一様な磁場をつくる方法^{*}

※※

桑 原 真 二 (東大理)

§1 は し が き

プラズマの実験において、一様な磁場をつくる必要がある¹⁾。円柱状のコイルではどうしても end effect があらわれて、ある程度、不正確であることをまぬがれない。この論文では、球形あるいは回転楕円体(長形、扁平)の表面に回転軸のまわりに等間隔に導線をまいたコイルを考える。そうすると、その中に軸に平行な磁場がえられることをしめす。

我々はコイルの電流を表面電流でおきかえる。基礎方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (1.2)$$

である。ここで $|\mathbf{B}| (= \mu_0 \mathbf{H})$ は磁束密度、 $\mathbf{H}$ は磁場の強さである。ここでは MKS 有理系を用いる。(1.2) から

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \phi$$

を満足する磁気ポテンシャル ϕ が存在する。これを (1.1) に代入すると

$$\Delta \phi = 0 \quad (1.3)$$

をうる。

境界条件は

$$\text{無限遠で} \quad \operatorname{grad} \phi = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{コイル表面で} \quad \operatorname{grad}_n \phi_1 = \operatorname{grad}_n \phi_2 \quad (1.5)$$

$$\operatorname{grad}_t (\phi_2 - \phi_1) = \mathbf{J} \times \mathbf{n} \quad (1.6)$$

である。ここで ϕ の suffix 1, 2 はコイルの外と内の量をあらわし、 $\mathbf{J}$ は表面電流の面密度である。 $\mathbf{n}$ は外むきの単位法線ベクトル、 grad の suffix n, t はコイルの表面における法線および接線成分をあらわす。

* Construction of Uniform Magnetic Field

※※ S. Kuwabara (Dept. of phys, Tokyo University)

§ 2. 球形コイルの場合

球形コイルの場合には、(1.3)は極座標 (r, θ, φ) をつかつて

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right\} \phi = 0 \quad (2.1)$$

となる。今

$$\phi = f(r) \cos \theta$$

とおくと、

$$f(r) = \frac{A}{r^2} \text{ あるいは } Br \quad (A, B \text{ は定数}) \quad (2.2)$$

となる。才2の特解 $\phi = Br \cos \theta = Bz$ は z 方向に一様な磁場となる。そこで、外と内のポテンシャルとして

$$\phi_1 = \frac{A}{r^2} \cos \theta \quad (2.3)$$

$$\phi_2 = - \frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta \quad (2.4)$$

とおくと、コイルの中では一様な磁場 B_0/μ_0 、無限遠では $\text{grad } \phi \rightarrow 0$ の条件を満足している。

表面 $r=R$ で (1.5) を適用すると

$$A = \frac{1}{2} \frac{B_0}{\mu_0} R^3 \quad (2.5)$$

をうる。次に (1.6) から、 φ 方向の表面電流密度 I

$$I = \frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \quad (2.6)$$

をうる。今表面電流の z 軸の単位長さあたりの電流密度を I' とすると

$$I' = I \left| \frac{ds}{dz} \right| \quad (2.7)$$

である。ここで s はコイルの球にそつて、子午面上ではかつた長さである。

$$\left| \frac{ds}{dz} \right| = \frac{1}{\sin \theta}$$

であるから

一様な磁場をつくる方法

$$I' = \frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \quad (2.8)$$

をうる。これは θ によらず一定である。

§ 3. 長い回転楕円体の場合

z 軸を回転楕円体の軸にとると、楕円体座標 (u, v, φ) は

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sinh u \sin v \cos \varphi \\ y &= c \sinh u \sin v \sin \varphi \\ z &= c \cosh u \cos v \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

とかける (才1図)。

第1図 長い楕円体コイルの電流と磁場

ここで $u = \text{const}$ は長い回転楕円体をあらわす。今、コイルの楕円体を $u = u_0$ であらわすと、楕円の長、短軸 a, b は

$$a = c \cosh u_0, \quad b = c \sinh u_0 \quad (3.2)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (3.3)$$

であらわされる。コイルの楕円体は

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2 \cosh^2 u_0} + \frac{r^2}{c^2 \sinh^2 u_0} = 1, \quad (r^2 = x^2 + y^2) \quad (3.4)$$

である。

(1.3) は

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sinh u \sin v \frac{\partial \phi}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\sinh u \sin v \frac{\partial \phi}{\partial v}) = 0 \quad (3.5)$$

となる。今

$$\phi = f(u) \cos v$$

において、(2.5) の解を求めると、二つの特解

$$A c \cosh u \cos v = A z \quad (3.6)$$

$$\phi = \left\{ A' \left\{ 1 + \frac{\cosh u}{2} \log \frac{\cosh u - 1}{\cosh u + 1} \right\} \cos v \right. \quad (3.7)$$

をうる。さて、外と内のポテンシャルとして

$$\phi_1 = A \left(1 + \frac{1}{2} \cosh u \log \frac{\cosh u - 1}{\cosh u + 1} \right) \cos v \quad (3.8)$$

$$\phi_2 = -\frac{B_0}{\mu_0} c \cosh u \cos v \quad (3.9)$$

とおくと、中で一様な磁場 B_0/μ_0 であり、無限遠では $\text{grad } \phi \rightarrow 0$ である条件を満足している。

次に境界条件(1.5)より

$$A = -\frac{B_0 c}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\cosh u_0 - 1}{\cosh u_0 + 1} + \frac{\cosh u_0}{\sinh u_0} \right\} - 1 \quad (3.10)$$

