Electromagnetic Waves in the Magnetised Plasma

渡 辺 健 二 (大阪市大 原子力) *

§1. Introduction and Summary

電磁波の波動Vector $\mathbf{k}$ が外場 $\mathbf{B}_0$ と直角をなし、又 wave の $\mathbf{E}$ vector も $\mathbf{B}_0$ と垂直の場合には、入射波が平面波のときにも Plasma に疎密波を生じ事情がこみ入ってくることはすでに指摘されている¹⁾。Electron Cyclotron Resonance に関する研究会^{***}でも話題に上つて懸念されたことでもある。

その Mechanism という観点から特に興味を覚えたので、平均操作をほどこした後の Boltzmann Equation から出発して疎密波の考慮をした。Dispersion Relation を導いてみた。その結果、1に比して $r_e \kappa T_e / (m_e c^2)$ の order でしかきかないことがわかつたので、現在実用上考慮する必要はないが、Mechanism という意味で面白いと思うのでその大略を記すことにする。

§2. Mechanism

ある時刻 t に第1図の様な configuration にあるとすると、wave の $\mathbf{E}$ に response する current $\mathbf{j}$ は、 $\frac{1}{\omega_{ce}}$ の order の時間を考えると、 $\mathbf{E}$ に平行なもののみならず $\mathbf{E}$ に垂直な所謂 Hall Current が出てくる。これは第1図に点線で $j_{\perp}$ として、示したが、これから明らかな様に current の divergence を示すことになり空間電荷を生ずる。これは現象論的に

第 1 図

脚註 * K. Watanabe (Institute for Atomic Energy Research, Osaka City University)

*** L. Spitzer; Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, 1956), p. 55

は粗密波となる。この $j_{\perp}$ により、はじめの $\mathbf{E}$ に垂直な $\mathbf{E}$ を生じてくるから、Plasma の外から平面波が入射したときも Plasma 内では平面的でない波として伝播することになる。

§ 3. Dispersion Relation

第2図の様な configuration で考
える。 $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$ は § 2 の考察から明らかな様
に、 x -, y -成分のみを持つとし又空間的
には簡単のため y 方向にのみ変化するとす
る。(これらの仮定は一般性はそこなわない。)
さて波動方程式は通例の如く

第 2 図

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (1)$$

であり、Plasma 内であるから $\mathbf{j}$ は Boltzmann Eq.

$$\frac{m_e}{n_e c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{1}{n_e e} \nabla p_e - \frac{1}{n_e e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} \quad (2)$$

で記述される²⁾とする。 $t \sim \frac{1}{\omega_{ce}}$ の変化を問題*にするので electron の動きのみに注目す
ればよいから、Plasma の mass を支配する Equation は考慮しなくてもよい。記号
etc. は L. Spitzer の教科書¹⁾にしたがう。(但し e としては e. m. u. そのまゝを用うる。)
又通例の如く $\mathbf{B}$ は外場の $\mathbf{B}_0$ が支配的であると、wave の $\mathbf{B}$ は省略する。

これら(1)(2)式から $\mathbf{E}$ と $\mathbf{j}$ との Dependence を求めるのが Mechanism という点から重
要な事である。

先づ(1)式を第2図の configuration で x -, y -成分にわけると

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial j_x}{\partial t} \quad (3)$$

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial j_y}{\partial t} \quad (4)$$

となる。この(4)式によれば E_y 成分は波動方程式に従わないので、外から E_x のみを持つ平面波が

脚註 * loc. cit., p. 21

Electromagnetic Waves in the Magnetised Plasma

入射したとき Plasma 内に生ずる E_y (これは実は j からきている) は電磁波にならないことを示している。すぐわかる様に、 $\nabla \cdot j = -\partial \sigma / \partial t$ を考慮すれば (4) 式は Maxwell 1 Eq. の $\nabla \cdot E = 4\pi c^2 \cdot \sigma$ と同じ内容のものである。次に (2) 式も同様 x -, y - 成分にわけると

$$\frac{m_e}{n_e c^2} \frac{\partial j_x}{\partial t} = E_x - \frac{1}{n_e e} B_0 \cdot j_y - \eta j_x \quad (5)$$

$$\frac{m_e}{n_e c^2} \frac{\partial j_y}{\partial t} = E_y + \frac{1}{n_e e} B_0 \cdot j_x - \eta j_y + \frac{1}{n_e e} \frac{\partial p_e}{\partial y} \quad (6)$$

