マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

高 山 一 男 (電気通信研究所)[※]
大 原 省 爾 (")
池 上 英 雄 (")

あ ら ま し

マイクロ波によつてプラズマ密度を測定する目的で導波管内に放電管を挿入し反射係数を測定した。これと同時に導波管内にプラズマ柱のある場合の反射係数と密度の関係を密度分布を考慮して電磁界方程式から導いた。この間の一致は10% 以内で十分に満足すべきものである。更に探針によつて密度測定を行い実験誤差の範囲内でマイクロ波で測定したものと一致する結果を得た。

反射法による密度測定の特長は使用 μ 波周波数に対する臨界密度の100倍位まで測定出来ることである。例えば4000M c/sを用いても $10^{13}/\text{cm}^3$ の程度の密度まで測定出来る。

(4000M c/s μ 波に対する臨界密度は $1.9 \times 10^{11}/\text{cm}^3$)

ま え が き

電離層による電磁波の反射と透過から電子密度を求めているように、古くからプラズマに対する電磁波の伝播特性からプラズマの常数を求めることが行われていた。ところが人工衛星と人工惑星の出現によつて、プラズマ中の伝播に関する Seddon 法⁽¹⁾や Faraday 効果を用いた方法⁽²⁾によつて宇宙空間の電子密度が測定されるようになった。しかし、電磁波によるプラズマの測定が重視されるようになった最大の原因は、約10年以前から開始された熱核融合反応の研究である。すなわち、この研究では高密度のプラズマを非常に高い温度に加熱し、かつ閉じ込みのために強力な磁界を必要とする。また大電力となるのでプラズマの発生が短い時間に制限されている。このようなプラズマに於いては従来の測定法が適用できなくなるので新しい方法が必要

※ K. Takama, S. Ohara, H. Ikegami. (The Electrical Communication Lab., Nihon Telegram and Telephone public Corporation, Tokyo)

となつた。この要求に答え得る有力な一つの方法として注目されたものが「マイクロ波診断法」と呼ばれるマイクロ波によるプラズマの測定法である。

診断法の理論的研究の中で均一なプラズマに関するものは一応完成している。しかし実験室で必然的に附随する非均一なプラズマの理論的研究は今後に残されている。(3)

今日実験室で広く用いられているマイクロ波の測定には空洞法と干渉法がある。前者は共振器中に適当な形のプラズマを入れて共振周波数のずれから電子密度を、また半値巾から衝突周波数を求めるものである。後者はプラズマ中での μ 波の位相の変化と減衰係数から密度と衝突周波数を求める方法である。いつれの場合にも磁界のあるときの測定は簡単な特殊な状態に制限される(4)干渉法では電波がプラズマを通過する必要があるので電子のプラズマ振動数より高い振動数の mm 波を必要とする。空洞法では $10^9/cm^3$ 程度の密度が容易に測定されるが、近年、Persson(5)及びBuchsbaumとBrown(6)によつて $10^{12}/cm^3$ までの密度が測定できることが示された。

これらの外に電磁波のプラズマからの反射の状態を測定して密度を求める反射法がある。

反射法は実験室のプラズマ密度測定にはほとんど利用されていないが、波長がプラズマの半径より大きい場合には高い密度まで測定される特色がある。LovellとClog(7)は流星の跡のプラズマに8.3, 6, 5, 4.2, 及び1.4mの波長を用いて $10^{12}/cm^3$ の密度を測定している。実験室ではPartridgeとHarris(8)は小弾丸の通過後にできるプラズマに10cmのマイクロ波をあてたときの反射係数と同じ半径の銅の棒から反射したものを比較することによつて $10^{14}/cm^3$ 以上の密度を測定している。

われわれの研究は反射法に属するが、上述のものと異つて陽光柱を導波管に挿入してある。長い波長で高い密度のプラズマの測定を目標にし、陽光柱の密度分布を考慮した正確な理論から反射係数を導きこれによつて求めた密度とLangmuir探針から求めたものを比較することによつて測定法を吟味したものである。導波管に挿入した誘電体の反射係数の理論と実験(9)はすでになされているが、陽光柱の如く密度分布が一様でない場合の反射係数の計算はない。しかしマイクロ波による密度測定値と探針による測定値を比較したものにSchulzとBrown(10)の研究がある。これは共振器内にマイクロ波によつてつくつたプラズマの電子密度を空洞法によつて測定し、これをLangmuir探針のイオン捕集領域から求めたイオン密度と比較している。かれらの結果は0.1mmHg.以下の圧力に於いては電子密度とイオン密度はよく一致することを示したが、圧力が1mmHg.以上ではイオン密度が電子密度よりも大きく測定されている。

われわれの場合には陽光柱のプラズマは直流放電によつてつくられガスの圧力は0.1mm以上である。このような陽光柱は陽極振動と移動縞があつて探針測定は誤差が生ずるので振動の微小な

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

放電管により探針の飽和電子電流から電子密度を求めたものである。

実 験

§ 1. マイクロ波測定装置

この実験に用いた装置は才1図の如き通常の μ 波回路である。

才1図 実験装置

用いた μ 波の周波数は 4000Mc/s および 1000Mc/s の二種類である。反射係数の測定には μ 波を 400Mc/s でFM変調して定圧波測定器からの信号を増巾、直接に V. S. W. R を読み取ることが出来るようにしてある。

減衰器は 50db 以上の減衰を入れて測定系と発振系との結合を防止してある。更に整合器は単一スタブを用いて放電管ガラス壁からの反射を相殺する。導波管と放電管の結合は才2図に示すような結合器を用いた。

才2図 導波管、放電管結合器

この実験に用いた放電管はすべて熱陰極型で管内は大部分密度均一な陽光柱プラズマである。密度測定用として複探針が設けてあるがその露出部分は軸方向に向けて放電を乱さないようにしてある。複探針の一方は径方向に移動でき密度の径方向分布を測定する。

更に放電に伴う低周波振動は密度変動を伴う⁽¹⁾のでこれを抑制するために特別の工夫を行った。これは電極前面に網状グリッドを設けるものでこのようにした場合端子間振動電圧は10mV以下に抑制できる。He, Ne に対しては低周波振動は全く停止しその他の気体に対しても著しい抑制効果がある。特に陽極に原因のある振動に対しては完全に停止させることができる。陰極に原因のある振動に対しても効果が著しいがこのグリッドのみで振動の停止しない場合には陰極近傍に磁石をおいて之の位置を適当に調節すれば振動の止まることが多い。

このような方法で実験中は低周波振動は全く除き雑音的な高周波振動も10mV以下におさえて少くとも振動による密度変動はないようにした。才3図に放電管の構造を示す。

才3図 放 電 管

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

§ 2. マイクロ波測定結果

1000 MC/s の μ 波を用いて He を 0.5 mm Hg 入れた放電管の陽光柱プラズマの反射係数測定の結果を才 4 図に示す。導波管は W・P・J-1 の標準型矩形導波管でその中央に 30 ϕ の穴をあけ電界ベクトルに平行に放電管を挿入した。尚使用モードは TE₁₀ である。

