プラズマ内の輸送現象(I) *

笹 倉 浩 (原子力研)

市 川 芳 彦 (日大理工)

abstract

The frictional force and diffusion coefficients are calculated for high temperature plasma on the basis of the generalized Fokker-Planck equation which was derived by one of the authors (Y.H.I.). The collective effects, which are very essential in the system of charged particles, are accounted by the dynamical shielding factor in a very natural way. The contributions of the excitation of plasma wave to the transport coefficients appear as the resonance occurring in the medium. The results reduce to Bohm-Pines' and Klimontovich's formula for the special case of a beam moving with uniform velocity.

§ 1 序

気体運動論的統計力学に基づくプラズマの研究では、二体の衝突が支配的であるとして、Landau¹⁾ は二体の Boltzmann collision integrand を運動量変化の巾に展開して「Landau collision term」を導き、プラズマの振舞いを論じた。又、coulomb 長距離力による小角散乱が積み重なっている効果に着目し「Fokker-Planck

* On the transport coefficients in the high temperature plasma(I)

** Y.Sasakura(Japan atomic energy research institute)

Y.H.Ichikawa(Department of physics Nihon University)

プラズマ内の輸送現象 (I)

型衝突項¹⁾を使う方法も行われている。最近、この二つの方法による衝突項が実は同等であることが証明されたが²⁾、木原³⁾により短距離の effective な相互作用 e^{-kdr}/r を使つて導かれた温度の緩和時間と、松本⁴⁾により速度空間の stochastic process として取り扱かれた緩和時間とが一致しているのはこの同等性の具体的現われと考えられる。他方、力学的な立場から Bohm, Pines⁵⁾ がプラズマ振動として normal coordinate を分離して effective hamiltonian を導き、ビームとプラズマとの相互作用を議論した。更に、klimentovich⁶⁾ はビームとプラズマ振動との相互作用を使つて統計力学的運動方程式を導き、電子-電子の衝突以外にプラズマ振動の励起による systematic friction force と運動量空間の拡散係数とを出している。電子の分布函数に対する、彼によつて導かれた方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} - n \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \cdot \int U(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} (A^{\alpha} f_1) + \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} (B^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_{\beta}}) \quad (1)$$

ここで f : 電子の一体分布函数、 G : 二体相関関数、摩擦力 A^{α} は

$$\text{短距離部分 } A_s^z = \left(\frac{e\omega_p}{v} \right)^2 \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (2)$$

$$\text{長距離部分 } A_r^z = \left(\frac{e\omega_p}{v} \right)^2 \log \frac{v}{v_{Th}} \quad (3)$$

の二つの部分からなり、拡散係数は

$$\text{ビームの方向 } D^{zz} = \frac{e^2 kT}{v^3} \omega_p^2 \log \frac{v}{v_{Th}} \quad (4)$$

$$\text{直角方向 } D_{xx} = D_{yy} = \frac{me^2 \omega_p^2}{4v} \quad (v \gg v_{Th}) \quad (5)$$

ここで v_{Th} : 電子の熱運動の速さ、 v : 電子ビームの速度 (Z 方向) $> v_{Th}$,

ν^* : Landau cut off 波数 $\frac{KT}{e^2}$, k_d : Debye 波数

統計力学における力学的相関効果の重要性を考慮して組立てられた Bogoliubov の理論に従つて、Temks⁷⁾ は Liouville 方程式から Fokker-Plank 方程式を導き、その係

数を計算しており、又Tchen⁸⁾はプラズマにおいては非マルコフ過程が本質的なものであることを強調して、非マルコフ、非線型の場合に拡張して検討している。Rostoker, Rosenbluth⁹⁾はプラズマ波の輻射によるfriction forceを調べ、ビームの速度が熱運動の速度よりずっと大きい時共鳴特性の現われることを示し、磁場のある場合も含めて粒子の運動を検討している。

ここでは市川¹⁰⁾の一般化されたFokker-Planck方程式からfrictional forceとdiffusion coefficientを詳細に調べる。

§ 2 一般化されたFokker-Planck方程式の概要

非マルコフ過程で、空間的に非均質、時間的に可成り速く変化しているという一般的な条件下で、高温プラズマ粒子の分布関数が熱平衡のマックスウエル分布からわずかにずれていて、イオンはuniform backgroundとした時、次のFokker-Planck方程式が導かれる。

「本誌4,440(1960)参照」

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \right\} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\{ \mathbf{F}_{\text{eff}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) f_0(\mathbf{v}) \right\} \\ = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \{ A^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) f(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) \} \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \{ B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) \frac{\partial}{\partial p_{\beta}} f(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) \} \right] \quad (6)$$

$$A^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) = -\frac{\lambda^2}{\Omega} \sum_l \frac{v(l)^2}{A(\mathbf{k}-\mathbf{l}, \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v})} \ell^{\alpha} \int \delta_{+}(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}') \\ \frac{1}{\partial \mathbf{p}'} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad (7)$$

$$B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) = \frac{\lambda^2}{\Omega} \sum_l \frac{[1+n\chi(l)] v(l)^2}{A(\mathbf{k}-\mathbf{l}, \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v})} \ell^{\alpha} \ell^{\beta} \int \delta_{+}(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}') \\ f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad (8)$$

ここで $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$: 熱平衡からのずれの分布関数、 $\mathbf{F}_{\text{eff}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$: プラズマ内の effective field であるがここではふれない。 $A(\mathbf{k}-\mathbf{l}, \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v})$ は波数ベクトル $\mathbf{k}$

プラズマ内の輸送現象 (I)

