研究ノート

円筒型イオンビーム・プラズマ系の不安定イオン波

中村定男, 湯山哲守, 久保 熙

(京大・教養)

(1982 年 11 月 12 日受理)

The unstable ion waves in cylindrical ion
beam—plasma system

Sadao Nakamura, Tetsumori Yuyama and
Hiroshi Kubo

(Received November 12, 1982)

Abstract

A dispersion relation is derived for an ion beam—plasma system located in a cylinder with perfectly conducting wall. There are able to be many waves formed of the eigen modes. One of these eigen modes can be unstable though the velocity of the ion beam is greater than that of the ion acoustic wave. The frequency region in which the wave becomes unstable jumps from higher to lower mode with increasing the length of the cylinder. A growth rate of the unstable wave is large for a large value of $\beta_{m,n}/a$, here a and $\beta_{m,n}$ are a radius of the cylinder, the n th root of Bessel function J_m , respectively. The experimental results agree qualitatively with the theory.

§ 1. 序 論

実験においてイオンビームの速さがイオン音波の速さより十分に大きいにもかかわらずよくイオン波が励起されることがある。又、同時に励起された波の周波数間にはほぼ整数倍の関係が成り立つ場合がよくある。^{1.)} ビーム速度が大きくてもイオン波の伝播方向がビームに対し斜めであれば波は励起され得るが同時に多くのイオン波が容易に励起されることは無限大系では説明出来ない。ビームに速度の広がりを考慮しても同じである。このほぼ整数倍の関係を有するイオン波

が励起されるのは装置の大きさが有限である事に原因があると思われる。つまり固有モードがイオンビームのために不安定になるためと思われる。Allis 等²⁾は導波管中のプラズマの電磁界をいろいろな場合について詳しく調べている。しかし縦波に対する取扱いはほとんどなく又軸方向の有限性については取扱っていない。ここではこの固有モードの特性を調べるために円筒型イオンビーム・プラズマ系中の波の分散式を線形化された流体方程式より導いた。分散式の導出に当ってすべての摂動量は円筒の側面及び上下面で零と云う境界条件を用いた。得られた分散式は与えられた系の半径及び長さに対して多くの固有モードが存在する事を示し更に固有モードの一部はビーム速度が音速よりかなり大きくても不安定になる事を示す。又この不安定部分は系の長さと共にその周波数を減じながら次々と新しいモードへ移り変わることも示す。この不安定波の成長率は系の半径が小さい程、ベッセル関数の零点の次数が高い程大きい。メッシュで作った円筒中で行なった実験においてこのモード間の強度変化及び長さによる周波数変化が共に観測された。

§ 2. 分散関係式

1 図の如く半径 a , 長さ L の中に一様にプラズマが存在しこれに同じ径で速さ v_0 のイオンビームを注入する場合を考える。円筒の側面及び上下面は接地しここでの電位は零とする。系中の各種粒子密度, 速度及び電位を次の流体方程式で記述する。

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot n_j \mathbf{v}_j = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = -\frac{q_j}{m_j} \nabla \varphi - \gamma \frac{k T_j}{m_j n_j} \nabla n_j \quad (2)$$

1 図 イオンビーム・プラズマ系の円筒モデル

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_j n_j q_j \quad (3)$$

和はプラズマ電子, プラズマイオン及びビームイオンについて行う。 γ は比熱の比で電子に対して変動はゆるやかとする($\gamma=1$)。簡単化のために各量を摂動展開し, プラズマ粒子のドリフト運動はなくプラズマイオン及びビームの温度効果を無視する。摂動量の時間依存を $e^{-i\omega t}$

とすると各摂動量の満足すべき式は次のような形に求められる。

$$\nabla^2 n_e + n_e \frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} = - \frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} n_b \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 n_b}{\partial z^2} - \frac{2i\omega}{v_0} \frac{\partial n_b}{\partial z} - n_b \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} = \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{\omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} n_e \quad (5)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \frac{q}{\epsilon_0} (n_e - n_b) \quad (6)$$

