような一般化が容易に可能である。(24)の右辺に、外部磁場として $\ell = \pm 4$ の成分を加えると、(25)の右辺に $C_3 (x^3 - 3xy)$ という項があらわれる。このとき、プラズマの断面にもはや楕円ではなくなり、平衡解は数値的にしか求められなくなる。また、プラズマの位置は β の値によって変わる。プラズマの断面が三角形の成分をもつことが、安定性にどのような影響を与えるかは十分興味ある問題である。

REFERENCES

- 1) J. Todoroki, Plasma Physics, 18 (1976) 137.
- 2) J. Todoroki, J. Phys. Soc. Japan, 45 (1978) 635.
- 3) J. Todoroki et al., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1976 (IAEA, Vienna, 1977) vol. 2, p. 215.
- 4) R. L. Morse, W. B. Riesenfeld and J. L. Johnson, Plasma Phys., 10 (1968) 543.
- 5) G. Miller, Phys. of Fluids, 20 (1977) 928.
- 6) H. Grad, Phys. of Fluids, 10 (1967) 137.
- 7) H. Grad, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research 1971 (IAEA, Vienna, 1971) vol. 2, p. 229.
- 8) R. V. Lüst and E. Martensen, Z. Naturforsch, A 15 (1960) 706.