放電管容器のガラスからの反射係数は 2 % である。これは単一スタップで整合を取つてあるため相殺されて測定結果には影響はない。

同様に 4000 MC/s を用いて測定した結果は才 5 図のようになる。この場合放電管と導波管の相対的な関係は 1000 MC/s の場合と同じであるが管の大きさは 8 mm ϕ となつている。

4000 MC/s を使用した場合は 1000 MC/s に比して残留反射が大きく放電管のガラスからの反射も 7 % にもなる。

才 5 図

§ 3. 探針による測定

探針は才 3 図に示すように、長さ 4 mm 直径の 0.2 mm のタングス線を放電管の軸上においたもので、1000 MC/s 用放電管は径方向に平行移動が可能である。電流電圧特性は時間的な諸量の変動をできるだけとり入れないために、X-Y 記録装置を用い、イオン電流飽和領域から電子電流飽和領域までの S 型曲線を 10 秒以内に記録した。4000 MC/s 用放電管の探針測定は管径が細いため探針による放電の乱れが大きく信頼出来るような密度測定はできなかった。以下述べることは 1000 MC/s 用の大きな放電管についての測定である。

才 6 図は探針の電圧—電流特性の一例であり、測定点の上下巾は繰り返し誤差の範囲を示す。

飽和点近くで直線性があり、電子電流の小さいところで下曲りの曲線をなすのは、イオン電流補正をしていないための効果と考えられる。電子温度は最大誤差範囲内に推定され、それに対応する密度範囲が決定された。

オ 6 図

§ 4. 電 子 密 度

オ 7 図には、放電電流を 20mA から 500mA まで変化させたときの、放電管中央での密度測定の結果が示されている。

電子密度は放電管の経方向には一様でなく、オ 8 図に見られるように、大体軸対称であり、

$$N = N_0 \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2} \right)$$

の形の分布であると考えてよさそうである。

これに基づいて、マイクロ波反射係数の計算では、密度分布を放物線的であると仮定した。

また、使用気体がヘリウムであるために、放電管軸方向におよそ、4 Volt/cm の電界がある。これは探針の両端で約 2 Volt の電位差を生じ、測定値にはこのための補正を加える必要があ

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

るかも知れないが、才7図ではなされていない。

管径方向の電界については、管壁から1mmのところまでの、電位降下が5%程度にすぎず、殆ど考慮する必要はない。

電子温度は、放電々流20mAで50000 °K、400mAで42000 °Kであり、大きな変化がない。

以上の密度測定値の信頼できる範囲は2桁までで、3桁までの有効数字を期待できない。

一般に探針測定法においては、電子温度は比較的容易に、正確に求まるが、肩特性における「肩の点」の決定にあいまいさがあり、密度の測定値の誤差の主な原因となつている。

注) 1) Langmuir - Mott-Smith の探針法⁽¹⁹⁾

電子電流飽和値を用いて電子密度を求め、電子電流と探針プラズマ間電位差特性から電子温度を求める。この方法の欠点は、i) 電子電流飽和点 (kink) の決定に誤差が多いこと。ii) 正イオン電流の電子電流に対する補正が困難なこと、従つて電子温度の決定に誤差を生ずる。iii) 飽和点附近では大きな電子電流をとるため、プラズマへの攪乱が大きく、また探針自体も加熱されて仕事函数が変化し熱電子放射など行い、時には探針自体の熔触により測定が不可能になる。

2) Johnson-Molter の複探針法⁽¹⁴⁾

プラズマから吸収する電流が正イオン飽和電流値により制限されるため、(1)に比し攪乱が少いという利点と、空間電位の変化にあまり影響されないという利点をもち過渡プラズマの測定などに多く利用される。欠点は i) 電子密度が求められないこと、特に電子温度が高い場合に問題がある。ii) 空間電位の決定が本質的に不可能なことである。

3) Schultz-Brown の探針法⁽¹⁰⁾

正イオン電流飽和領域からイオン密度を求める。従つて沢山の電流をプラズマから吸いとることによつて大きな攪乱を生ずるといつた心配はない。然しこの方法の欠点は、i) 空間電位の決定が困難な場合は正確に密度が求まらない。ii) 測定値の取り扱いが複雑であること。iii) 理論的に、 T_+ を用いず T_- を用いる criterion が明確でないこと。

以上は主として、夫々の方法に対する長所、短所であるが、探針測定においては、探針の挿入という事柄自体が攪乱をおこすことは不可避である。

また磁場がある場合とか負イオンが混在する場合の探針測定法はまだ確立されていない。

測定結果の比較

マイクロ波による測定値才4図は放電々流とそれに対応する反射係数との関係を示しているが

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

直接には密度をあたえていない。後に示すように理論によれば反射係数と密度の関係を求めることができる。

反射係数 R は (47) 式により、

$$R \simeq - \frac{4}{a \sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}} [2 \tilde{H}_0^{(2)}(ka) + f_0(k\rho)]^{-1} \\ - j \frac{8 \sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}}{8} [2 \tilde{H}_0^{(2)}(ka) + \tilde{H}_2^{(2)}(ka) + f_1(k\rho; n^2)]^{-1}$$

函数 $f_n(k\rho)$ は (29) 式により

$$f_n(k\rho) = \frac{(T_m(k\rho; n^2) T_n'(k\rho) - (T_m'(k\rho; n^2) T_m(k\rho))}{G_m(k\rho; n^2) H_n^{(2)}(k\rho) - G_m'(k\rho; n^2) H_m^{(2)}(k\rho)}$$

である。 R に対して上の近似式を用いるための条件は

$$\text{Re} |(nk\rho)^2| \ll 10$$

である。尚 1000 MC/s のマイクロ波に対する諸数値は脚註に示した。

本実験 ($\text{He } 0.5 \text{ mm Hg}$) では、 $\frac{\nu}{\omega} \div 1$ である。 $\frac{\omega_0}{\omega}$ をあたえると n が決まり反射係数 $|R|$ が計算される。ここに ω_0 は後に示されるように、プラズマ円柱中心部の最高密度に対する電子プラズマ角振動数である。

函数 $G_n(k\rho)$ の計算は (48) 式以下に見られる級数展開により行われ、

$$\text{Re} |(nk\rho)^2| \ll 10$$

(脚註) :

$$\frac{4}{a \sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}} = 0.9718$$

$$\frac{8 \sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}}{ak^2} = 0.1879$$

$$k\rho = 0.3$$

$$ka = 5.180 \quad ka = q\pi \quad q = 1.65$$

$$\tilde{H}_0^{(2)}(ka) = -0.0146 - j0.2372$$

$$\tilde{H}_2^{(2)}(ka) = 0.1288 + j0.2363$$

の条件下では $G_n(k\rho)$ の代りに (49) 式の $\overline{G_n}(k\rho)$ を用いてよいことがわかる。

$\overline{G_n}(k\rho)$ の近似式を用いた場合の計算値を表 1 及び才 9 図に示す。

表 1

$(\frac{\omega_0}{\omega})^2$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
R	0	0	0.426	0.886	1.13	1.46	1.70	1.99	2.22	2.49
$(\frac{\omega_0}{\omega})^2$		1	2	3	4	5	6	7	8	9
R		2.73	5.55	8.96	11.2	14.4	17.2	20.1	23.1	26.2
$(\frac{\omega_0}{\omega})^2$		10	20	30	40					
R		29.3	58.8	81.9	96.2

