Plasma から出る Čerenkov radiation*,**

青 野 修 (東大理)***

We consider the total energy radiated by a charged particle moving with a nonrelativistic speed in a dilute magnetoplasma along the line of force.

Under the condition that the logarithm factor is much larger than unity, we obtain the following result:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e^2 \omega_o^2}{2v} \log \frac{v^2}{(\omega_o^2 + \omega_H^2) \lambda_m^2},$$

where e is the charge of the particle, ω_o is the plasma frequency, v is the velocity of the particle, ω_o is the gyration frequency of the electron constituting the plasma, λ is the minimum wave length of the radiation and is the order of magnitude of the mean distance between electrons.

一様な磁場中にある Plasma の中を、荷電粒子が磁場の方向に等速度で運動する時に出る Čerenkov radiation を計算した。磁場は十分つよく(電子の円運動の周期の間の衝突を無視できる)、粒子の速度は真空中の光速より十分小さいとする。

計算の方法には、Hamiltonian を使う方法¹⁾、Poynting vector を使う方法²⁾ 等があるが、ここでは A.G. Sitenko - A.A. Kolomenskii²⁾ に従って初等的に計算した。

点電荷 q が速度 v で運動する時に作られる場は、Maxwell の方程式で与えられる:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}; & \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} q \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}); \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0; & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}); \end{aligned} \quad (1)$$

* Čerenkov Radiation from Plasma
 ** 才3回 Study group で報告
 *** O. Aono (Department of Physics, Tokyo University)

場の量をFourier成分に分けて考察する：

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{k} d\omega \quad \text{等}; \quad (2)$$

$$D_i(\mathbf{K}, \omega) = \epsilon_{ik} E_k(\mathbf{k}, \omega); \quad \epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}^*.$$

(1), (2)から、電場のFourier成分に対して次の式を得る：

$$T_{ik} E_k = -i \frac{q}{2\pi^2} \frac{v_i}{\omega^2} \delta\left(\frac{n}{c} \kappa_j v_j - 1\right); \quad (3)$$

$$T_{ik} = n^2 (\kappa_i \kappa_k - \delta_{ik}) + \epsilon_{ik}, \quad (4)$$

$$n^2 = k^2 c^2 / \omega^2, \quad \kappa_i = k_i / k.$$

逆 tensor T_{ik}^{-1} を用いて、(3)の解を次の形に表わす：

$$E_k = -i \frac{q}{2\pi^2 \omega^2} T_{ki}^{-1} v_i \delta\left(\frac{n}{c} \kappa_j v_j - 1\right) \quad (5)$$

運動する粒子のenergy lossesを計算するために、次の関係を使う：

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = -q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{r} = \mathbf{v} t. \quad (6)$$

(5), (2)を使つて、total energy lossesは(6)から次の様に書かれる：

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = i \frac{q}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{k_m} \int_{4\pi} T_{ki}^{-1} v_k v_i \delta\left(\frac{n}{c} \kappa_j v_j - 1\right) \frac{d\omega}{\omega^2} k^2 dk d\Omega. \quad (7)$$

$k_m = 1/\lambda_m$ で、 λ_m はPlasmaを巨視的媒質とみなし得る最小の長さで、電子間の平均距離の程度である。

(7)式を一様で十分強い磁場の中にあるPlasmaの中を、磁場の方向に等速度で運動している粒子に応用する。

このとき、 ϵ_{ik} は次の様になる：

Plasma から出る Cerenkov radiation

$$(\varepsilon_{ik}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1 - \omega_0^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}, \quad n, e, m \text{ は電子の密度、電荷、質量};$$

$$\omega_H = \frac{eH}{mc}.$$

⁻¹
T_{ik} を計算するために、T_{ik} の determinant T が必要であるが、それは下の式で与えられる:

$$\begin{aligned} T &= (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta) n^4 - \{ (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) \} n^2 + \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \\ &= (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta) (n^2 - n_1^2) (n^2 - n_2^2); \end{aligned} \quad (9)$$

θ は、磁場の方向と $\mathbf{K}$ とのなす角であり、

$n_{1,2}^2$ は、 $T(n^2) = 0$ の根である。

(9) を使って、(7) は次の形となる:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= i \frac{q^2 v^2}{\pi c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{n_m} \int_0^\pi \frac{n^4 \cos^2 \theta - n^2 \varepsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{(\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta) (n^2 - n_1^2) (n^2 - n_2^2)} \delta(n\beta \cos \theta - 1) \\ &\quad \times \sin \theta \, d\theta \, n^2 \, dn \, \omega \, d\omega; \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad k \text{ は } k = \frac{n\omega}{c} \text{ で置きかえた。} \quad (10)$$

