トーラス状磁気流体の静的平衡 III (外部磁場)*

**

加 藤 祐 輔 (神戸大理)

The existence of the solution of the so-called magnetostatic equations for plasma with axial symmetry was presented in the preceding papers(I, II)¹⁾.

In this note we discuss the magnetic field in the exterior of the plasma and the distribution of the sources (electric currents) which provide the equilibrium.

It is shown that some equilibrium of a toroidal plasma with circular cross section exists with some distribution of the source or the axis of symmetry as well as the plasma current given in I or II.

§ 1. Introduction

軸対称な場合について磁気流体力学の静的平衡解の存在についてはすでにしらべた。¹⁾(以下これを I, II と略記) ここではその様な解に対する外部磁場、及び全系の場をひきおこす磁場の source がどうなるかを調べる。II で調べた一般的な平衡解についての議論は困難なので最終的結果は(切口が円の)トーラス内で特別な圧力、電流分布があるときに対してのみ求める。

§ 2. 軸対称のときの平衡の方程式

下図の円柱座標系に対して平衡の方程式(1)は(2), (3)のようになる。

(B: 磁場, J: 電流, p: 圧力とする)

* Static Equilibrium of a Toroidal Plasma

III Magnetic Field in the Exterior of the Plasma

** Yusuke Kato (Dep. of Phys., Univ. of Kobe)

才 I 図

才 II 図

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{grad} p = -\frac{1}{4\pi} \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{B} \quad (1)$$

$$\Delta F - \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} - h(s, F) = G_F - h = 0 \quad (2)$$

$$h = -\frac{1}{2} g' - 4\pi s^2 p' \quad (2)$$

(p, g は F だけの函数でダツシュは $\frac{d}{dF}$)

$$T^2 = g \geq 0, \quad p \geq 0 \quad (3)$$

$$\Gamma \text{ 上で } F = 0 \quad (3)$$

たゞし

$$\vec{B} = (B_s, B_\varphi, B_z) = \left(\frac{\partial F(s, z)}{\partial z}, T(s, z), -\frac{\partial F}{\partial s} \right) / s \quad (4)$$

$$\vec{J} = \operatorname{rot} \vec{B} = \left(-\frac{\partial T}{\partial z}, G_F, \frac{\partial T}{\partial s} \right) / s \quad (4)$$

或る条件を満足する $h(s, F)$ に対して (2), (3) の解が一つだけあることは既に I, II で述べたのでこゝにはくり返さない。以下の議論はその様な場合に限ることとする。たゞそのような解はすべて

$$\text{幸} \quad h \equiv 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (5)$$

に対して考えられるものであることを注意しておく。

§ 3. 外 部 磁 場

次の様な問題を考える。

$$GF - h = 0$$

$$\left. \begin{aligned} h &= -\frac{1}{2} \mathcal{G}' - 4\pi s^2 p' & \text{in } G \\ 0 & & \text{on } \Gamma \\ &= 0 & \text{in } G_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$F = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (7)$$

(6), (7)の解でいたる所連続かつ Γ で法線方向の微分 $\frac{\partial F}{\partial n}$ が連続なものを求めたい。まず F は G ではたゞ一つだけ定まる。しかし G_1 を $s > 0$ の半平面とすると一般には(6), (7)の解は無いかも知れない。(Γ 上にsheet currentがありトーラス内に電流がない場合 ($h=0$) については Γ が円なら G_1 は $s > 0$ の半平面としてよいが、 Γ が楕円ならばよくないことが示唆されている。²⁾)従つて G_1 の形は Γ に接続する部分という以上にはあらかじめ与えておくことは出来ない。(6)と(7)は

$$F = \sqrt{s} \, u(s, z) \quad (8)$$

とおくと

$$u_{ss} + u_{zz} - \frac{3}{4s^2} u = h/\sqrt{s} \quad (9)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (10)$$

となる。

$$u_{ss} + u_{zz} - \frac{3}{4s^2} u = -\delta(s-\sigma) \delta(z-\zeta) \quad (9')$$