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

オ 9 図及びオ 4 図を用いるとマイクロ波測定による反射係数からプラズマ密度と放電電流との関係を求めることができる。これを探針法による測定値と比較したものがオ 10 図である。

1000 MC/s に対応する電子プラズマ振動数をあたえる電子密度は $10^{10}/\text{cc}$ であるが、 $10^{11}/\text{cc}$ 程度においても反射係数の測定値は飽和することなく密度変化に対応して大きく変化することは注目に値する。

才 10 図では電子密度が $10^{11}/\text{cc}$ 以上になると両測定値が一致しなくなる。その原因を考察してみよう。

マイクロ波測定法に関しては $G_m(k\rho; n^2) \simeq \overline{G}_m(k\rho; n^2)$ の近似が正しくなくなることが最大の原因と考えられる。 $G_m(k\rho; n^2)$ の高次項までとつて計算を行えば、よりよい一致が見られる筈である。

放電電流が小さい場合にはプラズマよりもガラス容器壁による反射の方が大きくなり整合をとつたとしても影響が残ることが予想されるが才 10 図にはその結果は表われていない。

放電電流を変化させたとき、プラズマ円柱の半径が変化し、また密度の分布が異つてくることが当然考えられるがこゝではそのための考慮はされていない。

更にプラズマ円柱を挿入したための導波管壁の「窓」による損失も $k\rho=0.3$ では無視できると考えた。しかしアンテナ効果があるものとすれば簡単には済まされないがこの点についても無視した。

探針測定に関しては、測定値に誤差を生じさせる原因が多く探針法の理論そのものにも不完全な面が多い。

a) 電子電流飽和点（肩特性）の決定が困難。

この様子は才 6 図に見られる通りであるか原因としては

- i) 陽光柱の振動（空間電位、密度の変動）
- ii) 探針表面の仕事函数が電子電流増加に伴つて変化する。
- iii) 電子の速度分布が Maxwell 分布からずれる。
- iv) 探針が空間電位に近すぎ電子電流が増すための放電の擾乱。
- v) 探針表面での電子の反射

等が考えられる。このうち i) は振動を抑制する特殊な放電管を用いることにより、ii) は X-Y 記録装置を用いて短時間の間に特性をとることにより防がれている。iii) iv) v) の影響は小さいものと期待される。

b) 電子温度の決定が困難

特に He ガスを用いた場合イオン電流が多いため正確に電子電流成分を求めることが困難になつて電子温度の決定に誤差を生ずる。

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

重いガスの場合には、イオン電流は小さく電子温度は比較的容易に求められる。

尚 a) の各条件はすべて電子温度の決定をも不正確にする。

更に探針を挿入した場合、陽光柱内でその部分の温度が低く極端な場合には陽光柱が探針を避けて迂廻するのが見られる。

すでに探針測定の章で述べられたように 4000 Mc/s の導波管のための細い導波管では、この迂廻の様子がはつきり見えるため探針測定は正確にできなかった。

また円柱探針では「端の効果」を一般に無視できない。特に低密度になる程その効果が大きくなるが、これは電子密度測定に 10% 以上の誤差をもたらさないものと概算された。

放電々流を増していくと空間電位勾配は幾分減少する傾向をみせるが大体 2 Volt/cm の電界が保たれる。これが探針の各部分に異つた電位を与えることになるがこの影響も誤差範囲内であろうと考えられる。

このように検討を進めてくると探針による密度測定法にも種々のあいまいさがあり十分な精度は望まれないことが知れる。

従つてオ 10 図の一致は十分に満足すべきものであると言わざるをえない。

マイクロ波による一様でないプラズマの電子密度測定のための計算

§ 1 プラズマ円柱内のマイクロ波電界

導波管内に設置された誘電物体によるマイクロ波の反射吸収については、すでに詳細な計算がなされている。(15)(16)(17)しかしながら、これらは一様な媒質としての誘電体を考えた場合の取扱いであつて、不均一媒質に対しては二、三の数値計算による結果(18)を除いては、基本的な計算例は見当らない。

ここでは媒質の不均一性を考慮しながら、Maxwell の基礎方程式から基本的な計算を行う。

導波管内の電磁波については、管に沿つて x 軸をとれば、壁面で電界が満足すべき条件は、電界の x 成分と断面の周辺に沿つた接線成分とが共に零になることである。

TE 型電磁波を考えよう。これは進行方向に電界成分をもたない。最も簡単な TE₁₀ 型は、導波管断面の短い方の辺に沿つて z 軸をとると、電界強度ベクトルとしては z 成分しかもたない。

図 11

図 11 の如く導波管の中央を貫いて、 E_z に平行に設置されたプラズマの円柱を想定しよう。プラズマが放電管中の陽光柱である場合、電子密度は軸対称で、径方向には 0 次オージェ Bessel 関数の分布をすることが知られている。(19)

プラズマを半径 ρ の円柱としたとき、プラズマ内での電子密度分布を、軸に沿って一様、径方向には軸対称で次のように表わされると仮定しよう（註参照）

$$N(r) = N_0 (1 - r^2/\rho^2) \dots\dots\dots(1)$$

(註) $N(r)$ がオージェ 0 次 Bessel 関数の場合には

$$\begin{aligned} N(r) &= N_0 J_0(2.405 r/\rho) \\ &\approx N_0 (1 - 1.446 r^2/\rho^2 + 0.5227 r^4/\rho^2 + \dots\dots) \end{aligned}$$

$$\text{従つて } r/\rho \ll 1 \quad N(r) \approx N_0 (1 - 1.446 r^2/\rho^2)$$

$$r/\rho \approx 1 \quad N(r) \approx N_0 \cdot 1.248 \cdot r/\rho$$

にあわせるようにするのが最も望ましい。

プラズマ円柱内において TE₁₀ 型マイクロ波の電界、

$$E_z = \varphi(x, y) \exp(+j\omega t) \dots\dots\dots(2)$$

が満足すべき方程式を求めよう。

Maxwell 方程式より容易に次の波動方程式が導かれる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{grad div } \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots(3)$$

媒質はz 軸方向に一様であり、従つて誘電率 ϵ もz 軸方向に一様であるから $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ とおくことができる。(3)式の左辺でオーム項は電気伝導率 σ を用いて 電流 $\mathbf{J}$ と $\mathbf{E}$ との間に $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ なる Ohm の法則を適用し $\mathbf{E}$ を $\mathbf{J}$ でおきかえた。

以後特に必要でない限り(2)式の時間因子を除いて考える。(3)式は次のように書き改められる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{4\pi\sigma}{c^2} \omega \right) \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

ϵ と σ に対しては次の表式を適用する。(20)(21)(22)

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\sigma = \frac{\nu}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ν は衝突角振動数、 ω_p はプラズマ角振動数である。

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m} \quad \dots\dots\dots(7)$$

N に対しては、(1)式の表式が適用されるから ϵ と σ は r の函数である。

(5)(6)式を導く際には次の様な仮定がなされていることに注意しなければならない。(20)