角度 θ で積分すると、 n の積分は $1/\beta < n < n_m$ ($n_m = \frac{k_{mc}}{\omega}$) の範囲に制限され、(10) は (11) となる:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{q^2 v}{\pi c^2} \operatorname{Re} \int \frac{(1-\varepsilon_1 \beta^2)(n_1^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 \beta^2 (n_1^2 - n_2^2)} \log \frac{n_m^2 \beta^2 - n_1^2 \beta^2}{1 - n_1^2 \beta^2} \omega d\omega$$

+{ n_1^2 と n_2^2 とを入れかえた式};

$$n_{1,2}^2 \text{ は } \cos^2 \theta = 1/\beta^2 n^2(\theta) \text{ から定まる。} \quad (11)$$

(11) が値をもつのは $1 - n^2 \beta^2 < 0$ のときに限り、下の様になる:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{q^2 v}{c^2} \int \left| \frac{(1-\varepsilon_1 \beta^2)(n_1^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 \beta^2 (n_1^2 - n_2^2)} \right| \omega d\omega - \{n_1^2 \longleftrightarrow n_2^2\}; \quad (12)$$

積分はそれぞれ $n_m^2 \beta^2 > n_1^2 \beta^2 > 1$, $n_m^2 \beta^2 > n_2^2 \beta^2 > 1$ となる ω の範囲で行う。

(12) に (8) を入れると、Kolomenokii³⁾ の与えたものと一致する。

以下で (12) を具体的に計算する。

$\beta^2 \ll 1$ を入れると、(12) は次の様になる:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2v} \int \left| \frac{\nu^2 - \mu^2}{1 + \mu^2 - \nu^2} \right| d\nu^2; \quad \nu = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \mu = \frac{\omega_H}{\omega_0}. \quad (13)$$

n^2 は下の様になるから、

$$n^2 = \mu^2 / \{\beta^2 \nu^2 (1 + \mu^2 - \nu^2)\},$$

積分範囲は、次の不等式を満たす:

$$(\nu^2 - 1)(\nu^2 - \mu^2) > 0, \nu^2 < 1 + \mu^2; \nu^2 < 1 + \mu^2 - \frac{\mu^2}{\alpha^2 \beta^2}; \quad (14)$$

$$\alpha \text{ は } n_m = \frac{k_m c}{\omega} = \frac{\alpha}{\nu} \text{ から定まり、 } \alpha = \frac{k_m c}{\omega_0} = \frac{e}{\omega_0 \lambda_m} \text{ である。}$$

$$\alpha \approx \frac{c n^{1/3} \sqrt{m}}{\sqrt{4\pi} e \sqrt{n}} \approx 10^6 \pi^{1/6} \approx 10^4$$

Plasma から出る Cerenkov radiation

$\alpha^2 \beta^2 \gg \mu^2 > 1$ のとき、(13) の値は：

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2v} \log \frac{v^2}{\omega_H^2 \lambda_m^2}, \quad (15)$$

$\alpha^2 \beta^2 \gg 1 > \mu^2$ のとき

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2v} \log \frac{v^2}{\omega_0^2 \lambda_m^2},$$

上の2つをあわせて：

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2v} \log \frac{v^2}{(\omega_0^2 + \omega_H^2) \lambda_m^2}.$$

$\mu^2 \rightarrow \infty$ のとき：

$$-\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e^2 \omega_0^2}{2v}.$$

$\mu \approx 0$ のとき：

$\mu = 0$ のとき radiation は出ず、 μ が小さいとき(8)式が使えなくなるが、連続的に変化すると思われる。

$\beta^2 < \frac{\mu^2}{2(1+\mu^2)}$ のとき：

(14) のオ3式が満たされないから radiation は出ない。

(15) の graph

注: Čerenkov radiation が Bremsstrahlung よりはるかに多いことは興味あることである:

$$\check{\text{Čerenkov:}} \text{Bremss} \cong \frac{e^2 \omega_0^2}{2v} : \frac{e^6}{c^3 m \hbar} \quad n v = 1 : \frac{e^2}{\hbar c} \frac{v^2}{e^2}$$

境界で全反射して外に出ない。

references

- 1) A.A. Kolomenkii, JETP (USSR) 24 167 (1959)
 V. Ia. Eidman, *ibid.* 34 131 (1958)
 ibid. 36 1335 (1959)
- 2) A.G. Sitenko — A.A. Kolomenskii,
 ibid. 30 511 (1956)
- 3) A.A. Kolomenskii, Dokl. Akad. Nauk (USSR)
 106 (6) 982 (1956)

これは下記の本に引用してある:

J.V. Jelly. Čerenkov radiation and its application
 Pergamon Press 1958.