プラズマ波の excitation*

田中正俊(原研)**

1. プラズマ中を流れる電流によつてプラズマ波が excite される。ここでは境界のない様なプラズマをかんがえ、あたえられた電流分布により excite されたプラズマ波の輻射強度をもとめる。境界があるばあいはつぎの機会にゆずる。あたえられた電流のプラズマへの reaction は無視し、プラズマの電磁的性質は、そのプラズマ固有の誘電率テンソル $\hat{\epsilon} = (\epsilon_{ik})$ であらわされるものとする。 $\hat{\epsilon}$ はプラズマを記述する方程式からきまる。

基礎となるのは Maxwell 方程式である。

$$\text{div } \hat{\epsilon} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{curl } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\epsilon} \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{curl } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (1)$$

$\mathbf{j}$ により excite される波の輻射強度は

$$I = -\int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (2)$$

であたえられる。

(1)をとくのに $\mathbf{E}$ その他を Fourier 成分にわけると $\mathbf{B}$ を消去すると(1)は $\mathbf{E}$ についての一次方程式になり、 $\mathbf{E}$ したがつて輻射強度がもとまる。一般の $\hat{\epsilon}$ についての輻射強度の表式をかきくだすことはやめて例題にうつる。

2. 磁場のないプラズマ中を速度 $\mathbf{v}$ (z 方向) で運動する電子を考える。

$$\mathbf{j}_3(\mathbf{r}, t) = -e\mathbf{v} \delta(x) \delta(y) \delta(z - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_3(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{e\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}_3 \mathbf{v})$$

まず縦波から¹⁾。 $\hat{\epsilon}$ はスカラーになることはあきらかで、(1)から $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega \epsilon k^2} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{k}$

脚註 * Excitation of Plasma Waves

1960年10月の物理学会で報告した。

** M. Tanaka (Japan Atomic Energy Research Institute)

と電場がもとまる。一方 ϵ は衝突を無視した Boltzmann 方程式から出発すると、平衡分布を温度 T の Maxwell 分布として、

$$\epsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int_C \frac{(ku) \frac{\partial f_0}{\partial u}}{(\omega - ku)u} du = 1 + \frac{4\pi e^2 n_0}{k^2 T} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{e^{-y^2}}{z-y} dy \right)$$

であたえられる。ここで $u = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$, $y = \sqrt{\frac{m}{2T}} \cdot \frac{(ku)}{k}$, $z = \sqrt{\frac{m}{2T}} \cdot \frac{\omega}{k}$

また積分路 C は pole の下をまわる実軸上の路である。イオンの運動は無視した。(2) から I をもとめると

$$\begin{aligned} I &= -(2\pi)^3 \int \mathbf{E}_3(\mathbf{k}, \omega) j_3(-\mathbf{k}, \omega') e^{-i(\omega+\omega')t} d\omega d\omega' d\mathbf{k} \\ &= -\frac{e^2 v^2}{2\pi} \text{Re} i \int \frac{k_3^2 \delta(\omega - k_3 v)}{k^2 \omega \epsilon} k_{\perp}^2 dk_{\perp} dk_3 d\omega \quad d\mathbf{k} = 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} dk_3 \end{aligned}$$

となる。はじめに $z \gg 1$ ($v \gg \sqrt{\frac{2T}{m}}$ すなわち $v \gg$ プラズマ電子の熱速度)。このとき

$$\int_C \frac{e^{-y^2}}{z-y} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{z} \left(1 + \frac{1}{2z^2} \right) - i\pi e^{-z^2} \text{ であり、Landau 減衰をあたえる虚数部を}$$

無視すると

$$\begin{aligned} I &= -\frac{e^2 v}{2\pi} \text{Re} i \int_0^{k_m} k_{\perp} dk_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{(v^2 k_{\perp}^2 + \omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \\ &= \frac{e^2 \omega_0^2}{2v} \ell_n \frac{k_m^2 v^2}{\omega_0^2} \quad v^2 \gg k_m^2 \omega_0^2 \end{aligned}$$

となり、普通の $\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ としたばあいの polarization 損失と一致する。

($k_m \sim (\text{Debye 半径})^{-1}$) $z \ll 1$ $v \ll \sqrt{\frac{m}{2T}}$ のとき $\int_C \frac{e^{-y^2}}{z-y} dy \simeq -i\pi$ で、結果のみか

くと

$$I = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2T} \right)^{3/2} e^2 \omega_0^2 v^2 \ell_n \frac{3Tk_m^2}{\omega_0^2 m}$$

がえられる。

横波も同様にできて結果は

$$I \simeq 0 \quad v \gg \sqrt{\frac{2T}{m}}$$

$$I \simeq \frac{2}{15\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^2 \omega_0^2 \nu^4}{c^4} \sqrt{\frac{m}{2T}} \ell_n \frac{c^2 k^2 m}{\omega_0^2 \nu} \sqrt{\frac{3T}{m}}$$

