イオン-電子の温度緩和現象について*

松 本 道 男 (東工大)**

The temperature relaxation in a fully ionized plasma is discussed, which consists of electrons and one kind of positive ions.

The dynamical behaviour of a test ion is treated as a Brownian motion, where the small-angle collisions only are considered. The relaxation time between ion and electron-temperatures has been calculated, which reads

$$\frac{3}{16\sqrt{\pi}e^4} \frac{m_1 m_2}{n_1 + n_2} \left(\frac{kT_1}{m_1} + \frac{kT_2}{m_2} \right)^{3/2} [\log(\lambda_D k_{\max})]^{-1},$$

Where $-e$ is the electronic charge, m the mass, n the number density, λ_D the Debye length, and $k_{\max}$ the inverse mean distance between electrons and ions.

It is worth to notice that the result is completely symmetric about the electron and the ion, although the effect of large-angle collisions has not been taken into accounts.

§ 1. ま え が き

プラズマのイオン温度と電子温度に差があれば、イオンと電子は相互作用を通じてエネルギーの授受を行い、温度差は時間と共に減少する。

この現象に関しては、1959年 Prof. Kihara¹⁾ が Boltzmann 方程式を解いて、温度差が少ない場合につき緩和時間を求めている。その際の衝突項の計算は、long range の

* On the relaxation between ion- and electron-temperatures.

** M. Matsumoto (Department of physics, Tokyo Institute of Technology.)

イオン-電子の温度緩和現象について

クーロン力でなしに、short rangeのeffectiveな相互作用 e^{-Kr}/r を使つて行われている。我々は同じ問題を速度エネルギー空間における stochastic process として取扱つてみた。二体相互作用としてはクーロン力を適当に cut-off して使つた。得られた結果は、prof Kihara のものを特殊な条件の場合として含み、一層広い温度範囲で成立する。計算方式はGassiorowicz, Newmann and Riddell²⁾のものに従つて行われた。現象に対する物理的 picture は次の通りである。

問題の本質のみを拾うため、プラズマはたゞ一種類のイオンと電子より構成されているとし、空間分布も一様とする。粒子間のエネルギー授受が、同種粒子間でまず先に行われ、その結果としてイオン温度 T_1 、電子温度 T_2 が一たん成立したとすれば、 T_1 と T_2 の緩和は当然イオンと電子の相互作用によつて行われる。我々はプラズマ中の或るイオン(test particle)に着目し、それが電子(field particles)の作用により辿る力学過程を考えてみる。test particle にイオンを選んだのは、その質量が電子のそれに比べて充分大きいから運動が極めて smooth で、微分的な計算方式で充分近似出来ると考えられるからである。field particles との相互作用として、なまのまゝのクーロン力を採用するときは、たとえ稀薄プラズマであつても、Boltzmann 方程式に従つて問題を解くのは適當でない。Boltzmann 流の気体運動論は short range force による衝突過程のみを対象に作られた理論だからである。故に我々は Boltzmann 流とは逆の取扱い；test particle は field particles による long range の作用で弱いながら頻繁また連続的な作用を受けて、それが重り合つた結果有限の大きさになるという取扱いをする。するとブラウン運動の概念が適用出来て、Langivan³⁾方程式が使える。速度の test particle が field particles より受ける影響は二部に分けられて、その一つは test particle の速度 $\mathbf{v}$ に依存する作用 $\mathbf{F}_1(\mathbf{v})$ (いわゆる dynamical friction で、field particles についての統計平均は零でない)、もう一つはブラウン運動の特性である移動部分 $\mathbf{F}_2(t)$ (field particles についての統計平均は零となる)である。後者の $\mathbf{F}_2(t)$ には次の2つの仮定をおく。

- i) 速度 $\mathbf{v}$ に依存しない。
- ii) 速度の変動が少ない時間内にも $\mathbf{F}_2(t)$ は充分頻繁に揺動する。そして微小時間 Δt 後の

1) J. Phys. Soc. Japan 14 (1959) 402, J. Phys. Soc. Japan 15 (1960) 684

2) Phys. Rev. 101 (1956) 922

3) Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 20

速度変化 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ は $O(\Delta t)$ の程度であるが $\mathbf{F}_2(t + \Delta t)$ と $\mathbf{F}_2(t)$ との相関はないとする。