- i) ν がエネルギーによらず一定
- ii) マイクロ波のエネルギーは十分小さい。すなわち摂動程度。

(4)式をオーム図に従つて円柱座標系で表示すると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

α は自由空間での波数 k 及び(5)(6)式の表示を用いて次のように定義する。

$$\alpha^2 \equiv k^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} - j \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \frac{\nu}{\omega} \right) \quad \dots\dots\dots(9)$$

φ は変数分離により

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m G_m(r) \cos m\theta \quad \dots\dots\dots(10)$$

と表わされる。 $G(r)$ は合流型超幾何函数である。即ち(8)式を変数分離したとき r 部分は分離定数

mを用いて

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG_m}{dr} \right) + \{ n^2 k^2 + \alpha^2 k^2 r^2 \rho^2 - m^2 / r^2 \} G_m = 0 \quad (11)$$

(m: 整数)

ここに

$$\begin{cases} n^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2} - j \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2} \\ \omega_0^2 = 4\pi N_0 e^2 / m \\ \alpha^2 = 1 - n^2 \end{cases}$$

N_0 は(1)式に見られるように密度の最大値である。更に次の変数変換を行い、

$$r^2 = -j \frac{\rho}{k\alpha} t$$

$$G_m = y_m \sqrt{\frac{\rho}{i k \alpha}} t$$

(11) 式を書き直すと次の式がえられる。

$$\frac{d^2 y_m}{dt^2} + \left[-\frac{1}{4} - j \frac{n^2 k \rho}{4 \alpha t} + \frac{m^2 - 1}{4 t^2} \right] y_m = 0 \quad (12)$$

これは Whittaker の微分方程式⁽²³⁾に外ならない。

(12) 式の解は

$$\begin{aligned} y_m = & C_1 e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{1+m}{2}} F\left(\frac{1+m}{2} + j \frac{n^2 k \rho}{4 \alpha}; 1+m; t\right) \\ & + C_2 e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{1-m}{2}} F\left(\frac{1-m}{2} + j \frac{n^2 k \rho}{4 \alpha}; 1-m; t\right) \quad (13) \end{aligned}$$

ここでmは正整数である。

$$F(\alpha; \beta; t) = 1 + \frac{\alpha}{1! \beta} t + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2! \beta(\beta+1)} t^2 + \dots$$

座標原点 ($r = 0$) において有限な値をもつ函数 $G_m(r)$ は (13) 式右辺第一項により与えられる。

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

$$G_m(r) = \begin{cases} C_m (jk\alpha\rho^{-1}r^2)^{\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{j}{2}k\alpha\rho^{-1}r^2\right] \times \\ F_m\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2} + j\frac{n^2k}{4\alpha}\rho; 1+m; jk\alpha\rho^{-1}r^2\right) & \dots\dots\dots(14) \\ & (\text{for } n \neq 1) \\ A_m J_m(kr) & \text{for } n=1 \\ & \dots\dots\dots(15) \end{cases}$$

よつて求めるべきプラズマ円柱内の電界の形は (14) 式を (10) 式に代入してえられる。

尚 (15) 式は真空中における電磁波の波動函数を円柱座標系に表示したものに過ぎない。

導波管内で TE₁₀ 型波

$$E = \cos \frac{\pi}{a} y e^{-jkx \sin \phi}$$

を円柱座標で表示すると、(15) 式において

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_{2n} &= 2 \cos 2n\phi \quad \dots\dots\dots(16) \\ A_{2n+1} &= -j 2 \sin(2n+1)\phi \end{aligned}$$

としたものに相当する。こゝに

$$k_g/k = \sin \phi$$

であつて、 k_g は管内波数である。

$$k_g = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}$$

自由空間においては、(16) 式において $\phi = \frac{\pi}{2}$ としたときの A_m の値を用いればよい。

§ 2. 導波管内の散乱波電界

波動方程式(8)式の解は、 α が一定の場合一般に次の形で表わされる。

$$\sum_n C_n Z_n(\alpha r) \exp(\pm j n \theta)$$

パラメーター n は解の一意性により整数値のみをとり、 Z_n は一般の n 次円筒関数を表わす。

自由空間において (15) 式形の円柱に向う入射波を考える (才 1 図参照)、その散乱波は次の形に表わされる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr) \cos n \theta \quad \dots\dots\dots (17)$$

(17) 式は導波管の壁を考えない場合であるが、導体の壁がある場合、これらの散乱波は壁により完全反射されて戻ってくる。且つ一回の反射によつて π の位相差を生ずる。

これら反射波は鏡像法を用いると、 y 軸上相互に a だけつつ離れた無限個の点からの輻射の集積として求められる。

原点 O より pa だけ y 軸上正又は負の方向に離れた点を O_p^+ 及び O_p^- と表わすことにする。 O_p からの輻射は管内で P 回反射された波に相当する。才 12 図に従つて $r_p^\pm, \theta_p^\pm$ を定義すると、反射波の集積は、

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^p B_n H_n^{(2)}(kr_p^\pm) \cos n \theta_p^\pm \quad \dots\dots\dots (18)$$

で表わされる。

(18) 式の名散乱波を夫々の原点 $O_p^\pm$ のまわりに展開しよう。

$$r_p^\pm = [r^2 + (pa)^2 - 2par \cos(\frac{\pi}{2} \mp \theta)]^{\frac{1}{2}}$$

であるから、Bessel 函数の公式 (24) より

$$\begin{aligned} H_n^{(2)}(kr_p^\pm) \cos n \theta_p^\pm &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{n+m}^{(2)}(pka) J_m(kr) \\ &\times \cos \left\{ \frac{n}{2} \pi - m \left(\frac{\pi}{2} \mp \theta \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

これを (18) 式に代入、(17) 式をも含めると、導波管内での散乱波 E_B がえられる。

$$\begin{aligned} E_B &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr) \cos n \theta + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_n \tilde{H}_{n+m}^{(2)}(ka) J_m(kr) \times \\ &\times \cos \frac{n-m}{2} \pi \cdot \cos m \theta \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

図 12

ここに、

$$\widetilde{H}_n^{(2)}(z) = \sum_{p=1}^{\infty} (-)^p H_n^{(2)}(pz) \dots\dots\dots (21)$$

であつて、一般に Schlomilch 級数⁽²⁵⁾と言われる型のものである。尚 (21) 式の級数は一般に収斂度が極めて悪い。

$H_n^{(2)}(z)$ は $z = \pi, 3\pi, \dots (2s-1)\pi, \dots$ の点で不連続となるような函数であるが、TE₁₀ 型波では $\pi < ka < 2\pi$ であり、従つて (21) 式を次の積分表示によつてあらわす。

$$H_n(z) = \frac{1}{2j} \int_c \frac{e^{2\pi j p H_n^{(2)}(pz)} \, dp}{\sin p\pi} \dots\dots\dots (22)$$

積分路は複素 p 平面内の可附番無限個の点 $p = 1, 2, 3, \dots$ のまわりの小円に沿つて一周するようにとつたものの和である。留数計算により、これら個々の積分値が (21) 式右辺各項に等しいことは容易に確かめられる。(Appendix)