で、時間的に振動数 ω で、そして速度 $\mathbf{v}$ の粒子が波数 $\mathbf{l}$ の粒子によつて遮蔽される遮蔽因子である。従つて時間的空間的变化を考慮した誘電率と考えてよい。

$$A(\mathbf{k}-\mathbf{l}, \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v}) = 1 - i \lambda v(l) \int \delta_+(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v} - \mathbf{l}'\mathbf{v}') \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad (9)$$

ここではout-going waveを考えており $\delta_+(x) = i p \frac{1}{x} + \pi \delta(x)$, 又 $\lambda v(l) = \frac{4\pi e^2}{l^2}$, Ω : 考察している現象に比してずっと大きい系の体積, $f_0(\mathbf{v})$: マックスウエル分布。 $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$ は又、電子ビームがプラズマの性質を変化させない—excess charge effect が negligible で、プラズマの状態が熱平衡のパラメーターで指定出来るという仮定の下では、外部からの電子ビームの分布函数と考えてよい。

最後に $A^\alpha(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega)$ は一般化された dynamical friction force を表わし、波数ベクトル $\mathbf{k}$ で、時間的には振動数 ω で、そして速度 $\mathbf{v}$ の粒子が field particle によつて受ける摩擦力である。同様に $B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega)$ は運動量空間での一般化された拡散係数である。 α, β はその成分を示す。 $\chi(l)$ は多体相関効果のために這入つてきたもので、ここでは static correlation の Debye 表示に相当する。 $\chi(l) = \frac{-1}{n} \frac{k_B^2}{k_d^2 + l^2}$ 。

§ 3 力学的遮蔽因子の計算

$$A(\mathbf{k}-\mathbf{l}, \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v}) = 1 + \lambda v(l) \cdot \mathbf{p} \cdot \int \frac{\mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} f_0(\mathbf{v}')}{\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v} - \mathbf{l}'\mathbf{v}'} d\mathbf{v}'$$

$$- i \pi \lambda v(l) \int \delta(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v} - \mathbf{l}'\mathbf{v}') \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad (10)$$

i) $(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v})^2 \gg (\mathbf{l}'\mathbf{v}')^2$ の場合

$$\text{オ二項の積分: } n \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m} \cdot \mathbf{p} \cdot \int \frac{\frac{-m}{KT} \mathbf{l}' \mathbf{v}' \exp\left[-\frac{m}{2KT} \mathbf{v}'^2\right]}{\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v} - \mathbf{l}'\mathbf{v}'} d\mathbf{v}' =$$

$$n \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-1}{KT} \right) \cdot \int \left(1 + \frac{\ell w}{\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}} + \frac{\ell^2 w^2}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2} + \dots \right)$$

$$\exp\left[-\frac{m}{2KT} w^2\right] dw - n \left(\frac{-1}{KT} \right) = -\frac{n}{m} \frac{l^2}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2} \left(1 + \frac{KT}{m} \frac{l^2}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{※三項の積分: } & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v} - l\mathbf{v}')\tau} d\tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \\
 &= \frac{i}{2\pi} \frac{n}{m} l^2 \exp[-(\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v})^2 \frac{m}{2KT} \frac{1}{l^2}] \\
 &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tau \exp[-(\sqrt{\frac{KT}{m}} |\ell| \tau - i(\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{KT}} \frac{1}{|\ell|})^2] \\
 &\quad d\tau = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{KT}} \frac{n}{KT} \frac{\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}}{|\ell|} \exp[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]^2}{l^2}] \\
 \Delta(\mathbf{k}-1, 1; \omega; \mathbf{v}) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]^2} (1 + \frac{KT}{m} \frac{l^2}{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]^2} + \dots) \\
 &\quad + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]^2}{l^2}] \quad (11)
 \end{aligned}$$

II) $(\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v})^2 \ll (l\mathbf{v}')^2$ の場合も同様にして

$$\begin{aligned}
 \Delta(\mathbf{k}-1, 1; \omega; \mathbf{v}) &= 1 + \frac{k_d^2}{\ell^2} (1 + \frac{m}{KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]^2}{l^2} + \dots) \\
 &\quad + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v}]^2}{l^2}] \quad (12)
 \end{aligned}$$

ここで k_d : Debye 波数ベクトル, ω_p : Langmuir 振動数

i) 及び II) の条件は (11) (12) の結果から, 各々 $(\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v})^2 \gg \ell^2 \frac{KT}{m}$ 及び

$(\omega - (\mathbf{k}-1)\mathbf{v})^2 \ll \ell^2 \frac{KT}{m}$ の条件と同等と考えてよい。

ビーム粒子について $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ が成立し, その場合には上の i) II) の条件に対して

プラズマ内の輸送現象 (I)

$$i) \quad A(-1, 1; \mathbf{v}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{[\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}]^2} \left(1 + 3 \frac{KT}{m} \frac{1^2}{[\mathbf{l} \mathbf{v}]^2} + \dots \right) \\ + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{\mathbf{l} \mathbf{v}}{\omega_p} \exp \left[- \frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \mathbf{v}]^2}{1^2} \right] \quad (13)$$

$$ii) \quad A(-1, 1; \mathbf{v}) = 1 + \frac{k_d^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{m}{KT} \frac{[\mathbf{l} \mathbf{v}]^2}{1^2} + \dots \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{\mathbf{l} \mathbf{v}}{\omega_p} \\ \exp \left[- \frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \mathbf{v}]^2}{1^2} \right] \quad (14)$$