となる。ここで p_e に関して adiabatic compression の仮定をおくと*

$$\nabla p_e = -\frac{r_e \kappa T_e}{e} \nabla \sigma = -\frac{r_e \kappa T_e}{4\pi c^2 e} \nabla \nabla \cdot E ,$$

第 2 図の configuration では

$$\frac{\partial p_e}{\partial y} = -\frac{r_e \kappa T_e}{4\pi c^2 e} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} \quad (7)$$

となる。

数式の取扱いという観点から云うと、(3)(4)(5)(6)(7) の 5 式を用い変化はすべて $\exp$ で $(ky - \omega t)$ に比例するとして、 E_x, E_y, j_x, j_y & p_e が non-trivial な解を持つ条件を求めるとこれが Dispersion Relation となる。結果は、 $k \equiv kc/\omega$ とおくと

$$k^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \frac{1}{1 + i\frac{\nu}{\omega} - \frac{(\omega_{ce}/\omega)^2}{1 + i\frac{\nu}{\omega} - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - \frac{r_e \kappa T_e}{m_e c^2} k^2}} \quad (8)$$

と得られる。ここで通例の如く $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 c^2 / m_e$, $\omega_{ce} = eB_0 / m_e$ & $\nu = \eta \omega_p^2 (4\pi c^2)^{-1}$ etc. を用いた。この結果は、右辺の分母中に含まれる k^2 の項を無視すれば、今迄近似的に成立つとして示されていたもの** と全く一致する。それ故疎密波の影響は 1 に対して $r_e \kappa T_e / (m_e c^2)$ の order できいていることがわかる。数万度程度の Cold plasma ならばこの factor は 10^{-5} 程度で無視してもよい。

Mechanism と直結した観方ということからいえば、次の導き方がよりわかり易いである

脚註 * loc. cit., p. 59

** for example, S. Tanaka ; 核融合研究 4 550 ('60)

う。即ち空間電荷を導入した方がはつきりする。

(2)式の Divergence をとつてみる。 $\nabla n_e \ll n_e$, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ を留意して、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ 及び $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e^2 \cdot \sigma$ で σ を導入すると、

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{r_e \kappa T_e}{m_e} \nabla^2 \sigma - \nu \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \omega_p^2 \sigma - \omega_{ce} \frac{\partial j_x}{\partial y} \quad (9)$$

となる。右辺最後の項は $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ という力からきている。この(9)式は $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ の j_x からくる力で強制されている疎密波動をあらわしている。第2図の configuration からわかる様に、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \sigma / \partial t$ から σ は j_y できまる故先の(6)式が丁度この(9)式となるものである。同様に j_y を σ でおきかえた(5)式と、この(9)式から j_x と σ を E_x の函数として求めることが出来る。変化がすべて $\exp i(ky - \omega t)$ に比例するとして求めると

$$j_x = \frac{i}{\omega} \frac{\omega_p^2}{4\pi e^2} \left[1 + \frac{i\nu}{\omega} - \frac{(\frac{\omega_{ce}}{\omega})^2}{1 + \frac{i\nu}{\omega} - (\frac{\omega_p}{\omega})^2 - \frac{r_e \kappa T_e}{m_e c^2} k^2} \right]^{-1} E_x$$

となる。これが E_x に follow する current である。

故に(3)式としての

$$R^2 = 1 + i \frac{4\pi e^2}{\omega} \frac{j_x}{E_x}$$

に代入すると、Dispersion Relation として(8)式が求まる。それ故電磁波としての E_x は j_x 及び j_y を生ずるが、その中 j_y は疎密波となる。この疎密波は j_x から energy を得ているので、逆に j_x も当然その影響を受ける。その結果の j_x が E_x に response する polarization current であつて、これが E_x の伝播を disturb するものとなつている。