次に未定係数 B_n を求めるには入射波電界 E_A , プラズマ円柱内電界 E_C , 及び散乱波電界 E_B に対し、プラズマ円柱表面上において次の連絡条件を満足させる。

$$E_A + E_B = E_C \quad : \quad r = \rho$$

$$\frac{\partial E_A}{\partial r} + \frac{\partial E_B}{\partial r} = \frac{\partial E_C}{\partial r} \quad : \quad r = \rho$$

$$\dots\dots\dots (23)$$

尚入射波電界 E_A は (15) 式及び (16) 式より

$$E_A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(kr) \cos n\theta \dots\dots\dots (24)$$

散乱波電界 E_B は (20) 式 そのまま

$$\begin{aligned} E_B = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta \\ & + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_n \widetilde{H}_{n+m}^{(2)}(ka) J(kr) \cdot \\ & \times \cos \frac{n-m}{2} \pi \cdot \cos m\theta \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

プラズマ円柱内電界 E_C は (14) 式より

$$E_C = \sum_{n=0}^{\infty} C_n G_n(r) \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (25)$$

である。

これらを (23) 式に代入して $\cos n\theta$ の各係数を等しいとおき、更に C_n を消去すると、次のような B_n に関する無限連立 1 次方程式がえられる。

$$B_0 + 2f_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m B_{2m} \widetilde{H}_{2m}^{(2)} + A_0 f_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\begin{aligned} B_{2n} + 2f_{2n} \sum_{m=0}^{\infty} (-)^{n+m} [\widetilde{H}_{2n+2m}^{(2)} + \widetilde{H}_{2m-2n}^{(2)}] B_{2m} + A_{2n} f_{2n} &= 0 \\ : n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{2n+1} + 2f_{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (-)^{n+m} [\widetilde{H}_{2n+2m+2}^{(2)} + \widetilde{H}_{2m-2n}^{(2)}] \\ \times B_{2m+1} + A_{2n+1} f_{2n+1} &= 0 \\ : n = 0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここに

$$f_n = \frac{G_n(\rho) J_n'(k\rho) - J_n(k\rho) G_n'(\rho)}{G_n(\rho) H_n^{(2)}(k\rho) - H_n^{(2)}(k\rho) G_n'(\rho)} \quad \dots\dots\dots (29)$$

(29) 式のドットは r に関する微分を意味する。(26)~(28) 式の解は無有限行列式を用いて表わされることになる。

しかし、 $k\rho \ll 1$ においては

$$f_n(k\rho) \sim 0 [(k\rho)^{2n}]$$

であるから、 f_0 に対して f_2 以下、 f_1 に対して f_3 以下を無視して考えても十分より近似がえられる。その場合には、 B_0, B_1 は (26) 式及び (28) 式から直ちに求められて、

$$B_0 = \frac{-A_0 f_0}{1 + 2f_0 \widetilde{H}_0^{(2)}} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$B_1 = \frac{-A_1 f_1}{1 + 2f_1 [\widetilde{H}_0^{(2)} + \widetilde{H}_2^{(2)}]} \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。

尚自由空間においては、(20)式右边の2項を考慮する必要がないから、

$$B_n = -A_n f_n \quad \dots\dots\dots (30)$$

となり、特に条件を附加しなくてよい。(30)式は(30)(31)式などで $\tilde{H}_n^{(2)} = 0$ とおいたものに相当する。

§ 3. 反射係数および透過係数の計算

反射係数又は透過係数を求めるには、(8)式を再びデカルト座標において表示し、デカルト座標系での散乱波の表示を求めねばならない。波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_B}{\partial y^2} + k^2 E_B = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

の導波管内での解は、散乱波がx軸に対称であることを考慮して、一般に次のように表わされる。

(オ11図参照)

$$E_B(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} E_s(x) \cos \frac{2s+1}{a} \pi y \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$E_s(x) = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_B(x, y) \cos \frac{2s+1}{a} \pi y dy \quad \dots\dots\dots (34)$$

(34)式の $E_B(x, y)$ に対して(20)式の表示を適用すれば $E_s(x)$ が求められる。

$$\begin{aligned} E_B &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr) \cos \theta \\ &+ 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_n \tilde{H}_{n+m}^{(2)}(ka) J_m(kr) \cos \frac{n-m}{2} \pi \cdot \cos m\theta \\ &\dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ここで(19)式の計算に用いた公式(24)により、(20)式のr部分をxとyで書き直す。すなわちオ1項は

$$H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta = \begin{cases} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-)^{\ell} H_{n+2\ell}^{(2)}(kx) J_{2\ell}(ky) & (x > y) \\ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-)^{\ell} J_{2\ell-n}(kx) H_{2\ell}^{(2)}(ky) & (x < y) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (35)$$

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

またオ2項は更に(48)式の表示までさかのぼって書き直した方が都合よい。

$$H_n^{(2)}(kr_p \pm) \cos \theta_p^I = \begin{cases} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-)^{\ell} H_{n+2\ell}^{(2)}(kx) J_{2\ell}\{k(pa \mp y)\} & (x > pa \mp y) \\ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-)^{\ell} J_{2\ell-n}(kx) H_{2\ell}^{(2)}\{k(pa \mp y)\} & (x < pa \mp y) \end{cases} \dots\dots\dots (36)$$

従つて(35)(36)式を(20)式に代入、(34)式を計算すると、 $pa \mp y = y'$ なる積分変数の変換により

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} Z_{2\ell}\{k(pa \mp y)\} \cos \frac{2s+1}{a} \pi y dy \\ &= (-)^p \int_{(p-\frac{1}{2})a}^{(p+\frac{1}{2})a} Z_{2\ell}(ky') \cos \frac{2s+1}{a} \pi y' dy' \end{aligned}$$

ここに $Z_{2\ell}$ は $J_{2\ell}$ 又は $H_{2\ell}^{(2)}$ を表わしている。従つて(34)式は、 $Z_{2\ell}$ の対称性を考慮して次のように表わされる。

$$\begin{aligned} E_s(kx) = & \frac{4}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-)^{\ell} B_n H_{n+2\ell}^{(2)}(kx) \int_0^x J_{2\ell}(ky) \cos \frac{2s+1}{a} \pi y dy \\ & + \frac{4}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-)^{\ell} B_n J_{2\ell-n}(kx) \int_x^{\infty} H_{2\ell}^{(2)}(ky) \cos \frac{2s+1}{a} \pi y dy \end{aligned} \dots\dots\dots (37)$$

(37)式において $x \rightarrow \infty$ のときの E_s が無遠慮での散乱波の様子を表わし、透過係数又は反射係数をあたえる。

自由空間において(20)式の右辺オ一項そのものが散乱波の各成分を表わしている。デカルト座標系での表示が必要な場合には(35)式を用いおれよい。

さて、 $x \rightarrow \infty$ の場合の E_s を考慮しよう。その場合には(37)式オ二項は0となる。オ一項については

$$\int_0^{\infty} J_{2\ell}(ky) \cos \frac{2s+1}{a} \pi y dy$$

$$= \begin{cases} \frac{\cos(2\ell \sin^{-1} \frac{\pi}{pa})}{\sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}} = (-)^{\ell} \frac{\cos 2\ell \phi}{\sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}} & : s=0 \\ 0 & : s=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