Tchen の論文では遮蔽因子として $A = 1 + \frac{k_d^2}{\ell^2} + \frac{|\ell|}{|\mathbf{v}^*|}$ を導いているが、これは ii) の場合に相当し、遮蔽ポテンシャルとして $e^{-k_d r}/r$ を取ったことになり、長距離相関が消えている。 $\mathbf{v}^*$ は Landau cutoff 波数ベクトル $\frac{KT}{e^2}$ を考慮したために這入っている。Larkin¹¹⁾ は逆に i) の場合を取扱って stopping power を計算しているが、短距離部分が落ちている。又、Baiescu¹²⁾ の非可逆過程の議論で遮蔽因子が現われてくるが、我々の遮蔽因子で $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ とした時に一致する。

$$A(-1, 1; \omega; \mathbf{v}) = 1 - i \lambda v(1) \int \delta_+ (\mathbf{l} (\mathbf{v} - \mathbf{v}')) \mathbf{l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \quad (15)$$

初期条件で均質である様なプラズマ中をビームが走ると、プラズマは分極励起して非均質になる。実際、この時プラズマ中に生ずる effective field $\mathbf{F}_{\text{eff}}^{(1)}$ の一つの項として次の式が導かれる。

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{-1}{e} \frac{\lambda}{\Omega} \frac{v(1) i \mathbf{l}}{A(\mathbf{k} - \mathbf{l}, 1; \omega; \mathbf{v})} \quad (16)$$

真空中では $\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{-1}{e} \frac{\lambda}{\Omega} v(1) i \mathbf{l}$ であることに注意。従つて一般化された Fokker-Planck 方程式は polarization cloud をひきつづた電子の衝突を正しく記述するものであり、集団運動の効果が非常に自然に方程式の計算に現われている。分極効果は電子の分布函数によるが、同時にプラズマが励起状態から崩れようとする間に又分極が変化するという非線型効果のために分母にも分布函数を入れることが出来る。熱平衡状態でも分極は起つており、ビームの速度が熱運動の速度より小さい時短距離部分として

$$E = \frac{-1}{e} \frac{\lambda}{\varrho} \frac{i l}{1 + \frac{k_d^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{m}{KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]^2}{l^2} + \dots \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]}{\omega_p}} \exp \left[- \frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]^2}{l^2} \right] \quad (17)$$

となり、等方的なDebyeポテンシャル以外に粒子の運動方向に変形した分極ポテンシャルが
 付け加わる。遮蔽因子の虚数項は特に $(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v})^2 \gg \ell^2 \frac{KT}{m}$ の場合に重要な役割を演
 ずるが、後に述べられる。

§ 4 Frictional Term — エネルギー損失の計算

$$\begin{aligned} A^\alpha(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{\lambda}{\varrho} \sum_{\mathbf{l}} \frac{v(\mathbf{l}) \ell^\alpha}{D(\mathbf{k} - \mathbf{l}; \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v})} \lambda v(\mathbf{l}) \int \delta_+(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}') \\ &\quad \frac{1}{\partial \mathbf{p}'} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \\ &= i \frac{\lambda}{\varrho} \sum_{\mathbf{l}} v(\mathbf{l}) \ell^\alpha \frac{1 - D(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v})}{D(\mathbf{k} - \mathbf{l}; \mathbf{l}; \omega; \mathbf{v})} \\ &= \frac{\lambda}{\varrho} \sum_{\mathbf{l}} v(\mathbf{l}) \ell^\alpha \frac{\text{Im} D}{|D|^2} + i \frac{\lambda}{\varrho} \sum_{\mathbf{l}} v(\mathbf{l}) \ell^\alpha \frac{\text{Re} D - |D|^2}{|D|^2} \quad (18) \end{aligned}$$

ここで条件 i) $\frac{KT}{m} \ell^2 \ll (\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v})^2$ と ii) $\frac{KT}{m} \ell^2 \gg (\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v})^2$ とに分
 けて考える。

i) $\frac{KT}{m} \ell^2 \ll (\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v})^2$ の時

$$\begin{aligned} A^\alpha(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^3} \frac{m}{n} \int d\mathbf{l} \frac{\ell^\alpha}{l^2} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]}{\omega_p} \exp \left[- \frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]^2}{l^2} \right]}{\left\{ 1 - \frac{\omega_p^2}{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]^2} \right\}^2 + \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]}{\omega_p} \exp \left[- \frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]^2}{l^2} \right] \right\}^2} \end{aligned}$$

プラズマ内の輸送現象 (I)

$$+i \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^3} \frac{m}{n} \int d\mathbf{l} \frac{\ell^\alpha}{l^2} \frac{\frac{\omega_p^2}{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{v}]^2} (1 + \frac{3KT}{m} \frac{l^2}{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{v}]^2})}{\{1 - \frac{\omega_p^2}{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{v}]^2}\}^2 + \{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{v}]}{\omega_p} - \{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{v}]^2}{l^2}]\} \exp[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l})\mathbf{v}]^2}{l^2}]\}^2} \quad (19)$$

A^α の虚数項は分極効果による内部電場への寄与を示すが、その寄与についての議論は後の機会にゆずる。 A^α の表式はその integrand が共鳴特性を有する。実際 $\text{Im} A$ は 1 に比して小さく、共鳴点の近傍であまり変化しない。従つて $Z \cdot \{\text{Im} A\}$ はプラズマ振動の励起が崩れる時間の逆数、即ち damping factor を表はしている。damping factor についての詳細な議論は他の機会にゆずることとする。 A^α の計算をわかり易くするために、条件 1) $\frac{KT}{m} \ell^2 \ll (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{v}\ell \cos \theta)^2$ と条件 $\frac{\omega_p^2}{m} \ll (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{v}\ell \cos \theta)^2$ による $\ell, \cos \theta$ の変域を $v > v_{Th}$ と $v < v_{Th}$ の二つの場合に分けて考える。

$v > v_{Th}$ (一例として)