をうる。(1.6) から表面電流の強さ I (ϕ 方向) として

$$I = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\sin v}{\sqrt{\cosh^2 u_0 + \cos^2 v}} \frac{1}{\sinh u_0 \left\{ \frac{\sinh^2 u_0}{2} \log \frac{\cosh u_0 - 1}{\cosh u_0 + 1} + \frac{\cosh u_0}{\sinh u_0} \right\}} \quad (3.11)$$

をうる。今、表面電流の z 軸の単位長さあたりの電流密度を I' とすると

一様な磁場をつくる方法

$$\frac{ds}{dz} = - \frac{\sqrt{\cosh^2 u_0 + \cos^2 v}}{\cosh u_0 \sin v}$$

となるから(2.7)によつて

$$I' = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{1}{\sinh 2u_0 \cosh u_0 \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\cosh u_0 - 1}{\cosh u_0 + 1} + \frac{\cosh u_0}{\sinh 2u_0} \right\}} \quad (3.12)$$

をうる。これは v によらず一定である。

$u_0 \rightarrow \infty$ と同時に $c \cosh u_0, c \sinh u_0 \rightarrow R$ とすれば limiting case として球の場合がえられる。(3.12)において $u_0 \rightarrow \infty$ の極限では

$$I' = \frac{5}{2} \frac{B_0}{\mu_0}$$

となり、(2.8)と一致する。

§ 4. 扁平な回転楕円体の場合

§ 3. と全く同様にして扁平な回転楕円体の場合にも解析を行うことができる。この場合の楕円体座標は、

$$\begin{aligned} x &= c \cosh u \sin v \cos \varphi \\ y &= c \cosh u \sin v \sin \varphi \\ z &= c \sinh u \cos v \end{aligned} \quad (4.1)$$

で(1.3)は

$$\frac{\partial}{\partial u} (\cosh u \sin v \frac{\partial \phi}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial v} (\cosh u \sin v \frac{\partial \phi}{\partial v}) = 0 \quad (4.2)$$

外と内のポテンシャルは

$$\phi_1 = A \left\{ 1 + \sinh u \cdot \arctan(\sinh u) - \frac{\pi}{2} \sinh u \right\} \cos v \quad (4.3)$$

$$\phi_2 = \frac{B_0 c}{\mu_0} \sinh u_0 \cos v \quad (4.4)$$

となる。ここで境界条件から

$$A = \frac{B_0 c}{\mu_0} \frac{1}{\arctan(\sinh u_0) + \frac{\sinh u_0}{\cosh 2u_0} - \frac{\pi}{2}} \quad (4.5)$$

である。表面電流の強さは

$$I' = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{1}{\sinh u_0 \cosh^2 u_0 \left\{ \arctan (\sinh u_0) + \frac{\sinh u_0}{\cosh^2 u_0} - \frac{\pi}{2} \right\}}$$

となる。limiting case 球の場合 ($u_0 \rightarrow \infty$) においては

$$I' = \frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0}$$

となり、(2.8)と一致する。

§ 5. 結 論

上の解析の結果、回転楕円体 (球もふくめて) の表面に等間隔に導線をまいたコイルの中では、
 一様な磁場がえられる。軸の単位長さあたりの表面電流の強さを I' とすると中の磁場の強さ
 B_0/μ_0 は

$$\frac{B_0}{\mu_0} = I' F(k)$$

で表わされる。ここで $F(k)$ は (3.12) から長形の時 ($k \geq 1$)

$$F(k) = \frac{k}{k^2 - 1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \log \frac{k - \sqrt{k^2 - 1}}{k + \sqrt{k^2 - 1}} + k \right\}$$

(4.6) から扁平の時 ($k \leq 1$)

$$F(k) = \frac{k}{1 - k^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} - k \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \arctan \left(\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} \right) \right\}$$

となる。ここで k は楕円体の長さとおさの比で

$$\text{長形の時} \quad k = \frac{\cosh u_0}{\sinh u_0} \geq 1$$

$$\text{扁平の時} \quad k = \frac{\sinh u_0}{\cosh u_0} < 1$$

である。

(5.1)には長さをあらわす量をふくんでいない。それ故磁場の強さは I' と k だけにより大さ
 によらない。オ1表とオ2図に $F(k)$ と k との關係の計算結果がしめしてある。

一様な磁場をつくる方法

参 考 文 献

- (1) 日大案の高温プラズマ装置、例えば核融合研究 vol4 No.6 p579
- (2) Sommerfeld: Electrodynamics p92, Academic Press, 1952

第2図 (5・1) 式の $F(k)$ の図

第1表

K	$F(k)$	
0.1	0.139	扁平
0.143	0.190	
0.2	0.250	
0.333	0.365	
0.5	0.473	
1	0.667	球
2	0.826	長形
3	0.891	
5	0.944	
7	0.965	
10	0.980	