.....(38)

(38)式は散乱波として導波管内を無限遠方まで伝播しうるものはTE₁₀型波だけであることを示している。

次に

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} H_{n+2\ell}^{(2)}(kx) \cos 2\ell \phi$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \begin{cases} \cos n\phi \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{2m} H_{2m}^{(2)}(kx) \cos 2m\phi & (n: \text{even}) \\ \sin n\phi \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{2m+1} H_{2m+1}^{(2)}(kx) \sin (2m+1)\phi & (n: \text{odd}) \end{cases}$$

.....(39)

を求めよう。尚 ϵ_m は Neumann の係数である。

Hankel 函数の積分表示

$$H_{2m}^{(2)}(kx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-jkx \sin \phi} \cos 2m\phi d\phi + j \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx \sinh z}}{\cosh 2m z} dz$$

$$H_{2m+1}^{(2)}(kx) = \frac{j}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-jkx \sin \phi} \sin (2m+1)\phi d\phi - j \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kx \sinh z}}{\sinh (2m+1) z} dz$$

において、夫々のオ2項は $x \rightarrow \infty$ のとき0に収斂する。従つて

$$\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{2m} H_{2m}^{(2)}(kx) \cos 2m\phi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-jkx \sin \phi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{2m} \cos 2m\phi \cos 2m\phi d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-jkx \sin \phi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{2m} [\cos 2m(\phi + \varphi) + \cos 2m(\phi - \varphi)] d\varphi$$

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi e^{-jkx \sin \varphi} [\delta(\psi + \varphi) + \delta(\psi - \varphi)] d\varphi \\
 &= e^{-jkx \sin \psi} \dots\dots\dots(40)
 \end{aligned}$$

(40) 式は無限遠方での透過波を表わしている。尚 (40) 式の導出においては次の公式 (26) が用いられた。

$$\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cos m\varphi = 2\pi \delta(\varphi)$$

全く同様にして

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{2m+1}^{(2)}(kx) \sin(2m+1)\psi \\
 &= j e^{-jkx \sin \psi} \dots\dots\dots(41)
 \end{aligned}$$

従つて透過波は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} E_0(kx) &= \frac{4}{a \sqrt{k^2 - (\frac{\pi}{a})^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \{ B_{2m} \cos 2m\psi \\
 &\quad + j B_{2m+1} \sin(2m+1)\psi \} e^{-jkx \sin \psi} \\
 &\dots\dots\dots(42)
 \end{aligned}$$

反射波の場合 $\lim_{x \rightarrow -\infty} E_s(x)$ については、(17)(18) 式において

$$\theta \rightarrow \pi - \theta, \quad \theta_p^\pm \rightarrow \pi - \theta_p^\pm$$

の変換を行つてから、同様の計算を繰り返せばよい。この変換は B_n を $(-)^n B_n$ でおきかえたものに等しくなる。

以上の結果を総合すると、

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} E_B(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sum_{s=0}^{\infty} E_s(x) \cos \frac{2s+1}{a} \pi y$$

$$= \frac{4}{a \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \{ B_{2m} \cos 2m\phi \pm j B_{2m+1} \sin (2m+1)\phi \} \\ \times e^{\mp j k x \sin \phi} \cos \frac{\pi}{a} y \dots \dots \dots (43)$$

結局、透過波としては

$$\lim (E_A + E_B) = T e^{-j k x \sin \phi} \cos \frac{\pi}{a} y$$

Tは透過係数であつて

$$T = 1 + \frac{4}{a \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \{ B_{2m} \cos 2m\phi + j B_{2m+1} \sin (2m+1)\phi \} \\ \dots \dots \dots (44)$$

反射波は

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E_B = R e^{j k x \sin \phi} \cos \frac{\pi}{a} y$$

反射係数Rは

$$R = \frac{4}{a \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \{ B_{2m} \cos 2m\phi - j B_{2m+1} \sin (2m+1)\phi \} \\ \dots \dots \dots (45)$$

$k\rho \ll 1$ の近似において、 B_n に対して (30) (31) 式の近似式を適用、 B_2 以上の高次項を省略すれば、透過係数および反射係数は、

$$T = 1 - \frac{4}{a \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \left[\frac{f_0}{1 + 2 f_0 \tilde{H}_0^{(2)}} + \frac{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{k^2} \frac{2 f_1}{1 + 2 f_1 (\tilde{H}_0^{(2)} + \tilde{H}_2^{(2)})} \right] \\ \dots \dots \dots (46)$$

$$R = - \frac{4}{a \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \left[\frac{f_0}{1 + 2 f_0 \tilde{H}_0^{(2)}} - \frac{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{k^2} \frac{2 f_1}{1 + 2 f_1 (\tilde{H}_0^{(2)} + \tilde{H}_2^{(2)})} \right] \\ \dots \dots \dots (47)$$

によつてあたえられる。

(46) 式又は (48) 式から容易にわかるように、プラズマの密度分布(1)式を考慮したことによる効果は、 f_n の函数にすべて含まれている。

更に $f_m(kr)$ の中においては

$$[d\ell_n G_m(kr)/dr]_{r=\rho} \dots\dots\dots (48)$$

の形で含まれていることがわかる。

いま(1)式の密度分布を平均し、一様な密度分布におき代えたときの(8)式の解を $\overline{G_m(r)}$ としよう。

$$\overline{G_m(r)} \propto J_m \left(\sqrt{n^2 + \frac{1}{2} \alpha^2} kr \right) \dots\dots\dots (49)$$

$\overline{G_m(r)}$ と $G_m(\rho)$ について (48) 式の値を比較してみよう。

$$k^{-1} \frac{d\ell_n G_0(r)}{dr} \Big|_{r=\rho} = -\frac{1}{2} \left(n^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) k\rho - \frac{n^2}{2^4} \left(n^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) (k\rho)^3$$

$$+ 0 \left\{ 2^{-7} n^6 (k\rho)^5 \right\}$$

$$k^{-1} \frac{d\ell_n \overline{G_0(r)}}{dr} \Big|_{r=\rho} = -\frac{1}{2} \left(n^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) k\rho - \frac{n^2}{2^4} (n^2 + \alpha^2) (k\rho)^3$$

$$+ 0 \left\{ 2^{-7} n^6 (k\rho)^5 \right\}$$

この2式を比較すると

$$|n^2 k\rho| \ll 10 \dots\dots\dots (50)$$

の条件下では、推定される透過係数又は反射係数は、(1)式の分布を平均した一様な密度分布によるものと見做すことができる。すなわち、 $\overline{G_m(r)}$ の代りに(49)式の $G_m(r)$ を用いて $f_m(kr)$ を計算すればよい。またそのような条件下では B_0 のみを考慮し、 B_1 以上の高次項を省略しても十分によい結果がえられる

一般に (50) 式の条件が満足されない場合には、 $G(r)$ を用い、 B_n の高次項までもとり入れて複雑な計算を行なわねばならない。更に厳密には (26) ~ (28) 式の連立方程式の解法にまでさかのぼつて検討を加えなければならない。