この $\mathbf{F}_2(t)$ の部分は test イオンのクーロン力のうち long range part が主に効いている効果と考えられる。

§ 2. 基礎方程式⁴⁾

イオンと電子の質量、荷電、温度、数密度をそれぞれ $m_1, m_2; e_1 = e, e_2 = -e; T_1, T_2; n_1, n_2$ とする。ただし、 $n_1 = n_2$ である。

時刻 t において、速度 $\mathbf{v}_1$ なる test particle の Δt 後の速度変化量のうち、電子との相互作用のみによる効果を取り出して、それを $\Delta \mathbf{v}$ とすれば、 $\Delta \mathbf{v}$ は形式的に

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1(t + \Delta t) - \mathbf{v}_1(t) = \frac{1}{m_1} \int_t^{t+\Delta t} dt \{ \mathbf{F}_1(\mathbf{v}) + \mathbf{F}_2(t) \} \quad (2.1)$$

で表わされる。

イオンと電子の確率分布は速度のみの関数 $f_1(\mathbf{v}_1), f_2(\mathbf{v}_2)$ であり、イオンの運動エネルギー $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ の平均は $\frac{3}{2} kT_1$ である。故に温度 T_1 の時間的変化の割合は平均運動エネルギーの時間的変化の割合で与えられる。

$$\frac{\Delta(kT_1)}{\Delta t} = \frac{1}{3} m_1 \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \cdot \frac{1}{\Delta t} \langle \mathbf{v}_1(t + \Delta t)^2 - \mathbf{v}_1(t)^2 \rangle. \quad (2.2)$$

ただし、 k は Boltzmann 定数、 $\langle \rangle$ は test イオンに作用を及ぼす電子についての統計平均を表わす。(2.1) 式及び $\langle \mathbf{F}_2(t) \rangle = 0$ を考慮して、 $\langle \rangle$ 内の $(\Delta t)^2$ の項を無視すれば (2.2) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(kT_1)}{\Delta t} = & \frac{2}{3} m_1 \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \left\{ \frac{1}{m_1} \mathbf{v}_1(0) \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_1) \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2m_1^2} \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \langle \mathbf{F}_2(t') \cdot \mathbf{F}_2(t'') \rangle \right\} \quad (2.3) \end{aligned}$$

となる。ただし、積分時間 Δt は充分長く、その間に微視的過程が充分多く実現されるものとして、電子についての統計平均を先に行つた。我々はこの (2.3) 式を基礎式とする。

§ 3. 温度緩和

(2,3) 式右辺第一項 $\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_1) \rangle$ 及び第二項 $\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \langle \mathbf{F}_2(t') \cdot \mathbf{F}_2(t'') \rangle$ の計算は Gassiorowicz⁴⁾ 等の方法に従って行つた。

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} m_1 \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \frac{1}{m_1} \mathbf{v}_1 \cdot \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_1) \rangle \\ &= \frac{2}{3} \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 \left\{ -\frac{4\pi e^4 n_2}{v_1^2 M} \log(\lambda_D k_{\max}) \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) \right\}^{++)} \\ &= -\frac{16\sqrt{\pi} e^4 n_2}{3M} \log(\lambda_D k_{\max}) \cdot \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right)^{1/2} \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \quad (3,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} m_1 \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \frac{1}{2m_1^2} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \langle \mathbf{F}_2(t') \cdot \mathbf{F}_2(t'') \rangle \\ &= \frac{4\pi e^4 n_2}{3m_1} \log(\lambda_D k_{\max}) \int d\mathbf{v}_1 f_1(\mathbf{v}_1) \left[2 \left\{ \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) - \frac{1}{3v_1^3} \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) v_2^2 + \frac{2}{3} \int_0^{\infty} d\mathbf{v}_2 \frac{f_2(\mathbf{v}_2)}{v_2} \right\} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) v_2^2 + \int_0^{\infty} d\mathbf{v}_2 \frac{f_2(\mathbf{v}_2)}{v_2} \right\} \right]^{+++)} \\ &= \frac{16\sqrt{\pi} e^4 n_2}{3m_1} \log(\lambda_D k_{\max}) \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right)^{1/2} \quad (3,2) \end{aligned}$$