ここで ω_j はプラズマ振動数, $\omega_j^2 = n_{j0} q^2 / m_j \epsilon_0$, $j = i, e, b$, v_e は熱速度, $v_e^2 = k T_e / m_e$, v_0 はビームの速さで向きを z 一方向とした。(4), (5) 式よりビーム密度の摂動量のみたすべき式は4階の微分方程式となる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 n_b}{\partial z^2} - \frac{2i\omega}{v_0} \frac{\partial n_b}{\partial z} - n_b \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) + \\ \frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \left(\frac{\partial^2 n_b}{\partial z^2} - \frac{2i\omega}{v_0} \frac{\partial n_b}{\partial z} - n_b \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$n_b = R(r) \Theta(\theta) Z(z)$ と変数分離を行うと円筒座標に対し Z の満たすべき式は次のように求められる。

$$\begin{aligned} Z^{(4)} - \frac{2i\omega}{v_0} Z^{(3)} + Z^{(2)} \left(\frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} - \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} - s^2 \right) \\ + Z^{(1)} \frac{2i\omega}{v_0} \left(s^2 - \frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) + Z \frac{\omega^2}{v_0^2} \left(s^2 \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right. \\ \left. - \frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$Z^{(n)} = d^n Z / dz^n$, s^2 は下の式から与えられる。

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + s^2 = 0 \quad (9)$$

Z の空間依存を, $Z \propto e^{ikz}$ と仮定すると k は次の式から決定される。

$$\begin{aligned}
 k^4 - \frac{2\omega}{v_0} k^3 - k^2 \left(\frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} - \frac{\omega^2}{v_0^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} - s^2 \right) \\
 - k \frac{2\omega}{v_0} \left(s^2 - \frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) + \frac{\omega^2}{v_e^2} \left(s^2 \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right. \\
 \left. - \frac{\omega^2}{v_e^2} \frac{\omega^2 - \omega_i^2 - \omega_e^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_i^2} \right) = 0
 \end{aligned} \quad (10)$$

上式より求められる k の 4 根を用いて n_b の一般解が求まる。

$$n_b = J_m(sr) \left\{ \begin{array}{c} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right\} \sum_{j=1}^4 A_j e^{ik_j z} \quad (11)$$

ここで A_j は任意定数である。これより他の摂動量はすぐに求められる。

$$\begin{aligned}
 n_e &= J_m(sr) \left\{ \begin{array}{c} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right\} \sum_j A_j e^{ik_j z} \left\{ 1 - \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{\omega^2} \left(\frac{k_j v_0}{\omega} - 1 \right)^2 \right\} \\
 \varphi &= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{\omega^2}{\omega_b^2} J_m(sr) \left\{ \begin{array}{c} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right\} \sum_j A_j e^{ik_j z} \frac{\left(\frac{k_j v_0}{\omega} - 1 \right)^2}{s^2 + k_j^2} \\
 &\quad + A_5 \varphi_5 + A_6 \varphi_6
 \end{aligned} \quad (12)$$

$\varphi_{5,6}$ は $\nabla^2 \varphi = 0$ の一般解である。各摂動量が境界 $z = 0$, L 及び $r = a$ で零, 円筒内で有限な値を取るためには任意定数 A_j はお互い独立でなくそのデターミナントが零でなければならない。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 \\ E_1 G_1 & E_2 G_2 & E_3 G_3 & E_4 G_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

$E_j = e^{ik_j L}$, $G_j = 1 - \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{\omega_b^2} \left(\frac{k_j v_0}{\omega} - 1 \right)^2$. $r = a$ で摂動量が零となる条件より s が決定される, $s = \beta_{m,n}/a$, $\beta_{m,n}$ はベッセル関数 $J_m(sr) = 0$ の n 番目の根である。この $\beta_{m,n}$ を用いると円筒の長さが十分大きなビーム・プラズマ系の分散式は (10)

式の s^2 を $\beta_{m,n}^2 / a^2$ で置き換えることに依って与えられる。

§ 3. 分散特性

(10)式の分散関係を根 $\beta_{m,n}$, $s = \beta_{m,n}/a$, をパラメーターとし, $T_e = 2.4$ eV, $v_0/v_s = 1.8$, $\eta = 0.13$, $R = 4$ cm の諸量に対して示したのが2図である。横軸は波数 k , 縦軸は ω_i で規格化された周波数である。 $\beta_{0,0}$ の分枝は半径を無限大とした場合の分散関係である。この場合は不安定波は生じない。

しかし半径が有限になるとイオン音波とビームのスロー波が結合し波は不安定となることがわかる。この不安定波の周波数領域及びその成長率は根の次数と共に増大する。更に $k=0$ の振動モードが出現する³⁾ ことも特徴的である。

3図に示すのは J_0 ベッセルの初めの根, $\beta_{0,1} = 2.4$ に対し系の半径を変えた場合の分散特性である。半径を小さくする程不安定波の発生する領域は増大し成長率も大きくなる。当然であるが半径の小さなプラズマ程境界の影響を強く受ける事になる。