Appendix $H_n^{(2)}$ の計算

Schlomilch の級数の一種である

$$H_n^{(2)}(z) = \sum (-1)^p H_n^{(2)}(pz) \dots\dots\dots (A-1)$$

は極めて収斂度の悪い級数でありそのままでは値を求めることが困難であるため、(22)式の積分法によつて更に収斂度の高い級数に書き直す。この計算はすでに後藤三男氏⁽¹⁹⁾が詳しい結果を発表されているものであるが、その文献は現在殆ど見ることができないかと思われるので、ここにそのあらましを再録する。

$H_n^{(2)}(z)$ のうち實際上必要なものは(46)式と(47)式に見られるように、 $H_{2n}^{(2)}(z)$ だけである。 $H_n^{(2)}(z)$ は、 $z = \pi, 3\pi, \dots, (2s+1)\pi, \dots$ の点で不連続になる。

まず z は

$$\left. \begin{aligned} (2s-1)\pi < z < (2s+1)\pi \\ : \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A-2)$$

なる範囲にある値をとるものとし、(A-1)式を次のような積分表示にあらわす。

$$H_{2n}^{(2)}(z) = \frac{1}{2j} \int_c \frac{e^{2jsp\pi} H_{2n}^{(2)}(pz)}{\sin p\pi} dp \dots\dots\dots (A-3)$$

ここに積分通路は才19図に示すように、複素平面内の可附番無限個の点 $p = 1, 2, \dots$ のまわりの小円に沿つて一周するようにとつたものの和である。また $H_{2n}^{(2)}(z)$ は多価函数であるから p 平面上における cut line を負の実軸上にとる。(A-3)の被積分函数はあきらかに、 $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 以外に特異点をもたない。

$$H_{2n}^{(2)}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} \left(\int_{AK_1B_1} + \int_{B_1C} + \int_{CL_1DL_2C} + \int_{CB_2} + \int_{B_2K_2A} \right) \dots\dots\dots (A-4)$$

Hankel 函数の漸近形を用いると、半円 AK_1B_1 上では

$$\frac{1}{2j} \frac{e^{2jsp\pi} H_{2n}^{(2)}(pz)}{\sin p\pi} \rightarrow \sqrt{\frac{z}{\pi pz}} e^{j(n+\frac{1}{4})\pi} e^{-j\{z-(2s+1)\pi\}p}$$

となつて、 $R \rightarrow \infty$ のとき p の虚数部は負の無限大となる。

従つて半円 AK_1B_1 上での積分は指数函数的に零に収斂する。全く同様にして半円 B_2K_2A 上の積分も零に収斂する。

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

K₁

才 13 図

複素 p 方面

K₂

結局、(A-4)式右辺の積分項の才1項、才5項が省略されて

$$H_{2n}^{(2)}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} (\int_{B_1 C} + \int_{C B_2} + \int_{C L_1 L_2 C}) \dots\dots\dots (A-5)$$

次に

$$H_{2n}^{(2)}(z e^{j\pi}) = H_{2n}^{(2)}(z) + 2J_{2n}(z)$$

$$H_{2n}^{(2)}(z e^{-j\pi}) = H_{2n}^{(2)}(z) - 2J_{2n}(z)$$

の変換を行い、(A-5)式の才1項及び才2項の積分変数をそれぞれ $p = p' e^{j\pi}$, $p = p' e^{-j\pi}$

とすると、

$$\begin{aligned}
 H_{2n}^{(2)}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2j} \int_{DA_2} \frac{e^{-2j\pi p} H_{2n}^{(2)}(pz)}{\sin p\pi} dp \right. \\
 - \frac{1}{j} \int_{DA_1} \frac{e^{-2j\pi p} J_{2n}(pz)}{\sin p\pi} dp \\
 - \frac{1}{j} \int_{DA_2} \frac{e^{-2j\pi p} J_{2n}(pz)}{\sin p\pi} dp \\
 \left. - \frac{1}{2j} \int_{CL_2DL_1C} \frac{e^{2j\pi p} H_{2n}^{(2)}(pz)}{\sin p\pi} dp \right\} \\
 \dots\dots\dots (A-6)
 \end{aligned}$$

上式の右辺第1項は $\tilde{H}_{2n}^{(2)}(z)$ に帰着できるから、これを左辺に移項すると、結局、

$$\begin{aligned}
 H_{2n}^{(2)}(z) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2j} \int_{DA_1} \frac{e^{-2j\pi p} J_{2n}(pz)}{\sin p\pi} dp \right. \\
 - \frac{1}{2j} \int_{DA_2} \frac{e^{-2j\pi p} J_{2n}(pz)}{\sin p\pi} dp \\
 \left. - \frac{1}{4j} \int_{CL_2DL_1C} \frac{e^{2j\pi p} H_{2n}^{(2)}(pz)}{\sin p\pi} dp \right\} \\
 \dots\dots\dots (A-7)
 \end{aligned}$$

以下に上式各項の積分値を計算する。その場合は $n=0$ のときと $n=1, 2, 3, \dots$ のときの二つに分けて考察する。

(i) $n \neq 0, \quad n=1, 2, 3, \dots$ の場合

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left(-\frac{1}{2j} \int_{DA_1} - \frac{1}{2j} \int_{DA_2} \right) \\
 &= 2 \int_0^\infty J_{2n}(pz) \sum_{s=1}^{\infty} \cos(2s-1)p\pi dp \\
 &+ 2j \int_0^\infty J_{2n}(pz) \sum_{s=s}^{\infty} \sin(2s+1)p\pi dp \\
 &= 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos\{2n \sin^{-1} \frac{(2s-1)\pi}{z}\}}{z^2 - (2s-1)^2 \pi^2}
 \end{aligned}$$

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

$$+ 2j \frac{(-)^n}{z^n} \sum_{s=s}^{\infty} \frac{\{ (2s+1)\pi - \sqrt{(2s+1)^2 \pi^2 - z^2} \}^2}{\sqrt{(2s+1)^2 \pi^2 - z^2}} \dots\dots\dots (A-8)$$

次に積分 $\int_{CL_2 DL_1 C}$ を求める。これは $p=0$ の近傍を考察して、

$$\lim \frac{1}{4j} \int_{CL_2 DL_1 C} = \frac{\pi}{2} \times \left[\frac{e^{2j\pi p} H_{2n}^{(2)}}{\sin pz} \right] \text{ の } p \text{ に関する Laurant 展開級数における } \frac{1}{p} \text{ の係数}$$

なる留数計算に帰せられる。 $n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots$ のとき $H_{2n}^{(2)}(pz)$ は

$$\left. \begin{aligned} H_{2n}^{(2)}(pz) &= \frac{j}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m-1)!}{m!} d_m \left(\frac{2\pi}{z} \right)^{2m} \\ d_m &= \left[\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \left\{ \frac{x \cos 25x}{\sin x} \right\} \right]_{x=0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A-9)$$

d_m は Bernoulli の数 B_m を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned} d_m &= 2(2^{2m-1}-1)B_m + 4(-)^m \{ 1 + 3^{2m-1} + 5^{2m-1} + \dots + (2s-1)^{2m-1} \} \\ d_0 &= 1 \end{aligned}$$

最初の数個の d_m の値は

$$d_0=1 \quad d_1=-\frac{11}{3} \quad d_2=\frac{127}{15} \quad d_3=-\frac{221}{21} \quad \dots\dots\dots (A-10)$$