ただし、 λ_D は Debye length, $k_{\max} \sim \frac{1}{d}$ (d : interparticle distance), M はイオンと電子の換算質量、 $\beta_1 = \frac{m_1}{2kT_1}$, $\beta_2 = \frac{m_2}{2kT_2}$ である。なお (3,1)、(3,2) 式右辺最後の結果は分布函数 $f_1(\mathbf{v}_1)$ 、 $f_2(\mathbf{v}_2)$ を Maxwell 分布と仮定して計算した。

(3,1)、(3,2) 式を用いると、基礎式 (2,3) は

$$\frac{d}{dt} (kT_1) = \frac{16\sqrt{\pi} e^4 n_2}{3} \log(\lambda_D k_{\max}) \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{m_1} - \frac{1}{M} \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \right\} \quad (3,3)$$

となる。

プラズマ全体の内部エネルギーが時間的に不変であることを表わす関係式

$$\frac{d}{dt} (n_1 T_1 + n_2 T_2) = 0$$

+) 附録 1、++) 附録 2

を用いて、(3.3)式はさらに

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T_2 - T_1) &= -\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) \frac{dT_1}{dt} \\ &= -\frac{8\sqrt{2\pi}}{3} \frac{n_1 + n_2}{m_1 m_2} \left(\frac{kT_1}{m_1} + \frac{kT_2}{m_2}\right)^{-\frac{3}{2}} \log(\lambda_D k_{\max})(T_2 - T_1) \quad (3.4) \end{aligned}$$

のように変換される。(3.4)式より緩和時間 τ は

$$\tau = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{m_1 m_2}{n_1 + n_2} \left(\frac{kT_1}{m_1} + \frac{kT_2}{m_2}\right)^{\frac{3}{2}} [\log(\lambda_D k_{\max})]^{-1} \quad (3.5)$$

である。この緩和時間は $\log(\lambda_D k_{\max})$ を除けば任意性はなく決められるものである。

§ 4. 論 議

緩和時間(3.5)式において、 $\frac{kT_1}{m_1}$ の項を無視したものがProf Kiharaと一致する。ただし、cut-offによる任意性は問題外としての話である。

我々の結果は物理的に次のように解釈される。たとえば、 T_1 (イオン温度) $< T_2$ (電子温度)のとき、(3.3)式右辺{ }内第一項は T_1 の増加(thermal agitation)を、第二項は T_1 の減少(dynamical friction)を表わす。緩和現象はこの2効果の競合として進行すると考えられる。

(3.5)式の与える緩和時間は実測値より長すぎるといわれている(Langmuir paradox)。これは我々の立場よりみれば、イオン電子間のエネルギー授受に関して、稀ではあるが大きな作用を及ぼすやうな衝突(large-angle collision)の影響が考慮に入れてない結果ではないかと思われる。

Prof・KiharaによるChapman-Cowling流の計算は本来はshort rangeの相互作用による稀に起る衝突の効果を計算するのに適したものであるが、全く逆の立場から出発した我々の結果と一致するのはnearest approachのcut-offをした為にlarge-angle collisionの効果が洩れてしまったのではなからうか?

終りに当つて、著者は終始有益な discussionsをして下さった野沢先生に深く感謝致します。

附 録 1

Testイオンがfield particlesより受ける力 F_1 は

$$F_1[r(t)] = F_1[r_0 + v_1 t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' F_1(v(t''))] \quad (A, 1)$$

で与えられる。速度変化が小さいときが問題であるから、上式は展開が許されて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle F_1[r(t)] \rangle &\simeq \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle F_1[r_0 + v_1 t] \rangle + \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle F_1[r_0 + v_1 t''] \cdot F[r_0 + v_1 t] \rangle \quad (A, 2) \end{aligned}$$

のような操作をする。 $\langle \rangle$ はfield particlesについての平均である。

1) $\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle F_1[r_0 + v_1 t] \rangle$ の略算

Testイオンが運動していることによつて、field particlesは一様分布からはずされてそのイオンのまわりに分極される。その結果、運動するイオンは減速される。この効果は Liouville equation