太い曲線が
共鳴の曲線

$v < v_{Th}$ (一例として)

太い曲線が
共鳴の曲線

共鳴曲線は ω_p と $\omega - k\mathbf{v}$ 及び V_{Th} と V の大小関係から $V > V_{Th}$ の場合には2本現われることがあり、 $V < V_{Th}$ の時には1本現われることがある。そして共鳴は二つの条件からくる曲線の交点即ち「cerenkov」 shock front の点で切れる。角度でいえば $1 \geq \cos \theta \geq \frac{|\omega_p - \omega + k\mathbf{v}|}{k_d V}$ 及び $-1 \leq \cos \theta \leq -\frac{|\omega_p + \omega - k\mathbf{v}|}{k_d V}$ であり、波数でいえば $\frac{|\omega_p - \omega + k\mathbf{v}|}{V} \leq \ell \leq k_d (= \frac{\omega_p}{\frac{KT}{m}})$ 及び $\frac{|\omega_p + \omega - k\mathbf{v}|}{V} \leq \ell \leq k_d (= \frac{\omega_p}{\frac{KT}{m}})$ が共鳴の存在する範囲である。注目すべきことは $V < V_{Th}$ の時でも共鳴が現われることがある点である。

共鳴が存在する条件

	$V > V_{Th}$	$V < V_{Th}$
$\omega - k\mathbf{v} \geq \omega_p$	$k_d > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{V_{Th} + V} > \frac{ \omega_p - \omega }{V}$ $k_d > \frac{ \omega_p + \omega - k\mathbf{v} }{V} > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{ V_{Th} - V }$	$k_d > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{V_{Th} + V} > \frac{ \omega_p - \omega + k\mathbf{v} }{V}$ <p>存在しない</p>
$\omega_p \geq \omega - k\mathbf{v} \geq 0$	<p>必ず存在する</p> $k_d > \frac{ \omega_p + \omega - k\mathbf{v} }{V} > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{ V_{Th} - V }$	$\frac{ \omega - k\mathbf{v} }{ V_{Th} - V } > k_d > \frac{ \omega_p - \omega + k\mathbf{v} }{V}$ <p>存在しない</p>
$0 \geq \omega - k\mathbf{v} \geq -\omega_p$	$k_d > \frac{ \omega_p - \omega + k\mathbf{v} }{V} > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{ V_{Th} - V }$ <p>必ず存在する</p>	<p>存在しない</p> $\frac{ \omega - k\mathbf{v} }{ V_{Th} - V } > k_d > \frac{ \omega_p + \omega - k\mathbf{v} }{V}$
$\omega - k\mathbf{v} \leq -\omega_p$	$k_d > \frac{ \omega_p - \omega + k\mathbf{v} }{V} > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{ V_{Th} - V }$ $k_d > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{V_{Th} + V} > \frac{ \omega_p + \omega - k\mathbf{v} }{V}$	<p>存在しない</p> $k_d > \frac{ \omega - k\mathbf{v} }{V_{Th} + V} > \frac{ \omega_p + \omega - k\mathbf{v} }{V}$

以上のことからプラズマ波の輻射による frictional force の計算は次のようになる。

ビームの速度 $\mathbf{v}$ の方向を Z 軸にとると α は Z 方向だけが残る。

プラズマ内の輸送現象 (I)

$$\begin{aligned}
 A_r^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{n} \int_0^{k_d} d\ell \frac{\ell}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} \int d\xi \frac{\xi \Delta_i(\xi)}{\left\{1 - \frac{\omega_p^2}{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \ell V \xi]^2}\right\}^2 + \Delta_i(\xi)^2} \\
 &= \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{n} \int_0^{k_d} d\ell \frac{\ell}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_r \Delta_i(\xi_r) d\delta}{\frac{4\ell^2 V^2 \delta}{\omega_p^2} + \Delta_i(\xi_r)^2} \\
 &= \frac{e^2 \omega_p}{2V^2} (\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}) \log \frac{k_d V}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} \quad (20)
 \end{aligned}$$

もう一方の共鳴についても同様に

$$A_r^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{e^2 \omega_p}{2V^2} (\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \log \frac{k_d V}{|\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|} \quad (21)$$

従つて

$$\begin{aligned}
 A_r^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{e^2 \omega_p}{2V^2} \left[(\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}) \log \frac{k_d V}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} + (\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \log \right. \\
 &\quad \left. \frac{k_d V}{|\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|} \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

特に $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ の時

$$A_r^z(\mathbf{p}) = \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \log \frac{V}{V_{Th}} \quad (23)$$

となり Klimontovich の長距離部分 A_r^z に一致する。 $V_{Th} > V$ の場合でも、 $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \gg \omega_p^2$ ならば共鳴損失は起こるが、 $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \gg \omega_p^2$ の条件は起りにくいことであろう。 $V_{Th} > V$ で $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ の時には共鳴は存在しないのでプラズマ振動の励起による。エネルギー損失は起り得ない。

次に共鳴領域以外からの寄与を考えよう。 ℓ の小さい処例えば $0 < 1 < k_d$ の領域で Δ_i が 1 より大きくなる場合には integrand は ℓ^4 の order で無視出来る。 $1 > k_d$ 領域では