となる。

3. つぎに一定の磁場 B_0 (z 方向) のあるばあいをかながえる。簡単のため e をきめるプラズマの方程式としては Spitzer の本のものをつかう²⁾³⁾ さらに衝突は無視し、温度は 0, また B_0 以外の量は小さいとする。

$$n_0 m_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e}{c} \mathbf{j}_p \times \mathbf{B}_0, \quad \frac{m_e}{n_0 e^2} \frac{\partial \mathbf{j}_p}{\partial t} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 - \frac{1}{c n_0} \mathbf{j}_p \times \mathbf{B}_0$$

振動数 ω のモードに対して、

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{x_i x_e - 1}{\beta^2 (x_i x_e - 1)^2 - x_i^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{x_i}{\beta^2 (x_i x_e - 1)^2 - x_i^2}$$

$$\epsilon_3 = 1 - \frac{1}{\beta^2 x_i x_e}$$

となる。ここで $x_d = \omega/\omega_c$ ($\alpha = e, i$), $\beta = B_0/\sqrt{4\pi n_0 m_i} c$ (Alfven 波の速度と光速との比) である。以下 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ とする。

$$I(\omega) = \int dI d\Omega \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dI = -\frac{(2\pi)^3}{2} \frac{\omega^3}{c^3} \int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}^*(\mathbf{k}) n^2 dn \quad n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \quad (n: \text{屈折率})$$

(1) から $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^*)$ はつぎであたえられる。

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^*) = \frac{4\pi i}{\omega D} \left[n^4 \{ \kappa_1^2 |j_1|^2 + \kappa_2^2 |j_2|^2 + \kappa_3^2 |j_3|^2 + \kappa_1 \kappa_2 (j_1 j_2^* + c, c) + \kappa_2 \kappa_3 (j_2 j_3^* + c, c) + \kappa_3 \kappa_1 (j_3 j_1^* + c, c) \} - n^2 \{ (\epsilon_1 (1 - \kappa_3^2) + \epsilon_3 (1 - \kappa_2^2)) |j_1|^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (\epsilon_1(1-\kappa_3^2) + \epsilon_3(1-\kappa_1^2)) |j_2|^2 + \epsilon_1(1+\kappa_3^2) |j_3|^2 + \epsilon_3 \kappa_1 \kappa_2 (j_1 j_2^* + c_1 c) \\
 & + \epsilon_1 \kappa_2 \kappa_3 (j_2 j_3^* + c, c) + \epsilon_1 \kappa_3 \kappa_1 (j_3 j_1^* + c, c) + i \epsilon_2 (1-\kappa_3^2) (j_1 j_2^* - c, c) \\
 & - i \epsilon_2 \kappa_2 \kappa_3 (j_3 j_1^* - c, c) - i \epsilon_2 \kappa_1 \kappa_3 (j_2 j_3^* - c, c) \} + \epsilon_1 \epsilon_3 |j_1|^2 + \epsilon_1 \epsilon_3 |j_2|^2 \\
 & + (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) |j_3|^2 + i \epsilon_2 \epsilon_3 (j_1 j_2 - c, c)]
 \end{aligned}$$

$$D = A n^4 + B n^2 + C = A (n^2 - n_1^2) (n^2 - n_2^2)$$

$$A = -\epsilon_1 (1 - \kappa_3^2) - \epsilon_3 \kappa_3^2$$

$$B = (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) (1 - \kappa_3^2) + \epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \kappa_3^2)$$

$$C = -\epsilon_3 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$$

ここで $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}}{k} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ また n_1, n_2 は異常波および正常波の屈折率であつて、

$$\begin{aligned}
 n_{1,2}^2 = 1 - \frac{2(1-\beta^2 x_i x_e)(x_i x_e - 1) + (1-\beta^2(1-x_i x_e - x_i^2)) \sin^2 \theta \{ 4(1-\beta^2 x_i x_e)^2 x_i^2 \cos^2 \theta + (1+\beta^2(1-x_i x_e - x_i^2)) \sin^4 \theta \}^2}{2\beta^2 \{ (1-\beta^2 x_i x_e)(x_i x_e - 1)^2 - x_i^2 \} \sin^2 \theta}
 \end{aligned}$$

である。 $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^*)$ が n について偶関数なら

$$dI = -\frac{(2\pi)^2}{4} \frac{\omega^3}{c^3} \cdot \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^*) n^2 dn$$

となり、この積分は D の 0 点 n_1, n_2 における留数からただちにもとまる。極は積分路上にあるので、外向き波の条件で路をきめる。

$$dI_{1,2} = \pm \frac{(2\pi)^5 \omega^2}{4A c^3} \frac{F(n_{1,2}) n_{1,2}}{(n_1^2 - n_2^2)}$$