次に z 一方向にも $z=0$, L で摂動

量が零と云う条件を課すと(10)式は同時に(13)式も満たさなければならない。したがって波数 k を実数として任意に与えることは出来ない。 z の場合の特性を前と同じ諸量に対して示したのが4図である。横軸は円筒の長さ L , 縦軸は周波数である。2, 3図に比べ波はほぼ等間隔の多くの固有モードに分離し L の増大と共にその周波数は減少する。これ等のモードの一つはある L の範囲で不安定である。その不安定な領域は L を増大するにつれてある値より低い周波数のモードへ急に転移する。したがって強調される波は与えられた L の値に依って異なることになる。

5図は L の値を固定しビームの密度 η を変えた場合の各モードの様子である。 η に対しても特

2図 有限径 ($r = 4$ cm), 無限長イオンビーム・プラズマ系の分散関係

$r = \infty$ ($\beta_{0,0}$ の分枝) の場合にはイオン音波 (a) とビームのスロー波 (s) は結合せず安定である。径が有限になると両者は結合して不安定になる。又ファースト波の振動モード ($r=0$) も出現する。

$\beta_{m,n} : J_m$ の n 番目の根, $v_0/v_s = 1.8$ 。

定の所で不安定となるモードが存在する。この領域も η の増大につれて周波数の低いモードへと移行する。不安定となる領域では周波数も変化する。

6図はビームの速さを変えた場合の特性である。 v_0/v_s が大きい領域では各モードの周波数はほとんど一定となり変化しない。 v_0/v_s を小さくすると $v_0/v_s = 1.9$ 位より周波数の高い方のモードで不安定となりその領域は低い方へ移行する。この領域では周波数の変化も起

3図 径に依る無限長分散関係の変化。

径が小さくなると不安定波の発生する領域も広くなり成長率も増大する。 $\beta_{0.1} = 2.4$

4図 有限径, 有限長イオンビーム・プラズマ系の分散関係。

有限長では波は多くの固有モードに分離する。与えられた L に対し特定のモードは不安定になる。この不安定領域は L に依って他のモードへ移行する (太線部分)。

る。更に v_0/v_s を小さくすると特定のモードが2図の不安定波に対応する不安定波を形成する。

§ 4. 不安定機構について

2図に示したように無限大系 ($\beta_{0.0}$ の分枝) では安定な波も半径を有限にするのみで不安定になる。この機構は次のように考えられる。無限大系では $v_0/v_s = 1.8$ の時イオン音波とビームは相互作用出来ない。しかし半径を有限にし境界条件を入れると波は実効的に r 方向の波数 $k_{\perp} = \beta_{m,n}/a$ をもつ

ことになる。するとビームに対する波の伝播角は $\tan \delta = k_{\perp}/k$ となりビーム方向の位相速度, $v'_{ph} = v_{ph} / \cos \delta$, は $k_{\perp}$ と共に増大する。したがって $\beta_{m,n}/a$ を増大するとビー

円筒型イオンビーム・プラズマ系の不安定イオン波

5 図 ビーム密度による固有モードの変化 η の値のある範囲で特定のモードは不安定になる。この領域はモード間を移行し周波数の変化も起る。

6 図 ビームの速さによる固有モードの変化 v_o / v_s の大きい所で固有モードの周波数はほとんど変化しないが小さい方で不安定になるモードが現われる。この附近でほとんどのモードの周波数が急に増大する。

μ方向の位相速度はビームの速さに達し二流体不安定が発生出来るようになる。2図の不安定領域に対する4図のLの大きい所の不安定はここで述べた実効的な斜め伝播に依り発生したものである。

次に2図の不安定波が発生する周波数領域よりも高い領域で発生している4図の不安定波については以下のように考えられる。この不安定波は低周波側の不安定波の延長線上にあってモード間を移行している。z-方向を有限にする事に依って新たに生じるのは系内での波の多重反射である。これによって波のエネルギーは帰還され一旦ビームと波の相互作用が生じると長期にわたってその状態は続く。波が増大するためにはその位相速度とエネルギー源となるビームの速さがほぼ一致する必要がある。Lを小さくすると対応する波数は大きくなるので周波数が一定ならば位相速度は減少する。位相速度がビームの速さ程度を保つためには同時に周波数も増大する必要がある。しかし周波数変化は同じモード上に限られるためにビームと共鳴出来る範囲は限定される。したがって更にLを減じた場合共鳴出来る領域はより周波数の高いモードへ移行する。これがより高い周波数領域でモードの一部が不安定となりそれが移行する理由である。尚この場合斜め伝播は本質的ではない、 $r \rightarrow \infty$ ($\beta_{0,0}$ の分枝)でもz-方向の有限性に依って上記のような不安定が起る。