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v \cdot \nabla_r f_2 + \frac{1}{m_1} F^e \cdot \nabla_v f_2 = \frac{1}{m_2} \int dr' dv' \nabla_r U(r, r') \cdot \nabla_v f_{22}(r, v, r', v') \quad (A, 3)$$

を用いて計算される。但し $f_2, f_{2,2}$ はfield particlesの一体、二体分布函数、 F^e はtestイオンによるクーロン力である。二体分布函数は一体分布函数の積で、又 F^e の存在の為に起る分布の平衡よりのずれは小さいとして、

$$f_2(r, v) = f_2^{(0)}(v) + f_2^{(1)}(r, v) \quad (A, 4)$$

で近似する。但しこの近似が許されるのはtestイオンの近傍以外のことである。 $f_2^{(0)}(v)$ は温度 T_2 におけるMaxwell分布とする。(A, 3)式は線形化されて、

$$\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial t} + v \cdot \nabla_r f_2^{(1)} + \frac{1}{m_2} (F^e - \nabla_r \varphi) \cdot \nabla_v f_2^{(0)} = 0 \quad (A, 5)$$

となる。 $\varphi(r) = \int dr' dv' U(r, r') f_2^{(1)}(r', v')$ 、即ちpotential energyを意味する。この $\varphi(r)$ によりtestイオンに及ぼす分極の効果が計算され、その結果は

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle \mathbf{F}_1^p \mathbf{v}_1 \rangle = - \frac{4\pi n_2 e^4}{m_2 v_1^2} \log(\lambda_D \cdot k_{\max}) \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) \quad (\text{A}, 6)$$

となる。但し $\mathbf{F}_1^p \mathbf{v}_1$ は $\mathbf{F}_1^p$ の $\mathbf{v}_1$ 方向への成分を表わす。

$$2) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle \mathbf{F}_1[\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 t''] \cdot \nabla \mathbf{r}_0 \mathbf{F}_1[\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_1 t] \rangle \text{ の略算}$$

分布が一様であつても、damping forceは存在する。この力はイオンの運動と、密度の平均からの fluctuations との相関より生ずる。計算には、力の分布函数が必要である。

Holtsmarkは、粒子の存在確率が到る所等しいと仮定して、test particleに働く力の分布を求めている。このHoltsmark分布で、我々はnearest neighborの影響を無視した、いわゆるmodified Holtsmark分布を用いた。Nearest neighborの影響は、我々の範疇(collisionを無視する)外であるからである。結果は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle \mathbf{F}_1[\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_1 t''] \cdot \nabla \mathbf{r}_0 \mathbf{F}_1[\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_1 t] \rangle &= \\ &= - \frac{4\pi n_2 e^4}{m_1 v_1^2} \log(\lambda_D \cdot k_{\max}) \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) \quad (\text{A}, 7) \end{aligned}$$

となる。結局 dynamical friction は polarization effect (A, 6) 式, statistical effect (A, 7) の和で表わされ、

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt \langle \mathbf{F}_1 \rangle = - \frac{4\pi n_2 e^4}{v_1^2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \log(\lambda_D \cdot k_{\max}) \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) \quad (\text{A}, 8)$$

となる。

附 録 2

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2m_1^2} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{t'} dt'' \langle \mathbf{F}_2(t') \cdot \mathbf{F}_2(t'') \rangle \text{ の値。}$$

この計算はGasirowicz等の方法と全く等しいので、結果だけを書くことにする。

$$\alpha_{ij} = \frac{2\pi n_2 e^4}{m_1^2} \phi_{ij}(v) \cdot \log(\lambda_D \cdot k_{\max})$$

イオン—電子の温度緩和現象について

但し

$$\phi_{ij} = \delta_{ij} \left\{ \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 f_2(\mathbf{v}_2) - \frac{1}{3v_1} \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 v_2^2 f_2(\mathbf{v}_2) + \frac{2}{3} \int_{v_1}^{\infty} d\mathbf{v}_2 \frac{f_2(\mathbf{v}_2)}{v_2} \right\}$$

$i=1, 2。$

$$= \delta_{ij} \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1} d\mathbf{v}_2 v_2^2 f_2(\mathbf{v}_2) + \int_{v_1}^{\infty} d\mathbf{v}_2 \frac{f_2(\mathbf{v}_2)}{v_1} \right\} \quad i=3。$$