ここで F は

$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}^*)$ の表式の $[\]$ の内部、 $dI_{1,2}$ はそれぞれ異常波および正常波の輻射強度である。つぎにいくつかの例をしめす。

a) 磁場方向に軸対称な電流がながれるばあい。

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (0, 0, \frac{j_0}{2\pi} F(r)) \quad \int_0^\infty F(r) r dr = 1$$

$$j_3(\mathbf{k}) = \frac{j_0}{(2\pi)^2} \delta(k_3) \int_0^\infty F(r) J_0(|\mathbf{k}|r) r dr$$

これから

$$I_1 = \frac{\pi \omega j_0^2}{2 c^2} \left[\int_0^\infty F(r) J_0\left(\frac{\omega |n_1(\theta=\pi/2)|}{c} r\right) r dr \right]^2 / \text{単位長さ}$$

$$I_2 = 0$$

b) 磁場の方向を軸として j_ϕ がながれるばあい。

$$\mathbf{j} = (-j_0 F(r) \sin\phi, j_0 F(r) \cos\phi, 0) \quad \int_0^\infty F(r) dr = 1$$

軸対称なことはあきらかなので、 $k_1=0$ とする。

$$j_1(\mathbf{k}) = \frac{\pm i j_0}{2\pi} \delta(k_3) \int_0^\infty F(r) J_1(|\mathbf{k}|r) r dr, \quad j_2(\mathbf{k}) = \beta \quad \pm \text{は } k \geq 0$$

これから

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{2\pi^3 \omega j_0^2}{c^2} \left[\int_0^\infty F_2(r) J_1\left(\frac{\omega |n_2(\theta=\pi/2)|}{c} r\right) r dr \right]^2 / \text{単位長さ}$$

a), b) の例ででてくる $n_{1,2}(\theta=\pi/2)$ は

$$n_1^2 = 1 - \frac{1}{\beta^2 x_i x_e}, \quad n_2^2 = 1 + \frac{\beta^2 (x_i x_e - 1) - 1}{\beta^2 \{x_i x_e - \beta^2 (x_i x_e - 1)^2 - x_i^2\}}$$

であたえられる。

c) 磁場に垂直な一平面内で j_ϕ がながれるばあい。

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (-j_0 F_3(r) \delta(z) \sin\phi, j_0 F_3(r) \delta(z) \cos\phi, 0) \quad \int F_3(r) dr = 1$$

b) のときと同様に $k_1=0$ として、

$$j_1(\mathbf{k}) = \frac{\pm i j_0}{(2\pi)^2} \int_0^\infty F_3(r) J_1(|k_2|r) r dr \quad j_2(\mathbf{k}) = 0, \quad \pm k_2 \geq 0$$

がえられる。これから

$$dI_{1,2} = \frac{\pm \pi \omega^2 j_0^2 n_{1,2}}{4 c^3 (n_1^2 - n_2^2)} \left[\int_0^\infty F_3(r) J_1\left(\frac{\omega |n_{1,2}|}{c} r \sin \theta\right) r dr \right]^2 \times \\ \times \left[n_{1,2}^2 + \frac{(1 - \beta^2 x_i x_e) \{ x_i x_e - 1 - \beta^2 (x_i x_e - 1)^2 - x_i^2 \}}{\beta^2 \{ (1 - \beta^2 x_i x_e) (x_i x_e - 1)^2 - x_i^2 \} - (1 - x_i x_e - x_i^2) \sin^2 \theta} \right]$$

特別なばあいとして

$$dI_1(\theta = \pi/2) = dI_{1,2}(\theta = 0) = 0,$$

$$dI_2(\theta = \pi/2) = \frac{\pi \omega^2 j_0^2 n_2(\theta = \pi/2)}{2 c^3} \left[\int_0^\infty F_3(r) J_1\left(\frac{\omega |n_2(\theta = \pi/2)|}{c} r\right) r dr \right]^2$$

また $x_i x_e \ll 1$, $\beta^2 x_i x_e \ll 1$, $\frac{\omega n}{c} \ll 1$ ($\omega \ll \omega_{cd}, \omega_0$, 波長が長い) のばあい、

$$dI_1 \simeq 0$$

$$dI_2 \simeq \frac{\pi \omega^4 j_0^2}{16 c^5} \left[\int_0^\infty F_3(r) r^2 dr \right]^2 \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) \sin^2 \theta$$

である。

磁気流体波の excitation の実験との関係でとくに興味がある。磁場に垂直な面内で j_r の流れるばあいについては、数値的な検討とともにつぎの機会にゆずる。

最後に研究の場所をあたえてくださった東大の宮本先生に厚く感謝いたします。またプラズマについていろいろ教えて頂いた、木原先生はじめ東大の宮本研究室および木原研究室の方々にも深く感謝します。

- 1) A. Ahiezer Nuovo Cimento (Supplement) 3 ('56) 591 参照
- 2) L. Spitzer : "Physics of Fully Ionized Gases" p. 21
- 3) A. Ahiezer and A. G. Sitenko : JETP 35 ('58) 116