§ 5. 実験結果

7図は実験装置の概要である。左側がイオンビームのソース部, 右側がプラズマ部である。イオンビームは格子Gの電位を上下することによって得ている。境界の影響はz-方向に対しては

7図 実験装置の概略図

後方拡散型プラズマ (右側) に格子Gで加速されたイオンビームが左側から注入される。

150 メッシュシリンダーの半径6 cm, G: 200 メッシュ, m.p.: 可動境界用円板。

接地された金属円板を移動することに依り, r-方向に対しては半径の異なる格子 (150 メッシュ) のシリンダーを取換える事に依って調べる。使用気体は圧力, $p = 2 \cdot 10^{-4}$ torr のヘリウムである。代表的な諸量は, 密度約 $10^8 / \text{cc}$, 温度 $T_e = 3.5$ eV, ビーム密度比 $\eta = 0.1$, ビームの加速電圧は二流体不安定が無限大系では生じない $v_0 / v_s = 1.8$ である。

まず円筒の格子を入れない場合 ($r = 12$ cm に対応) に励起される波のスペクトルを8図に示す。図のパラメーターは格子Gと金属板との間隔Lである。基本波, $f \simeq 90$ kHz とそのほぼ倍

振動の波が励起されLを増大すると各モードの周波数は単調に減少する。この場合は半径が大きいためにモード間の相対的な強度変化はこの範囲ではみられない。

8図 有限系イオン波の周波数スペクトル。

$v_0 / v_s = 2.4$ でも多くの固有モードが同時に励起されその周波数は間隔Lの増大につれて単調に減少する。 $f_1 \simeq 1$ MHz, $\eta = 0.1$, $r = 12$ cm。

9図は円筒格子の半径が $r = 6 \text{ cm}$ の場合のスペクトルである。中央部の二つのモード間で L を増大すると周波数の減少と共に強度が高い方から低い方へ移行するのがみられる。

他にビーム速度の変化に対しては励起された波の周波数がほとんど変化しない事が観測された。

§ 6. 結論及び検討

以上の実験結果から系の大きさが有限である場合ビーム速度がイオン音波の位相速度より十分に速くても

- 1) イオン波及びほぼその倍振動数の波が励起される,
 - 2) 波の周波数は系の軸方向の長さと共に単調に減少する,
 - 3) 系の半径が小さくなると軸方向の長さと共にモード間で波の強度の相対的な変化が起る,
- ことがわかった。

これ等の実験結果はここで導かれた有限系の分散式の特性と定性的に一致する。したがって有限であるゆえに不安定が発生する機構がありそれは§ 4で述べた内容によく対応していると思われる。

しかし量的には間隔 L を格子 G からとした場合の一致はよくない。又理論では与えられた r, L に対し成長率を有するのは特定の分枝のみである

が実験では多くの分枝が同時に励起される。これは励起された一つの波のエネルギーが多重反射によりモード間結合を生じ次々と別の固有モードに分配されるためと考えられる。9図では低周波側に L を増大すると周波数も増大する波がある。この波の強度は円筒の外側、金属板の後方で最も強い事が別のプローブを使って確認された。したがってこの場合も L に対する周波数の依存

9図 有限系イオン波の周波数スペクトル。
 $r = 6 \text{ cm}$ にした場合図の中央部に励起されたイオン波の強度は L を減少するにつれて周波数の高い方が相対的に大きくなる。 $v_0 / v_s = 1.8$ 。

中村, 湯山, 久保

は一応他の波と同じである。この波の励起機構は装置の壁近くでビームがスローダウンし音波が励起され易くなったためと思われる。今後はより理論的な条件に近い円筒ビーム・プラズマ系の実験を行い分散関係への境界の影響を詳しく調べる必要がある。尚数値計算には京都大学大型計算機を利用した。

参 考 文 献

- 1) S. Nakamura, T. Yuyama, M. Takeyama and H. Kubo : J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982) 3006.
- 2) W. P. Allis, S. J. Buchsbaum and A. Bers : Waves in Anisotropic Plasma (The MIT. Press, 1963) p. 207.
- 3) H. Momota, T. Takizawa and R. Itatani : J. Phys. Soc. Jpn. 29 (1970) 529.