の特解は

$$H(s, z; \sigma, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{s\sigma} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{s^2 + \sigma^2 + (z - \zeta)^2 - 2s\sigma \cos \theta}} \quad (11)$$

で与えられる。²⁾ H は (s, z) , (σ, ζ) につき対称である。以下順を追って外部磁場を求める。

§§ 1 双極座標への変換

後の議論の準備としてここで双極座標 (ξ, η) を導入する。座標変換は

$$s = \frac{a \sin \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (12)$$

$s > 0$ の半平面は $0 < \eta < \infty$, $0 \leq \xi < 2\pi$ に対応 $\eta = \eta_1 = \text{const}$ は (s, z) 平面では点 $(a, 0)$ $(-a, 0)$ に関するApolloniusの円{中心 $(a \coth \eta_1, 0)$, 半径 $\frac{a}{\sinh \eta_1}$ }で

$$\frac{PB}{PA} = e^{\eta_1} \quad (13)$$

が成立する。この円を点 $(a, 0)$ のまわりの円 $C(\eta_1)$ と呼ぶことにする。従つて $\eta = 0$ は z 軸、 $\eta = \infty$ は点 $A(a, 0)$ となる。又 $\xi = \xi_1 = \text{const}$ は点 $(a, 0)$, $(-a, 0)$ を通る一つの円に対応する。

才 Ⅲ 図

$$J = \frac{\partial(s, z)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} = \frac{s^2}{\sinh^2 \eta} \quad (14)$$

(ξ, η) を用いると(11)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & H\{s(\xi, \eta), z(\xi, \eta); \sigma(\xi', \eta'), \zeta(\xi', \eta')\} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in(\xi-\xi')}}{n^2 - \frac{1}{4}} q_n(\eta) p_n(\eta') \quad \eta \geq \eta' \end{aligned} \quad (15)$$

$\{(\xi, \eta), (\xi', \eta')\}$ につき対称}

トーラス状磁気流体の静的平衡Ⅲ (外部磁場)

ここで

$$\left. \begin{aligned} p_n(\eta) &= \sqrt{\sinh \eta} \quad P_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh \eta) \\ q_n(\eta) &= \sqrt{\sinh \eta} \quad Q_{n-\frac{1}{2}}^1(\cosh \eta) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

は

$$u_{\eta\eta} - \left(n^2 + \frac{3}{4 \sinh^2 \eta} \right) u = 0 \quad (17)$$

の独立な解であつて

$$q_n(\eta) = q_{-n}(\eta), \quad p_n(\eta) = p_{-n}(\eta), \quad (18)$$

又 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\left. \begin{aligned} p_n(\eta) &= \sqrt{\frac{|n|}{2\pi}} e^{|n|\eta} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|n|}\right) \right\} \\ q_n(\eta) &= -\sqrt{\frac{\pi|n|}{2}} e^{-|n|\eta} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|n|}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\eta \neq 0) \quad (19)$$

$[P_\nu^\mu(x), Q_\nu^\mu(x)]$ はそれぞれオー種及びオ二種の Legendre 陪函数, $P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \eta)$,

$Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \eta)$ は η についての円環体函数 (troidal function) と呼ばれている、
(m, n は整数)]

展開定理は:

実函数 $u(s, z)$ が点 $(a, 0)$ の近くで 2 回連続微分可能で

$$u_{ss} + u_{zz} - \frac{3}{4s^2} u = 0 \quad (20)$$

を満足するとき、 (ξ, η) 座標では

$$u(s, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\xi} q_n(\eta) \quad a_{-n} = \bar{a}_n \quad (21)$$

が成立する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|a_n|} = e \eta_0 \quad (22)$$

のとき、(21) 及びそれらを ξ, η で微分したものは、 $\eta > \eta_0$ なる円内で収束し、その円外

で発散する。

§§ 2. 外部磁場 (一般の場合)