であたえられる。

以上 (A-8) (A-9) の結果をまとめると

$$\begin{aligned} H_{2n}^{(2)}(q\pi) &= \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(2n \sin^{-1} \frac{2s-1}{q})}{\sqrt{q^2 - (2s-1)^2}} \\ &+ \frac{2}{\pi} j \frac{(-)^n}{q^{2n}} \sum_{s=s}^{\infty} \frac{\{ (2s+1) - \sqrt{(2s+1)^2 - q^2} \}^{2n}}{\sqrt{(2s+1)^2 - q^2}} \\ &- \frac{1}{2\pi} j \sum_{m=0}^n \frac{(n+m-1)!}{(n-m)!(2m)!} d_m \left(\frac{2}{q} \right)^{2m} \end{aligned} \dots\dots\dots (A-11)$$

ただし $z = q\pi \quad (2s-1) < q < (2s+1)$ である。

(iii) $n=0$ の場合

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left(-\frac{1}{2j} \int_{DA_1} - \frac{1}{2j} \int_{DA_2} \right) \\
 &= 2 \int_{\epsilon}^{\infty} J_0(PZ) \sum_{s=1}^{\infty} \cos(2s-1)p\pi \, dp \\
 &+ 2j \int_{\epsilon}^{\infty} J_0(PZ) \sum_{s=s}^{\infty} \sin(2s+1)p\pi \, dp \\
 &= 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 - (2s-1)^2 \pi^2}} \\
 &+ 2j \sum_{s=s}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2s+1)^2 \pi^2 - z^2}} - \frac{1}{(2s+1)\pi} \right\} \\
 &+ 2j \sum_{s=s}^{\infty} \frac{\cos(2s+1)\epsilon\pi}{(2s+1)\pi} + o(\epsilon) \dots\dots\dots (A-12)
 \end{aligned}$$

上式の右辺最終項は、公式⁽¹³⁾そのままにおきかえて

$$\begin{aligned}
 2j \sum (\quad) &= -\frac{j}{\pi} \log \tan \frac{\epsilon\pi}{2} \\
 &- \frac{2j}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(2s-1)\epsilon\pi}{2s-1} \\
 &\dots\dots\dots (A-13)
 \end{aligned}$$

次に (A-7) 式右辺第3項は $|P| = \epsilon \ll 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4j} \int_{CL_2DL_1C} &= -\frac{1}{4\pi j} \int_{CL_2DL_1C} \left\{ \frac{1}{p} \left\{ 1 - \frac{2j}{\pi} \left(\log \frac{z}{2} + \gamma \right) \right\} \right. \\
 &- \frac{2j}{\pi} \frac{\log p}{p} + o(p \log p) \left. \right\} dp \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2j}{\pi} \left(\log \frac{\epsilon z}{2} + \gamma \right) \right. \\
 &+ o(\epsilon^2 \log \epsilon) \left. \right\} \dots\dots\dots (A-14)
 \end{aligned}$$

と計算される。ここに $\gamma = 0.5772$ は Euler の 常数である。以上 (A-12) (A-13) (A-14)

を綜合して

マイクロ波反射法によるプラズマの密度測定

$$\begin{aligned}
 H_0^{(2)}(q\pi) = & -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q^2 - (2s-1)^2}} \\
 & - \frac{j}{\pi} \left[2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s-1} + \log \frac{1}{q} - r \right] \\
 & + \frac{2}{\pi} j \sum_{s=s}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2s+1)^2 - q^2}} - \frac{1}{2s+1} \right\}
 \end{aligned}$$

..... (A-15)

ただし $z = q\pi$ ($2s-1 < q < 2s+1$) とした。

以上 (A-11) 式及び (A-15) 式によつて $H_{2n}^{(2)}(z)$ が収斂度の高い級数としてあたえられた。

参 考 文 献

- (1) J. C. Seddon : Propagation measurements in the ionosphere with the aid of rockets, J. Geophys. Res., 58, 3 P523 (1953.)
- (2) Owen K. Garriott: The Determination of Ionospheric Electron Current Observations, J. Geophys. Res., 65, 4, P. 1139, P. 1151, 1960
- (3) James E. Drummond : Theory of Micro-wave Diagnostics of Hot Plasmas, Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, p/385, USA.
- (4) S. C. Brown: Microwave Studies of Gas Discharge Plasmas, Second United Nations International Conference on the Peacefull Uses of Atomic Energy, Geneva p/387, USA.
- (5) K. B. Persson: Limitation of the Microwave Cavity Method in a Plasma, Phys. Rev., 106, 2, P. 191, (1957.)
- (6) S. J. Buchsbaum and Sanborn C. Brown: Microwave Measurements of High Densities, Phys. Rev., 106, 2, 196, (1957.)
- (7) A. C. B. Lovell and J. A. Clogg : Characteristics of Radio Echoes from Meteor Trails, Proc. Phys. Soc. (London), A60, P. 491 (1948)

- (8) William S. Partiridge and L. Dole Harris : Ionization in the Trail of High-Velocity Pellets, J. Appl. Phys., 28, 11, P. 1269, (1957).
- (9) N. Marcuritz : Waveguide Handbook, Mc. Grow-Hill Book Company, 1951.
- (10) G. J. Schulz and S. C. Brown: Microwave Study of Positive Ion Collection by Probes, Phys. Rev., 98, 6 P. 1642, (1955)
- (11) S. Ohara and K. Takayama;
Oscillations Caused by Electron Sheath Breakdown, Rev. E. C. L. 8 1~2, 1960, P. 7
- (12) 大原, 高山; 昭和35年電気四学会連合大会
講演論文集(2) 放電物理 83頁
- (13) I. Longmuir, H. Mott-Smith : Phys Rev, 28 729 (1926)
- (14) E. O. Johnson, L. Molter ; Phys Rev. 80 58 (1950)
- (15) S. A. Schelkunoff ; Quarterly of Appl. Math 1 78 (1943)
- (16) N. Marcuvity : Waveguide Handbook, Mc graw-Hill Book Company, 1951
- (17) M. Goto : Rep. E. C. L. 621. 39. 001. 1/5 (04)
- (18) S. C. Brown : Paper "P/987 USA" presented at the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, Switzerland, 58.
- (19) M. J. Druyvesteyn and F. M. Penning: Rev. Mod. Phys. 12 87 (1940)
- (20) H. Margenau: Phys. Rev. 69 508 (1946)
H. Margenau: Phys. Rev. 109. 6 (1958)
- (21) E. A. Desloge., S. W. Matthysse and H. Margenau: Phys. Rev. 112 1437 (1958)
- (22) J. E. Drummond ; Phys. Rev. 112 1460 (1958)
- (23) 小谷, 橋本: 特殊函数, (現代応用数学講座) P. 82, 岩波書店
- (24) G. N. Watson : Theory of Bessel Functions, 1922 P. 361,
- (25) " : " P. 621.
- (26) P. M. Morse & H. Feshbach : Methods of Theoretical Physics : P. 1379.
- (27) J. I. Bromwich, Theory of Infinite Series, 1926 P. 356 (1.5) 式