$V > V_{Th}$ の時と $V < V_{Th}$ の時では事情が異なる。 $V < V_{Th}$ の時には $\frac{KT}{m} \ell^2 \ll (\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \mathbf{v})^2$ で且つ $\ell > k_d$ を満足する領域は小さく friction force に寄与しない。 $V > V_{Th}$ の時には $\ell \geq k_d, 1 > \cos \theta > \frac{V_{Th}}{V}, -1 < \cos \theta < -\frac{V_{Th}}{V}$ の領域を考える。integrand の分母では 1 以外の項は非常に小さい。又、 ℓ の非常に大きい処で integrand が発散するので量子力学的取扱が必要となるが、ここでは Landau cutoff $\nu^* = \frac{KT}{e^2}$ を取る。

$$\begin{aligned}
 A_s^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{n} \int_{k_d}^{\nu^*} d\ell \left\{ \int_0^{\cos^{-1} \frac{V_{Th}}{V}} + \int_{\cos^{-1}(-\frac{V_{Th}}{V})}^{\pi} \right. \\
 &\quad \cdot \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k \ell^3 [\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + \ell V \cos \theta]}{\ell^2 \omega_p} \exp\left[-\frac{m [\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + \ell V \cos \theta]^2}{2KT l^2}\right] \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p}{(2\pi)^2} k_d^3 \frac{m}{n} \frac{1}{V^2} \int_{k_d}^{\nu^*} d\ell \frac{1}{\ell^2} \left\{ \int_{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + \ell V}^{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + \ell V} + \int_{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} - \ell V}^{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} - \ell V} \right\} dz \\
 &\quad \cdot [z - (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})] z \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{z^2}{l^2}\right] \quad (24)
 \end{aligned}$$

ここで $\int_0^1 z^2 \exp[-\zeta^2 z^2] dz = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{\zeta} \operatorname{erf} \zeta \right)$, ζ の大きい時の近似式として $\frac{d}{d\zeta} (\zeta^{-1} \operatorname{erf} \zeta) = \zeta^{-2} (-1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \zeta e^{-\zeta^2} + \dots)$, そして更に $V \gg V_{Th}$ と近似すると結果は

$$A_{s1}^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (25)$$

ii) 次に $\frac{KT}{m} \ell^2 \gg (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + \ell \mathbf{v})^2$ の場合を考えよう。

此の領域は $\ell \geq \frac{|\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}|}{V_{Th}}$ であり、 $\cos \theta$ については $V > V_{Th}, V < V_{Th}$ によつて異なる。

プラズマ内の輸送現象 (I)

$$\begin{aligned}
 A_s^\alpha(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^3} \frac{m}{n} \int d\mathbf{l} \frac{\ell^\alpha}{l^2} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]}{\left\{1 + \frac{k_d^2}{\ell^2}\right\}^2 + \left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]\right\}^2} \\
 &= \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{n} \int \frac{\nu^*}{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|} d\ell \int d\theta \frac{\sin\theta \cos\theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^2} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]}{\left\{1 + \frac{k_d^2}{\ell^2}\right\}^2 + \left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]\right\}^2} \\
 &\quad (26)
 \end{aligned}$$

$V > V_{Th}$ の場合には $-\frac{V_{Th}}{V} \leq \cos\theta \leq \frac{V_{Th}}{V}$ の範囲である。此の領域の条件より

$$\frac{k_d^2}{l^2} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{\omega_p^2} \ll 1, \quad \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{l^2}\right] \approx 1, \quad \text{従つて分母のオ二項はオ一項}$$

に比し無視出来る。すると

$$\begin{aligned}
 A_{s2}^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^2} \frac{m}{n} \int \frac{\nu^*}{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|} d\ell \frac{\ell^4}{(\ell^2 + k_d^2)^2} \int_{\cos^{-1}(\frac{V_{Th}}{V})}^{\cos^{-1}(\frac{V_{Th}}{V})} d\theta \cdot \\
 &\quad \cdot \sin\theta \cos\theta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{l^2} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{l^2}\right] \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p}{(2\pi)^2} k_d^3 \frac{m}{n} \frac{1}{V^2} \int \frac{\nu^*}{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|} d\ell \frac{1}{(\ell^2 + k_d^2)^2} \int_{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \ell V_{Th}}^{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \ell V_{Th}} [z - (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})] \cdot \\
 &\quad \cdot z \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{z^2}{l^2}\right] dz \quad (27)
 \end{aligned}$$

ここでオ一項の積分は次のように行う。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \ell V_{Th}|} z^2 \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{z^2}{1^2}\right] dz + \int_0^{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \ell V_{Th}|} z^2 \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{z^2}{1^2}\right] dz \\
 &= |\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \ell V_{Th}|^3 \int_0^1 x^2 \exp[-\zeta_1^2 x^2] dx + |\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \ell V_{Th}|^3 \int_0^1 x^2 \exp[-\zeta_2^2 x^2] dx \\
 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ |\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \ell V_{Th}|^3 \frac{1}{\zeta_1} \frac{d}{d\zeta_1} \left(\frac{1}{\zeta_1} \operatorname{erf} \zeta_1 \right) + |\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \ell V_{Th}|^3 \frac{1}{\zeta_2} \frac{d}{d\zeta_2} \left(\frac{1}{\zeta_2} \operatorname{erf} \zeta_2 \right) \right\} \\
 &= \frac{2}{3} \ell^3 V_{Th}^3 + 2 (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \ell V_{Th} \quad : \zeta_{1,2} \text{ の小さい時。}
 \end{aligned}$$

$$\zeta_1 = \frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \ell V_{Th}]^2}{1^2} \ll 1, \quad \zeta_2 = \frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \ell V_{Th}]^2}{1^2} \ll 1 \text{ を使った。}$$

上の値は $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$ の正負及び ℓV_{Th} との大小関係によらない。