まずⅡで調べたように $G + \Gamma$ で (9), (10) の解 (たゞ一つだけである) $u_0(s, z)$ が求まつたとして

$$\left. \begin{aligned} f(s, z) &= h \{ s \sqrt{s} u_0(s, z) \} && \text{in } G + \Gamma \\ &= 0 && \text{in } G_1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

とおくと我々の問題は次の非斉次線形微分方程式の解 u_1 とその存在領域 $(G + \Gamma) \cup G_1$ を定めることになる。(たゞし $G + \Gamma$ では $u_0 \equiv u_1$ とする)

$$\begin{cases} u_{ss} + u_{zz} - \frac{3}{4s^2} u = f/\sqrt{s} & (24) \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (25)$$

§§ 1. の展開定理と (10) の H の性質を考慮すれば (24), (25) の解は点 $(a, 0)$ が G 内にあるとして

$$\begin{aligned} u_1(s, z) &= - \int_G H(s, z; \sigma, \zeta) f(\sigma, \zeta) / \sqrt{\sigma} d\sigma d\zeta + \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\xi} q_n(\eta) \end{aligned} \quad (26)$$

と書かれる。 G 内で $u_0 = u_1$ は定まつているから a_n は一意的に定まる。例えば点 $(a, 0)$ のまわりに G 内に入るような円 $C(\eta_1)$ を考えると (才Ⅳ図), (26) から

$$\begin{aligned} a_n q_n(\eta_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi e^{-in\xi} u_0(s, z) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi e^{-in\xi} \int_G H(s, z; \sigma, \zeta) f(\sigma, \zeta) / \sqrt{\sigma} d\sigma d\zeta \end{aligned} \quad (27)$$

((s, z) は $C(\eta_1)$ 上)

により a_n が定まる。($q_n(\eta_1) \neq 0$ である) η_1 又は a を適当に選んで円 $C(\eta_1)$ が Γ に内接するようにとると解 u_1 の性質と、展開定理とから (26) の無限級数は少くとも円 $C(\eta_1)$ の内部で収束することがわかる。一般には収束範囲は (22) で与えられる。そのためには (27) の a_n を具体的に評価しなければならない。

トラス状磁気流体の静的平衡Ⅲ (外部磁場)

才 IV 図

§§3. 外部磁場 (Γ が円で $h = \alpha + \beta s^2$ の場合)

(27) で才 1 項は G 内での解 u_0 を含み、又才 2 項は u_0 のほかに積分領域 G に依存しているため実際に (22) を評価する一般的方法は見出し難い。ここでは特殊な場合を考える。

i) Γ は点 $(a, 0)$ のまわりの円 $C(\eta_0)$ で

ii) $f(s, z) = h(s, u_0) = \alpha + \beta s^2$ (α, β const)

とする。このとき (25) により (27) の才 1 項は 0 となり、 H について (15) の表現を用いると

$$\begin{aligned} a_n q_m(\eta_0) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{p_n(\eta_0)}{n^2 - \frac{1}{4}} \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta \int_0^{2\pi} d\xi J \frac{(\alpha + \beta \sigma^2)}{\sqrt{\sigma}} e^{-in\xi} q_n(\eta) \\ &= \frac{-1}{2\pi} \frac{p_n(\eta_0)}{n^2 - \frac{1}{4}} \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta r_n(\eta) \end{aligned} \quad (28)$$

$$r_n(\eta) = \int_0^{2\pi} d\xi J(\xi, \eta) \frac{(\alpha + \beta \sigma^2)}{\sqrt{\sigma}} e^{-in\xi} q_n(\eta) \quad (29)$$

ここに σ は ξ, η の函数 (c. f. (12))
 $r_n(\eta)$ で $n \rightarrow \alpha$ のときの評価は Jørgens²⁾
 にならい次の方法による。(η は固定して考えるからわずらわしさをさけるためしばらく変数からはぶく)

$$w(\xi) = s(\xi) + iz(\xi) \quad (30)$$

とおくと (12) により ξ が real の近くで w は

才 V 図

ξ の analytic function ($\because \cosh \eta = \cos \xi$)

また

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{i}{2a} (w^2 - a^2) \quad (31)$$