オ二項の積分はオ一項に比して非常に小さくなることがすぐわかる。従つて

$$\begin{aligned}
 A_{s2}^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \left(\frac{m}{KT} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{V_{Th}^3}{3} \left(\log \frac{\nu^{*2} + k_d^2}{\frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V_{Th}^2} + k_d^2} - \frac{k_d^2}{\frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V_{Th}^2} + k_d^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + V_{Th} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \left(\frac{1}{\frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V_{Th}^2} + k_d^2} - \frac{1}{\nu^{*2} + k_d^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \left[\frac{1}{3} \log \frac{V_{Th}^2 \nu^{*2}}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right] \quad (28)
 \end{aligned}$$

$V < V_{Th}$ の時には $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ である。上と同様な計算で

$$A_s^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p}{(2\pi)^2} k_d^3 \frac{m}{n} \frac{1}{V^2} \int_{V_{Th}}^{\nu^*} d\ell \frac{1}{(\ell^2 + k_d^2)^2} \int \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \ell V}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \ell V} [z - (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})]$$

プラズマ内の輸送現象 (I)

$$\begin{aligned}
 & \cdot z \exp \left[-\frac{m}{2KT} \frac{z^2}{l^2} \right] dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \left(\frac{m}{KT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|}{V_{Th}}}^{\nu^*} d\ell \frac{1}{(\ell^2 + k_d^2)^2} \left[\frac{2}{3} \ell^3 V^3 + 2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 \ell V \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \omega_p^2}{V_{Th}^2} \left[\frac{1}{3} \frac{V}{V_{Th}} \log \frac{V_{Th}^2 \nu^{*2}}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + \frac{V_{Th}}{V} \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right] \quad (29)
 \end{aligned}$$

結局 $V > V_{Th}$ の時には

$$\begin{aligned}
 A_s^z(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= A_{s1}^z + A_{s2}^z \\
 &= \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log \frac{\nu^*}{k_d} + \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \log \frac{\nu^{*2}}{\left[\frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{V_{Th}^2} + k_d^2 \right]} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

ここで $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ とすると

$$A_s^z(\mathbf{p}) = \left(1 + \frac{1}{3} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \log \frac{\nu^*}{k_d} \approx \frac{e^2 \omega_p^2}{V^2} \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (31)$$

となり、Klimontovich の短距離部分 A_s^z によく一致している。(係数がわづか大きい。)

$V < V_{Th}$ で $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ の時には

$$A_s^z(\mathbf{p}) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 \omega_p^2}{V_{Th}^2} \frac{V}{V_{Th}} \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (32)$$

$V < V_{th}$ の時はビーム電子の速度に比例して friction force が増加するが、熱運動速度より速くなると速度の自乗に逆比例して runaway を示す。

Tchen の論文では、いわば $V < V_{Th}$ の場合にのみ成立する遮蔽因子を用いていながら $V > V_{Th}$ の場合をも論じている。これは正しくない。 $V < V_{Th}$ では長距離部分即ちプラズマ振動に関する friction loss はなく、短距離の collision loss だけが V に比例してきているが $V \approx V_{Th}$ を超えると長距離部分の friction が急に増加し、 $V > V_{Th}$ で長距離、短距離ともに $\frac{1}{V^2}$ で減少し、大体同程度の order になる。

§ 5 運動量空間での拡散係数の計算

$$B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{\lambda^2}{Q} \sum_l \frac{[1+n\chi(l)]V(l)^2}{A(\mathbf{k}-\mathbf{l}, l; \omega; \mathbf{v})} e^{\alpha} e^{\beta} \int \delta_+(\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v} - l\mathbf{v}') f_0(V) d\mathbf{v}' \quad (33)$$

これを变形すると結局 $\frac{KT}{m} \ell^2 \ll (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + l\mathbf{v})^2$ の時には

$$B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{\omega_p^3}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{n} \int d\mathbf{l} \frac{1}{l^4} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d}{|\ell|} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]}{\left\{1 - \frac{\omega_p^2}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2} + \left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]}{\omega_p}\right\}\right.}$$

$$\left. \frac{\exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]}{1^2}\right\}^2 + \left\{\frac{\omega_p}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]} \left(1 + \frac{KT}{m} \frac{l^2}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2}\right) - \{A_i\}^2\right\}^2$$

$$+ i \frac{\omega_p^3}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{n} \int d\mathbf{l} \frac{1}{l^2 + k_d^2} \frac{\ell^{\alpha} \ell^{\beta}}{l^2} \frac{\omega_p}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]} \left(1 + \frac{KT}{m} \frac{l^2}{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2}\right) - \{A_i\}^2 \quad (34)$$

$\frac{KT}{m} \ell^2 \gg (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + l\mathbf{v})^2$ の時には

$$B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{\omega_p^3}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{n} \int d\mathbf{l} \frac{\ell^{\alpha} \ell^{\beta}}{l^4} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d}{|\ell|} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]}{\left\{1 + \frac{k_d^2}{\ell^2}\right\}^2 + \left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]}{\omega_p} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{l})\mathbf{v}]^2}{l^2}\right]\right\}^2}$$

プラズマ内の輸送現象 (I)

$$-i \frac{\omega_p^3}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{n} \int d\mathbf{l} \frac{1}{1^2 + k_d^2} \frac{\ell^\alpha \ell^\beta}{1^4} \frac{\frac{m}{KT} \omega_p \frac{[\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}]}{1^2} (1 + \dots) + \{A_i\}^2}{\left\{1 + \frac{k_d^2}{\ell^2}\right\}^2 + \{A_i\}^2} \quad (35)$$

$B^{\alpha\beta}$ の虚数項については後の機会にゆずることにして、 A^α の計算と同様の過程により実数項を計算する。粒子の速度 $\mathbf{v}$ の方向を z 軸にとると、 $\alpha\beta$ は zz , xx , yy , 成分だけが残りは消える。 xx , yy は全く同じ計算になる。 ℓ , $\cos\theta$ の変域や、共鳴存在の条件等については A^α の計算でやつたものと全く同じである。

i) $\frac{KT}{m} \ell^2 \ll (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v})^2$ の場合