従つて $\xi(w)$ は w の analytic function. η は定数だから $\sigma(w)$ も w の analytic function,

$$e^{-in\xi(w)} = e^{-n\eta} \frac{w+a}{w-a} \quad (32)$$

$$s(w) = \frac{w^2 - a^2}{2(w-a \coth \eta)} \quad (33)$$

(14), (31), (32), (33) を用いると (29) は

$$r_n(\eta) = \frac{a q_n(\eta) e^{-n\eta}}{\sqrt{2} i \sinh^2 \eta} \int_{C(\eta)} dw \frac{1}{w^2 - a^2} \left(\frac{w^2 - a^2}{w - a \coth \eta} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \cdot \left\{ \alpha + \beta \frac{(w^2 - a^2)^2}{4(w - a \coth \eta)^2} \right\} \left(\frac{w+a}{w-a} \right)^n \quad (34)$$

円 $C(\eta)$ は (s, z) 平面にあつたものだが右図のように複素 w -平面上に置くことにする。

(34) の integrand の特異点は

$$w = \pm a, \quad w = a \coth \eta$$

(円 $C(\eta_0)$ の中心)

$$w = \infty$$

であるから (34) は図の様に積分路を $C(\eta) \rightarrow C(\eta_1)$ $\eta_1 > 0$ としても不変である。

(13) により

$$\left| \frac{w+a}{w-a} \right| = e^{\eta_1}$$

であるから (19) を考慮して、 $n > 0$ のとき

才 VI 図

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|r_n|} = e^{-2\eta + \eta_1} \quad \left(\begin{array}{l} \eta_1 > 0 \\ \eta \geq \eta_0 \end{array} \right) \quad (35)$$

従つて (28), (19) より $n > 0$ で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{2\eta_0 - 2\eta + \eta_1} \leq e^{\eta_1} \quad (36)$$

従つて (21), (22) により (26) のオ 2 項は (s, z) 平面の円 $C(\eta_1)$ 内で収束する。

(ξ , η 微分をしたものも同様)

$\eta_1 > 0$ なら η_1 はいかに小さくともよいから、(26) は $s > 0$ の半平面のいたる所で収束する。

従つて実際は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \quad (36')$$

結局今の場合 G_1 は ($s > 0$ で) いかに大きくともよく $G + \Gamma + G_1$ で (6), (7) の解 (26) は一意に定まる。

[註. こゝではまず $n > 0$ とし、積分路を $C(\eta_1)$ ($\eta_1 < \eta_0 < \eta$) と変更した。しかし $n < 0$ とし $C(\eta_1)$ を $\eta_1 > \eta$ すなわち円 $C(\eta_1)$ を $C(\eta)$ の内部にとることも出来る。ただし、点 $a \coth \eta$ を横切つてはいけない。(オ VII 図) 結果は (36') と同じである]

オ VII 図

(26) を双極座標で書くと

$$u_1(s, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\xi}}{n^2 - \frac{1}{4}} \left\{ p_n(\eta) \int_0^{2\pi} d\xi' \int_{\eta}^{\infty} d\eta' J(\xi', \eta') \frac{(\alpha + \beta \sigma'^2)}{\sqrt{\sigma'}} \right. \\ \left. + e^{-in\xi'} q_n(\eta') + q_n(\eta) \int_0^{2\pi} d\xi' \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta' J(\xi', \eta') \frac{(\alpha + \beta \sigma'^2)}{\sqrt{\sigma'}} \right\}.$$

$$e^{-im\xi'} q_n(\eta') \} \quad \text{in } G+F (\eta \geq \eta_0) \quad (37a)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b_n e^{in\xi}}{n^2 - \frac{1}{4}} \{ -p_n(\eta) q_n(\eta_0) + p_n(\eta_0) q_n(\eta) \} \quad (37b)$$

$$\text{in } G_1 \quad (\eta \leq \eta_0)$$

ただし

$$b_n = \frac{a_n}{p_n(\eta_0)} = -\frac{1}{2\pi q_n(\eta_0)} \int_0^{2\pi} d\xi' \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta' J(\xi', \eta') \frac{(\alpha + \beta \sigma'^2)}{\sqrt{\sigma'}} e^{-in\xi} q_n(\eta') \quad (38)$$