この領域では A^α と同様に共鳴からの寄与が支配的である。

$$\begin{aligned} B^{(zz, yy)}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) &= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\omega_p^3}{(2\pi)^2} k_d^{-2} \frac{m^2}{n} \int \frac{k_d}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} d\ell \ell^2 \int_0^\pi d\theta \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sin\theta \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{1^2}\right]}{\left\{1 - \frac{\omega_p^2}{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}\right\}^2 + A_i^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\omega_p}{(2\pi)^2} KT \frac{m}{n} \int \frac{k_d}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} d\ell \ell^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{1 - \xi^2} \left(\frac{\xi^2}{1 - \xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_d^3}{|\ell|^3} \exp\left[-\frac{m}{2KT} \frac{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}{1^2}\right] d\xi \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left\{1 - \frac{\omega_p^2}{[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v}]^2}\right\}^2 + A_i^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\omega_p}{(2\pi)^2} KT \frac{m}{n} \int \frac{k_d}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} d\ell \ell^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{\xi_r^2}{1 - \xi_r^2}\right) A_i(\xi_r) d\xi}{\frac{4 \ell^2 v^2 \delta^2}{\omega_p^2} + A_i(\xi_r)^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{e^2}{2V} KT \left(\frac{[\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V^2} \log \frac{k_d V}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} - \frac{1}{2} \left[k_d^2 - \frac{[\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V^2} \right] - \frac{[\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V^2} \log \frac{k_d V}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} \right) \quad (36) \end{aligned}$$

もう一方の共鳴からの寄与を加えると結果は

$$B_r^{zz,yy}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{e^2}{2V} KT \left(\frac{[\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V^2} \log \frac{k_d V}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} + \frac{[\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V^2} \right. \\ \left. \cdot \log \frac{k_d V}{|\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|} + \frac{[\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V^2} \right) \cdot \log \frac{k_d V}{|\omega_p - \omega + \mathbf{k}\mathbf{v}|} + \frac{[\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{V^2} \log \frac{k_d V}{|\omega_p + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|} \quad (37)$$

特に $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ で $V \gg V_{Th}$ の時 Klimontovich の式と一致する。

$$B_r^{zz}(\mathbf{p}) = \frac{e^2 KT}{V^3} \omega_p^2 \log \frac{V}{V_{Th}} \quad (38)$$

$$B_r^{xx}(\mathbf{p}) = B_r^{yy}(\mathbf{p}) = \frac{me^2 \omega_p^2}{4V} (V \gg V_{Th}) \quad (39)$$

Off-Resonance からの寄与は $V < V_{Th}$ の時は無視出来る。

$V > V_{Th}$ の時には $\nu^* \geq \ell \geq k_d$, $\cos \theta > \frac{V_{Th}}{V}$ で限られた領域からの積分が支配的であり、 $k_d > \ell > 0$ の範囲からの寄与は無視出来る。 A^α の計算の時と同様の近似をすると

$$B_s^{zz}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 KT}{V^3} \omega_p^2 \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (40)$$

$$B_s^{xx}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = B_s^{yy}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{me^2 \omega_p^2}{V} \frac{V_{Th}^2}{V^2} \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (41)$$

) 次に $\frac{KT}{m} \ell^2 \gg (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v})^2$ の場合を考えよう。

$V > V_{Th}$ の時には此の領域は $\nu^* \geq \ell \geq \frac{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|}{V_{Th}}$, $-\frac{V_{Th}}{V} < \cos \theta < \frac{V_{Th}}{V}$ で限られ、 A^α と

プラズマ内の輸送現象 (I)

同様の計算方法により、

$$B_{s2}^{zz}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 KT}{V^3} \omega_p^2 \left[\frac{1}{3} \log \frac{V_{Th}^2 \nu^{*2}}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + 2 \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right] \quad (42)$$

$$B_{s2}^{xx}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = B_{s2}^{yy}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{me^2 \omega_p^2}{V} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \frac{V_{Th}^2}{V^2}\right) \cdot \log \frac{V_{Th}^2 \nu^{*2}}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} - 2 \frac{V_{Th}^2}{V^2} \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right] \quad (43)$$

特に $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ の時には

$$B_{s2}^{zz}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3} \frac{e^2 KT}{V^3} \omega_p^2 \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (44)$$

$$B_{s2}^{xx}(\mathbf{p}) = B_{s2}^{yy}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{me^2 \omega_p^2}{V} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{V_{Th}^2}{V^2}\right) \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (45)$$

従つて短距離相関効果による運動量空間での拡散係数は $V > V_{Th}$ の場合に

$$B_s^{zz}(\mathbf{p}) = B_{s1}^{zz} + B_{s2}^{zz} = \frac{e^2 KT}{V^3} \omega_p^2 \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (46)$$

$$B_s^{xx}(\mathbf{p}) = B_s^{yy}(\mathbf{p}) = B_{s1}^{xx} + B_{s2}^{xx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{me^2 \omega_p^2}{V} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{V_{Th}^2}{V^2}\right) \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (47)$$

$V < V_{Th}$ の時には領域は $\nu^* \geq \ell \geq \frac{|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}|}{V_{Th}}$, $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ で限られ、 A^α の計算で使つ

た方法と同様にして結果は次のようになる。

$$B_s^{zz}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{me^2 \omega_p^2}{V_{Th}} \left[\frac{1}{3} \log \frac{V_{Th}^2 \nu^{*2}}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + 2 \frac{V_{Th}^2}{V^2} \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right] \quad (48)$$

$$B_s^{xx}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = B_s^{yy}(\mathbf{k}; \mathbf{p}; \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{me^2 \omega_p^2}{V_{Th}} \left\{ \frac{1}{3} \log \frac{V_{Th}^2 \nu^{*2}}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} - \frac{V_{Th}^2}{V^2} \frac{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\omega_p^2 + (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right\} \quad (49)$$

特に $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ の時

$$B_s^{zz}(\mathbf{p}) = B_s^{xx}(\mathbf{p}) = B_s^{yy}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{3} \frac{me^2 \omega_p^2}{V_{Th}} \log \frac{\nu^*}{k_d} \quad (50)$$

電子ビームの速度が熱運動速度より遅い時には、ビームの方向を z 軸とすると、運動量空間での拡散係数は zz 成分とそれに直角な xx 成分、 yy 成分とは等しく等方的である。ビームの速度に explicit によらないが、プラズマの温度には $1/2$ 乗に逆比例する。Tehen の論文ではビームの温度を考慮に入れているが、その結果があいまいである。熱運動速度より速い粒子の拡散係数については、プラズマ波の輻射による長距離相関効果と衝突による短距離相関効果とが同程度にきいてくる。 zz 成分は粒子の速度の三乗に逆比例し、プラズマ温度に比例する。 xx 成分、 yy 成分は主として速度の一乗に逆比例し、プラズマ温度にあまりよらない。

§ 6 運動量空間での分布関数の時間的変化

摩擦力和拡散係数の計算結果の式を比較すると次のことがわかる。 $\frac{KT}{m} \ell^2 \gg (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v})^2$ の場合には拡散による変化が支配的である。従つてその分布関数の時間的変化の漸近的振舞いは次の式で近似される。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\partial \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \{ B^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) \frac{\partial}{\partial p_\beta} f(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) \} \quad (51)$$

又、 $\frac{KT}{m} \ell^2 \ll (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{l}\mathbf{v})^2$ の時には摩擦力による変化が支配的となる。

従つてその分布関数の時間的変化は

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{\partial \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \{ A^\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) f(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \omega) \} \quad (52)$$

プラズマ内の輸送現象 (I)

特に $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ とすると、粒子の速度が熱運動速度よりずっと遅い時には拡散による分布函数の変化が主となり

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{v}; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \{ B^{\alpha\beta}(\mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial p_{\beta}} f(\mathbf{p}; \omega) \} \quad (53)$$

粒子の速度が熱運動速度よりずっと速い時には摩擦力による変化が主となり

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{v}; t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}} \{ A^{\alpha}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}; \omega) \} \quad (54)$$

上の二つの方程式に於いて左辺を零とすると分布函数としてともにマックスウェル分布が出てくる。このようにプラズマ中の特定の粒子に着目した場合、あるいはプラズマに電子ビームを入射した場合、その分布函数の定常状態はマックスウェル分布を取る。

§ 7 結 論

1) 我々は一般化された Fokker-Planck 方程式から一般化された力学的摩擦力と一般化された拡散係数を導いたが、その結果の特別な場合として Bohm, Pines 或は Klimontovich の式に一致することを確認した。そしてプラズマと粒子の相互作用に関して長距離相関効果は、プラズマ波の輻射による振動励起に相当して共鳴の形で表はれることがわかった。特に注目すべきは、粒子の速度が熱運動速度より遅くても、粒子が $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ で時間的に変化していて § 4 に述べた条件即ち $\omega p \geq (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \geq -\omega p$, $(V_{Th} - V) \omega p < |\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}| V_{Th}$ 或は $|\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}| \geq \omega p$, $(V_{Th} + V) \omega p > |\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}| V_{Th}$ を満足する時には、粒子は共鳴的にプラズマ振動を励起してエネルギーを失い拡散するということである。

2) 我々と同様の計算を行つている文献がいくつかあるが、それらは完全なものとはいえないことを前に説明した。我々の計算では一般化された Fokker-Planck 方程式から出発して、可成り色々の事柄を述べることができた。その場合重要なのは遮蔽効果の問題であつて、我々の計算では遮蔽因子の形で式の中に現われ、それを通して遮蔽効果の影響が長距離相関効果及び短距離相関効果として非常に自然に明瞭に理解される。我々の遮蔽因子のこのような一般的働きは多体相関効果を考慮して正しく取り入れたといつてよく、プラズマの振舞いははなはだ複雑であるので簡単に考えた模型からではプラズマの重要な本質は出て来ない。

分極ポテンシャル及び振動減衰の問題については後の機会に述べられる。

Referance

- 1) L.Landau, Physik. Z. Sowjetunion 10, 154 (1936)
- 2) J.Enoch, Phys. Fluids 3, 353 (1960)
- 3) T.Kihara, J. Phys. Soc. Japan 14, 402 (1959); 15, 684 (1960)
- 4) 松本道夫 核融合研究 5, 356 (1960)
- 5) D.Bohm and D.Pines, Phys. Rev. 92, 609 (1953)
- 6) L.Klimontovich, J.E.T.P. (U.S.S.R.) 36(9), 999 (1959)
- 7) S.V.Temko, JETP (U.S.S.R.) 31(4), 1021 (1956)
- 8) C.M.Tchen, Phys. Rev. 114, 394 (1959)
- 9) N.Rostoker and M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 3, 1 (1960)
- 10) 市川芳彦, 核融合研究 4, 440 (1960), Prog. Theoret. Phys. 23, No. 5 (1960)
- 11) A.I.Larkin, JETP (U.S.S.R.) 37, 264 (1959)
- 12) R.Balescu, Phys. Fluids 3, 52 (1960)