§ 4. 全系の source の分布

(24), (26) からわかるように (37a) のオ 1 項と (37b) の { } のオ 1 項はともに G 内の source $f/\sqrt{s}$ によるものである。

こゝで (37a), (37b) の残る項

$$u_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{b_n e^{in\xi}}{n^2 - \frac{1}{4}} p_n(\eta_0) q_n(\eta), \quad (0 < \eta(\eta_0)) \quad (39)$$

を与えるような source を求めたい。

今 $\eta = \eta_1 = \text{const}$ 上に source

$$L(\eta\xi, n) = \ell(\xi) \delta(\eta - \eta_1) \quad (40)$$

があればそれによる場は (9'), (15) により

$$u_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{C_n e^{in\xi}}{n^2 - \frac{1}{4}} p_n(\eta_1) q_n(\eta), \quad (\eta \geq \eta_1)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n e^{in\xi}}{n^2 - \frac{1}{4}} p_n(\eta) q_n(\eta_1), \quad (\eta \leq \eta_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (41)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J(\xi, \eta_1) \ell(\xi) e^{-in\xi} d\xi \quad (42)$$

となる。

$\eta_1 < \eta < \eta_0$ で $u_2 = u_3$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} \ell(\xi) &= \frac{1}{J(\xi, \eta_1)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\xi} = \frac{(\cosh \eta_1 - \cos \xi)^2}{a^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\xi} \\ C_n &= \frac{p_n(\eta_0)}{p_n(\eta_1)} \quad b_n = \frac{a_n}{p_n(\eta_1)} \\ &= -\frac{p_n(\eta_0)}{2\pi p_n(\eta_1) q_n(\eta_0)} \int_0^{2\pi} d\xi' \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta' J(\xi', \eta') \frac{(\alpha + \beta \sigma'^2)}{\sqrt{\sigma'}} e^{-in\xi'} q_n(\eta') \end{aligned} \right\} (43)$$

(19), (36') により (43) は収束する。

又 (43) の integrand で J, σ' は ξ' につき偶関数であるから $C_n = C_{-n}$ (= real) に従つて当然のことではあるが $\ell(\xi)$ も ξ の偶関数である。

§ 5. 議 論

☆ § 3, ii) で与えた電流、圧力分布をもつ（切口円の）トーラス状プラズマは、それを包むより大きなトーラス面 ($\eta = \eta_1$) 上での外部電流の分布 (40), (43) により支えられることがわかつた。この外部電流は子午面 ($s-z$ 平面) に垂直な成分だけをもつ。 η_1 は任意であるから $\eta_1 \rightarrow 0$ と出来る。この場合外部電流は z 軸のまわりを微小半径でとりかこむものだけである。すなわち z 軸上に分布する磁場の source によつて上記のトーラス状プラズマが維持されることになる。しかし、簡単な計算でわかることであるが、このような磁場の source は z 方向を向いた磁気双極子を z 軸上に分布させたものでおきかえることは必ずしも可能ではない。この点は一応注意すべきであろう。

☆ 切口の形およびプラズマ内での電流、圧力分布が一般の場合についての議論がのぞましいのは勿論であるが (22) で必要となる a_n (27) の評価方法が見出しがたい。(27) の才 1 項は切口の形が円るとき 0 となり、また才 2 項については、§ 3, ii) の分布のとき (34) の { } 内が w の analytic function となるため § 3 で実行したような解析接続が可能となつたのである。

加 藤 祐 輔

文 献

1) 加藤: 核融合研究 vol. 3 № 2 および № 5 (1959)

(これを I, II と略記)

なお Schechter (New York) が類似の分析を行っている。

: Proc. of Conf. on the Controlled Thermo-Nuclear Fusion
Research (1959)

2) K. Jörgens: Z. Naturforschg 13a (1958)